



NATURA CUPIDITATEM INGENUIT HOMINI VERI VIDENDI
Marcus Tullius Cicero
(Природа наделила человека стремлением к познанию истины)

Мысли Об Истине

Альманах «**МОИ**»
Электронное издание, ISBN 9984-688-57-7

Альманах «Мысли об Истине» издается для борьбы с лженаукой во всех ее проявлениях и в поддержку идей, положенных в основу деятельности Комиссии РАН по борьбе с лженаукой и фальсификацией научных исследований. В альманахе публикуются различные материалы, способствующие установлению научной истины и отвержению псевдонаучных заблуждений в человеческом обществе.

Альманах издается с 8 августа 2013 года
Настоящая версия тома выпущена **2017-08-28**

© 2017 Марина Ипатьева (оформление и комментарии)

Зенкин А.А. Трансфинитный рай Георга Кантора

(Библейские сюжеты на пороге Апокалипсиса)

Файл	tranrai.doc http://www.raai.org/about/persons/zenkin/pages/tranrai.doc
Last saved by	Karpov
Revision number	32
Total editing time	134 Minutes
Printed	среда, 17 августа 2005 года 17:14:00

Аннотация

В данной статье анализируются некоторые эпистемологические дефекты логики канторовского доказательства несчетности континуума с помощью диагонального метода Кантора (ДМК), основанного на концепции *актуальной* бесконечности (АБ). В частности, рассматриваются логические и психологические причины неприятия концепции АБ такими выдающимися философами, логиками и математиками, как Аристотель, Евклид, Лейбниц, Кант, Гаусс, Кронекер, Пуанкаре, Вейль, Борель, Брауэр, и многими другими.

В современной Аксиоматической Теории Множеств (АТМ), которая претендует на абсолютную строгость своих рассуждений, до сих пор отсутствует строгое, формальное определение базового понятия АБ, что делает беспредметными любые дискуссии о легитимности этого понятия. Впервые (в соавторстве с Аристотелем) дается строгое, аксиоматическое определение понятия потенциальной бесконечности (ПБ) и понятия АБ как отрицания ПБ.

Обсуждаются психологические и педагогические последствия уникального *мета-математического* открытия, суть которого состоит в том, что знаменитый ДМК является специфической версией метода контр-примера, кстати, хорошо известного Пифагору и



Зенкин, Александр Александрович (1937.07.09 – 2006.02.22)¹

¹ Фото с сайта <http://www.raai.org/about/persons/zenkin/>. Там же дается следующая справка о нем: «Профессор, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Отдела Интеллектуальных прикладных систем Вычислительного Центра РАН, член Российской Ассоциации Искусственного Интеллекта и Философского Общества России, член Международной федерации Художников и Творческого Союза Художников России. В 1959 году А.А. Зенкин закончил Химический факультет МГУ им. Ломоносова, с 1968 по 1993 год он прошел основные ступени инженерной и научной лестницы (инженер, научный сотрудник, доцент Химического факультета МГУ). Затем, с 1993 по 1995 год А.А. Зенкин работал старшим научным сотрудником Российского научно-исследовательского института региональных проблем, а с 1996 года и до последних дней активно работал в Вычислительном центре РАН. В 1974 году Александру Александровичу Зенкину была присуждена ученая степень кандидата физико-математических наук, в 1982 году он получил ученое звание старшего научного сотрудника по специальности «математическое обеспечение вычислительных машин и систем», в 1991 году – ученое звание Доцента по кафедре химической технологии, а в 1993 году защитил докторскую диссертацию. Ученую степень доктора физико-математических наук Александр Александрович получил за работы по теории чисел, направление, которым он активно занимался большую часть своей долгой научной жизни. А.А. Зенкин вел активную преподавательскую работу на химическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова. Он автор более 200 научных работ, опубликованных в самых престижных отечественных и зарубежных изданиях. А.А. Зенкин – известный ученый (химик и математик). Его основные научные результаты были связаны с обобщением известной теоремы Гилберта из теории чисел, которое обеспечило полное решение классической проблемы Варинга. Он автор нового направления, получившего название «Когнитивная графика». В рамках развития этого направления А.А. Зенкиным были разработаны и реализованы (совместно с сыном, который активно и плодотворно помогал Александру Александровичу в его работе) несколько компьютерных систем на основе идей и методов когнитивной графики. Отдел Интеллектуальных прикладных систем Вычислительного Центра РАН. Ул. Вавилова 40, 117967, Москва ГСП-1, Россия».

Евклиду. Это открытие ставит под сомнение профессионализм адептов современной АТМ и рекламируемую ими «непорочность» канторовского ДМК-доказательства несчетности континуума. На основе анализа этого ДМК-доказательства впервые реализовано строгое доказательство противоречивости понятия АБ.

Коротко обсуждаются негативные последствия бурбакизации (термин академика В.И. Арнольда), т.е. излишней, ненужной, бессмысленной, оглуляющей, отупляющей и зомбирующей формализации математики и математического образования.

Показано, что знаменитый парадокс «Гранд Отель» Д. Гильберта является дедуктивной моделью (в смысле А. Тарского) ДМК-доказательства несчетности континуума Г. Кантора. На основании этой модели доказано, что ДМК-доказательство Теоремы Кантора является некорректным с точки зрения классической логики. Это означает, что несчетных множеств не существует и все бесконечные множества имеют одинаковую мощность. В таком случае всё «Учение о трансфинитном» Г. Кантора лишается смысла. В частности, отсюда следует новый и, по-видимому, самый драматический парадокс теории множеств: еще 80 лет тому назад Д. Гильберт, сам того не ведая, с помощью парадокса «Гранд Отель» опроверг свое собственное эпохальное заявление о том, что «никто не сможет изгнать нас из рая, созданного для нас Кантором». К сожалению, этого не понял ни сам Гильберт, ни его многочисленные мета-математические эпигоны.

В заключение анализируется Библейское предостережение «строителям трансфинитной лестницы на небо» (Вавилонской Башни-2): в послании Апостола Павла Титу прозрачно закодирована угроза смешения истины и лжи, дабы воспрепятствовать указанному «строительству», ведущему к Апокалипсису, а Комиссия РАН по борьбе с лженаукой создана, по замыслу Господа, для того, чтобы официально и навсегда закрыть «трансфинитный рай» Г. Кантора как базу самой коварной лженауки и «заградить уста непокорным, пустословам и обманщикам, которые развращают целые дома, уча, чему не должно, из постыдной корысти».

Сведения об авторе:

Профессор Александр Александрович Зенкин, Доктор физико-математических наук, Ведущий научный сотрудник Вычислительного Центра РАН, Член Российской Ассоциации Искусственного Интеллекта, Философского Общества России и Международной федерации Художников.

e-mail: alexzen77@rambler.ru

WEB-Site <http://www.com2com.ru/alexzen/> и <http://www.ccas.ru/alexzen/index.html>

«ТРАНСФИНИТНЫЙ РАЙ» ГЕОРГА КАНТОРА: БИБЛЕЙСКИЙ СЮЖЕТ НА ПОРОГЕ АПОКАЛИПСИСА.

Зенкин А.А.,

профессор, доктор физ-мат наук, ведущий научный сотрудник
Вычислительного центра РАН, e-mailto: alexzen77@rambler.ru

четверг, 18 августа 2005 г.

1. Психологический антураж проблемы.

Бесконечность – важнейшая проблема философии и религии, логики и математики, эпистемологии и психологии познания. «С давних пор, – пишет выдающийся немецкий математик Д. Гильберт [1]², – никакой другой вопрос так глубоко не волновал человеческую мысль, как вопрос о бесконечном; бесконечное действовало на разум столь же побуждающе и плодотворно, как едва ли действовала какая-либо другая идея; однако ни одно другое понятие не нуждается так сильно в разъяснении, как бесконечность».

И далее: «...окончательное выяснение сущности *бесконечного* выходит за пределы узких интересов специальных наук и, более того, ... оно стало необходимым для чести самого человеческого разума».

Эти мудрые, выстраданные слова великого математика были сказаны в 1925 г., однако и сегодня выяснение сущности *бесконечного* остается не менее (если не более) актуальной задачей.

² Гильберт Д., *Основания Геометрии*. – М-Л: ОГИЗ, 1948.

Более двух тысячелетий тому назад Аристотель впервые ввел явное различие двух *контрадикторных* типов бесконечного – *потенциально* бесконечное (ПБ) и *актуально* бесконечное (АБ). *Контрадикторность* АБ и ПБ Аристотель понимал в том совершенно однозначном смысле, что

ПБ есть НЕ-АБ и АБ есть НЕ-ПБ.

Свое эпистемологическое кредо относительно легитимности указанных типов бесконечности Аристотель сформулировал следующим категорическим образом: «*Нет актуальной бесконечности. Бесконечное существует только потенциально*» [2]³.

Аристотель отказал АБ в праве на существование исключительно потому, что как логик считал понятие АБ внутренне противоречивым.

В разное время, на протяжении тысячелетий и до наших дней, негативную точку зрения Аристотеля на легитимность понятия АБ разделяли и поддерживали выдающиеся философы, логики и математики. Вот далеко не полный список лишь некоторых из них (чтобы прочувствовать вселенский драматизм ситуации, читать этот Список следует очень медленно и очень внимательно!).

СПИСОК-1. Противники АБ (они же, начиная с Кронекера, – *анти-канторианцы*): Аристотель, Евклид, Лейбниц, Беркли, Локк, Декарт, Кант, Спиноза, Лагранж, Гаусс, Кронекер, Лобачевский, Коши, Ф. Клейн, Эрмит, Пуанкаре, Бэр, Борель, Брауэр, Куайн, Виттгенштейн, Вейль, Лузин, и уже в наши дни – Эррет Бишоп, Соломон Феферман, Ярослав Перегрин, Владимир Турчин, Петр Вopenка и многие другие выдающиеся создатели классической (т.е. работающей и сегодня) логики и классической (т.е. работающей и сегодня) математики в целом.

Следует заметить, что начиная с Кронекера, т.е. примерно с 70-х г.г. XIX века, протест против использования АБ в математике принял форму резко негативного отношения к теории множеств Георга Кантора, *основанной на концепции АБ* [3]⁴. Так, например, великий французский математик Анри Пуанкаре, который, поначалу, отнесся к теории Кантора весьма благосклонно и даже принял активное участие в переводе основных работ Кантора на французский язык, в начале XX века, после обнаружения в этой теории неразрешимых противоречий и парадоксов, резко изменил свое к ней отношение [4]⁵ и пришел к выводу, что «*нет актуальной бесконечности; канторианцы забыли об этом и впали в противоречия. Следующие поколения будут рассматривать канторовскую теорию множеств как болезнь, от которой наконец-то удалось избавиться*» [5]⁶. Один из основателей интуиционизма и современной топологии, Л. Брауэр «разошелся во мнениях» по поводу теории Кантора со своим великим учителем Д. Гильбертом и пришел к еще более радикальному выводу: «*канторовская теория в целом представляет собой патологический казус в истории математики, от которого грядущие поколения просто придут в ужас*» [6]⁷.

Не менее определенно «в пользу» противоречивости АБ и нелегитимности основанной на ней теории множеств высказываются и многие современные профессиональные логики и математики.

Возникает довольно странная ситуация. С одной стороны, начиная с Аристотеля, выдающиеся философы, логики и математики в течение тысячелетий отвергали АБ как понятие внутренне противоречивое. Однако эта противоречивость АБ никогда не была строго доказана и все возражения против использования АБ в математике носили, по преимуществу, декларативный характер, основанный на *интуитивных* «соображениях»: «Я протестую самым решительным образом против использования бесконечного как чего-то завершенного <АЗ: т.е. как АБ>...» – пишет, например, великий Гаусс в известном письме Шумахеру в 1831 г. И аргументирует свой протест в духе совершенно ему не свойственного «академического негативизма»: «...поскольку это никогда недопустимо в математике. Бесконечное есть всего лишь «фигура речи...». Конечно, за этой «аргументацией» стоит огромный профессиональный опыт и гениальная научная интуиция «короля всех математиков», но с точки зрения логики это всего лишь *мнение* великого ученого, а не *доказательство* фактической недопустимости использования АБ в математике.

³ Aristotle, *Physics*, Book III (translated by R.P. Hardie and R.K. Gaye). – <http://classics.mit.edu/Aristotle/physics.html>.

⁴ Кантор Г., *Труды по теории множеств*. – М.: Наука, 1985.

⁵ Ф.А. Медведев, *Французская школа теории функций и множеств на рубеже XIX–XX вв.* – М.: «Наука», 1976.

⁶ А. Пуанкаре, *О науке*. – М.: Наука, 1983.

⁷ А.А. Френкель, И. Бар-Хиллел, *Основания теории множеств*. – М.: «Мир».

С другой стороны, в XIX–XX в.в. появилась не менее внушительная плеяда логиков и математиков, которые получили серию выдающихся, эпохальных мета-математических результатов, основанных именно на использовании концепции АБ (известные теоремы Кантора, Тьюринга, Черча, Геделя, Тарского и др. с их парадигмальными философскими «по-следствиями»), причем «существует мнение», что *доказательства* этих результатов удовлетворяют самым высоким требованиям мета-математической строгости [7]⁸.

В математике, вообще говоря, не принято возражать против *доказанных* утверждений (теорем), тем более, возражать на основе чисто интуитивных предпочтений. Тем не менее и сегодня, как и в начале XX века, имеет место быть «великое противостояние» между *мета-математической логикой* канторианцев, признающих легитимность канторовского «Учения о Трансфинитном» в форме «ненаивной» (см. ниже) версии этого «Учения», т.е. в форме современной аксиоматической теории множеств (далее – **АТМ**), основанной на (*молчаливом* – см. далее) использовании концепции АБ, и *математической интуицией анти-канторианцев*, отвергающих концепцию АБ и на этой концепции основанное «Учение о Трансфинитном» Г. Кантора. Единственное, в чем безоговорочно согласны и канторианцы, и *анти-канторианцы*, так это в том, что неограниченное использование концепции АБ ведет к парадоксам логики и математики, и до тех пор, пока логическая природа и механизм порождения парадоксальных ситуаций остаются нераскрытыми, «можно, конечно, обнести канторовский трансфинитный рай стенами, предохраняющими от вторжения гнусных антиномий, – пишут Френкель и Бар-Хиллел, имея в виду создание АТМ, но делают при этом очень существенное добавление, – без всякой, однако, уверенности, что некоторые из этих тварей не засели внутри» [6]⁹.

При этом «с самого начала следует уяснить, – совершенно справедливо подчеркивают указанные авторы, – что в традиционной трактовке логики и математики нет решительно ничего, что могло бы служить в качестве основы для устранения антиномии Рассела <А3: а также парадокса «Лжеца»>. Мы полагаем, что любые попытки выйти из положения с помощью традиционных ... способов мышления, до сих пор неизменно проваливавшиеся, заведомо недостаточны для этой цели. Некоторый отход от привычных способов мышления явно необходим, хотя место этого отхода заранее не ясно».

Таким образом, раскрытие логической природы парадоксов и вопрос о легитимности использования концепции АБ в математике являются актуальными и сегодня. Один из возможных «нетрадиционных» подходов к решению проблемы парадоксов предложен в [8]¹⁰. Важнейшим психологическим аспектом указанного противостояния канторианцев и *анти-канторианцев* является фундаментальная проблема психологии научного познания – проблема соотношения, взаимосвязи и взаимного влияния логики и интуиции в математическом творчестве [5, 9]¹¹. Анализ логики Диагонального метода Кантора (далее – **ДМК**) дает уникальный материал для понимания очень неочевидного характера взаимного влияния логики и интуиции: как будет показано далее, не только интуиция, но и *мета-математическая логика* при определенных условиях способна вводить в заблуждение наше научное познание.

На мой взгляд, *первым* шагом на пути к выходу из указанного кризиса является «официальное» признание аксиоматического характера ПБ и АБ [10, 11]¹². Действительно, строго говоря, Аристотель и его последователи *не доказали*, что «бесконечное существует только потенциально», равно как и Кантор и его последователи *не доказали*, что «бесконечное существует актуально». Ситуация «ПБ или АБ» очень напоминает ситуацию с Пятым постулатом Евклида. Как известно, утверждения, которые в математике принимаются без доказательства, называются аксиомами. Это означает, что в математике уже более двух тысячелетий де-факто существует

АКСИОМА АРИСТОТЕЛЯ (IV век до н.э.). Все бесконечные множества являются множествами **потенциально-бесконечными**.

И более ста лет де-факто существует *контрадикторная* ей

⁸ Н. Бурбаки, *Теория множеств*. – Москва: МИР, 1965.

⁹ А.А. Френкель, И. Бар-Хиллел, *Основания теории множеств*. – М.: «Мир».

¹⁰ Зенкин А.А. *Новый подход к анализу проблемы парадоксов*. – Вопросы философии. 2000, №10, 79–90.

¹¹ А. Пуанкаре, *О науке*. – М.: Наука, 1983. Зенкин А.А., *Априорные логические суждения с нулевой онтологией*. – Сборник «Математика и опыт», изд. МГУ, 2004, ред. проф. А.Г. Барабашев, стр. 423–434.

¹² Зенкин А.А. *Ошибка Георга Кантора*. // Вопросы философии. 2000, №2, 165–168. Зенкин А.А. *Infinitum Acti Non Datur*. // Вопросы философии. 2001, №9, стр. 157–169.

АКСИОМА КАНТОРА (XIX век н.э.). Все бесконечные множества являются множествами **актуально-бесконечными**.

Вся классическая математика основана на аксиоме Аристотеля, вся современная «ненаивная» АТМ основана на аксиоме Кантора, хотя и «молчаливо», т.е. аксиома Кантора ни в одной версии АТМ явно не упоминается (см. ниже).

Очевидно, что явная формулировка Аксиомы Кантора потребует от АТМ восполнить *вопиющий* (для такой респектабельной науки с официально ею заявленной «претензией на абсолютную строгость» [7]¹³) пробел – отсутствие строгого, формального определения понятия АБ [12]¹⁴ (см. ниже).

Одним словом, явная формулировка Аксиомы Кантора позволит, наконец, «вывести из тени» фундаментальнейшее *необходимое* условие доказательства основных эпохальных утверждений современной АТМ, претендующих на статус логических и математических теорем (напомню, что отсутствие явной формулировки необходимых условий доказательства математического утверждения является извращенной формой математического невежества), и тем самым *впервые* сделать эти доказательства доступными для критического анализа их логической легитимности [11, 9, 13]¹⁵.

2. «Над пропастью во лжи ...»

О какой пропасти пойдет речь, станет ясно из дальнейшего, а сейчас – несколько слов о *бурбакизации* математики и математического образования.

В середине XX века группа известных французских математиков, объединившихся под псевдонимом Н. Бурбаки, вознамерилась дедуцировать всю математику, которая «уже есть» и которая «еще только будет», из аксиом АТМ посредством чисто символических манипуляций «без использования даже единственного слова на естественном языке» [7]¹⁶. Как всегда, нашлось немало педагогических «энтузиастов» (термин Е. Петросяна), которые принялись внедрять эту АТМ-«методологию» в математическое образование: достаточно, мол, обучить детишек нескольким формальным аксиомам и правилу *modus ponens*, – полагали эти «педагогические» АТМ-реформаторы, – как дальше уже без посторонней помощи дети сами начнут дедуцировать любые математические истины в неограниченных количествах и на уровне лучших образцов современной АТМ-науки.

Как известно, подобная АТМ-инициатива породила такое масштабное негативное явление как бурбакизм, т.е. излишнюю, ненужную, бессмысленную, оглуляющую, отупляющую и зомбирующую формализацию математики и математического образования. Характеризуя негативные последствия подобной бурбакизации, выдающийся российский математик и педагог, академик В.И. Арнольд пишет [14–17]¹⁷:

«В середине XX столетия обладавшая большим влиянием *мафия «левополушарных математиков»* сумела исключить геометрию из математического образования ..., заменив всю содержательную сторону этой дисциплины *тренировкой в формальном манипулировании абстрактными понятиями*.

Подобное *абстрактное* описание математики непригодно ни для обучения, ни для каких-либо практических приложений. Современное формализованное (бурбакизированное) образование в

¹³ Н. Бурбаки, *Теория множеств*. – Москва: МИР, 1965.

¹⁴ Zenkin A.A., *As to strict definitions of potential and actual infinities*. – FOM-archive (FOM = Foundations of Mathematics) <http://www.cs.nyu.edu/pipermail/fom/2002-December/006072.html>.

¹⁵ Zenkin A.A. *Infinitum Actu Non Datur*. // Вопросы философии. 2001, № 9, стр. 157–169. Zenkin A.A., *Априорные логические суждения с нулевой онтологией*. – Сборник «Математика и опыт», изд. МГУ, 2004, ред. проф. А.Г. Барабашев, стр. 423–434. Zenkin A.A., *Scientific Intuition Of Genii Against Mythology "Logic" Of Transfinite Cantor's Paradise*. International Symposium – Philosophical Insights into Logic and Mathematics (PILM 2002): The History and Outcome of Alternative Semantics and Syntax, 2002, Nancy, France. Proceedings, pp. 141–148.

¹⁶ Н. Бурбаки, *Теория множеств*. – Москва: МИР, 1965.

¹⁷ *An Interview with Vladimir Igorevich Arnol'd* by S.H. Lui. – Notices of the AMS, v.44, No. 4, 432–438 (1997). Arnold V.I., «*International Mathematical Congress in Berlin*». – Vestnik RAN, Vol. 69, no.2, 163–172 (1999). Арнольд В.И., «*Антинаучная Революция и Математика*». – Вестник РАН, 1999, №. 6, 553–558. Zenkin A.A., «*Научная контр-революция в математике*». – Независимая газета от 19 Июля, 2000 г. Приложение «НГ-НАУКА», стр. 13.

математике – полная противоположность обучению умению думать и основам науки. Оно опасно для всего человечества. Будущее математики, инфицированной этой болезнью, выглядит довольно мрачным».

Как известно, любая уважающая себя мафиозная структура стремится создать позитивный имидж «о себе любимой» в глазах «мировой общественности». Как правило – с помощью ссылок на безусловную поддержку любых своих злонамеренных «интенций, товаров и услуг» со стороны «серьезной науки», солиднее всего – РАНовской.

Но поскольку эти «интенции, товары и услуги», как правило, не отвечают высоким требованиям современного просвещенного потребителя, то не обойтись без «небольших искажений» того, что в науке до сих пор было принято называть истиной.

Именно такую PR-технологию взяла на вооружение современная АТМ. И не без успеха. Приведем несколько весьма характерных примеров такой «АТМ-лжи во спасение» канторовского «трансфинитного рая».

Ложь-1. «Математика – королева всех наук, и АТМ – королева математики»!

В середине XIX века, характеризуя роль и значение математики в интеллектуальном прогрессе рода Homo Sapiens, великий Гаусс гордо провозгласил: «Математика – Королева всех наук, и теория чисел – Королева математики». Спустя полвека, великий Пуанкаре уточнил «эзотерический» смысл этой эпистемологической парадигмы Гаусса: «Теперь в анализе остаются только целые числа или конечные и бесконечные системы целых чисел, связанных между собой сетью отношений равенства или неравенства. Математика, как говорят, арифметизировалась. *Сегодня из понятия натурального числа можно вывести всю математику*» [5]¹⁸. Современная АТМ и здесь эффективно работает «на подхвате»: посредством «ненавязчивых» повторов (PR-технология 25-го кадра) она морочит голову профессиональному математическому сообществу и зомбирует молодое поколение математиков: «Действительно, – соглашаются АТМ-адепты, – в начале XX века немало выдающихся математиков категорически отвергало АТМ как лже-науку. Но сегодня все споры утихли. А это значит (!), – утверждают АТМ-адепты, – что современные математики, наконец-то, прозрели по тому поводу, что все бесконечности – *актуальны*, одумались на тот предмет, что теория *конечных* натуральных чисел «выводима» из теории *трансфинитных* чисел, что понятие пустого множества дедуцируется из понятия актуально-бесконечного множества, что *вся современная математика может быть выведена из АТМ* и официально признали, что «Математика – Королева всех наук, и АТМ – Королева Математики»! Все вчерашние противники АТМ сегодня согласны с тем, что АТМ является выдающимся достижением современной математики, достижением, которое изменило лицо всей математики XX века» [1, 7, 18, 20]¹⁹.

«Это есть эмпирический факт, – уже в наши дни дружно зомбируют научное сообщество Мартин Дэвис и Ройбен Херш, – что около 90% работающих математиков приняли канторовскую теорию множеств, как в теории, так и практически, *до некоторой степени*» [21]²⁰.

Примечание «*до некоторой степени*» говорит о многом, но, тем не менее, не совсем понятно, какие методы были использованы указанными выдающимися АТМ-экспертами для установления этого довольно сомнительного «эмпирического факта».

По моим «социологическим» данным, АТМ-адепты в данном случае намеренно «замазывают» очень существенное различие между *языком* абстрактной теории множеств и *учением* Кантора о трансфинитных порядковых и количественных «числах», т.е. о трансфинитных ординалах и трансфинитных кардиналах Г. Кантора. Язык теории множеств (элемент, множество, принадлежность элемента множеству, отображение, эквивалентность/неэквивалентность множеств и т.п.) действительно стал универсальным математическим языком и в этом смысле действительно «изменил лицо всей математики XX века». Что касается «учения» о трансфинитных ординалах и кардиналах, то 90% реально работающих математиков (т.е. не АТМ-профессионалов) забывают это «учение» на следующий день после сдачи экзамена по теории функций действительной переменной, включающего один-два вопроса по АТМ. – Забывают по

¹⁸ А. Пуанкаре, *О науке*. – М.: Наука, 1983.

¹⁹ Гильберт Д., *Основания Геометрии*. – М-Л: ОГИЗ, 1948. Н. Бурбаки, *Теория множеств*. – Москва: МИР, 1965. Клини С. *Введение в метаматематику*. – М.: Мир, 1957. Wilfrid Hodges, *An Editor Recalls Some Hopeless Papers*. – The Bulletin of Symbolic Logic, Vol. 4, No. 1, pp. 1–17, 1998.

²⁰ [Wikipedia] *Talk: Cantor's diagonal argument*, – http://en.wikipedia.org/wiki/Talk:Cantor%27s_diagonal_argument.

причине абсолютной бесполезности этих «ординалов и кардиналов» для потребностей реальной (т.е. «работающей», по терминологии Дэвиса и Херша) математики. Из оставшихся – 9% математиков категорически не приемлют это «учение» (см. Список-1 *анти*-канторианцев, выше), а последний 1% и составляют АТМ-адепты или, по терминологии академика В.И. Арнольда, бурбакисты,

«которые способны лишь учить ... следующие поколения формальному манипулированию абстрактными понятиями, оказывать на (заведомо неслабоумных) студентов зомбирующее и оглупляющее давление, превращая их в формальные машины, и реализуя такой тип формализованного образования, который является совершенно бесполезным для решения любых практических проблем и даже становится опасным для всего человечества, приводя к событиям типа Чернобыля» [14–17].

Следует подчеркнуть одну характерную для АТМ-методологии эпистемологическую деталь: приведенный выше Список-1 *анти*-канторианцев публикуется впервые и ничего подобного вы не найдете ни в одном учебнике по АТМ, поскольку «левополушарная мафия» стремится оградить свою паству от всякой информации о своих выдающихся и непримиримых оппонентах. Я уверен, что если бы первокурсников знакомили со Списком-1 до изложения основ «Учения о трансфинитном» Г. Кантора и аксиоматики АТМ, этот Список-1 пришлось бы расширять существенно и постоянно.

И куда только смотрит Комиссия РАН по борьбе с лже-наукой?!

Ложь-2. Самая эффективная PR-акция в истории науки.

Что общего между исполненной кастового высокомерия великосветской дамой (в бытность – легкого поведения), и современной АТМ? – И та, и другая всеми способами стараются избавиться от своего «неудобного» прошлого. Для великосветской дамы это обычно стоит немалых денег, для современной АТМ это не стоило практически ничего, благодаря одной из самых эффективных PR-акций, когда-либо реализованных в тысячелетней истории науки. Ничего подобного не снилось даже современным профессиональным PR-технологам: никому из них еще не удавалось изменить господствующую социальную парадигму на прямо противоположную с помощью одного-единственного удачного *эпитета*!

Как уже отмечалось, все канторианцы и АТМ-специалисты прекрасно понимали и (*молча!*) понимают сегодня, что именно актуализация бесконечных множеств породила серию фатальных противоречий и парадоксов в теории множеств. Поэтому, в середине XX века канторовская теория множеств, основанная на концепции АБ, была объявлена «наивной» [6, 18]²¹, дабы не отбрасывала свою компрометирующую «тень» на современную, «не-наивную» аксиоматическую теорию множеств, а сам термин «АБ» был выведен за рамки респектабельной мета-математической науки: упоминать АБ в монографиях и учебниках по мета-математике и АТМ «сделалось» неприличным, а проблема парадоксов была «решена» согласно хорошо известному в «определенных кругах» принципу: «нет термина – нет и проблемы».

Это был блестящий пиар-ход, в основе которого лежал вопиюще *лже-научный*, полукриминальный «метод решения» фундаментального научного вопроса о логической природе математической бесконечности.

И куда только смотрит Комиссия РАН по борьбе с лже-наукой?!

Ни одному математику никогда не придет в голову назвать «за давностью лет», например, геометрию Евклида или дифференциальное-интегральное исчисление Ньютона–Лейбница *наивными* теориями и запретить использование в своей науке таких, например, терминов, как «параллельные прямые», «бесконечно малая», «дифференциал», «производная» и т.п. С этой точки зрения, современная АТМ является, пожалуй, единственной наукой, которая вот уже почти полвека официально «открещивается» от наследия своего «отца-основателя» Г. Кантора: «Канторовскую теорию множеств, – разъясняет, например, С. Клини [19]²², – в том виде, как она исторически возникла и как мы с ней знакомимся в §33–34, называют «наивной» теорией множеств». По фатальным последствиям для любой науки, совершенно безразлично, повесить ли на нее ярлык «наивной», как это делает мэтр С. Клини и современная мета-математическая «общественность», или просто «лже-науки», как это было принято в недавнем СССР: ни один уважающий свое научное реноме (а, главное, свое академическое кресло) мета-математический

²¹ А.А. Френкель, И. Бар-Хиллел, *Основания теории множеств*. – М.: «Мир». Клини С. *Введение в метаматематику*. – М.: Мир, 1957.

²² Клини С., *Математическая логика*. – М.: Мир, 1973.

профессор уже не будет знакомить своих студентов даже с основами такой «наивной» лженауки, а это означает, что через 2–3 научных поколения (т.е. через 10–15 лет) даже профессиональные мета-математики (не говоря уже обо всех прочих «непрофессионалах») будут иметь весьма смутное представление об истинных «источниках и составных частях» Третьего Великого Кризиса оснований математики, «который продолжается до сих пор» [6]²³.

Следует заметить, что указанная PR-акция содержала значительную долю мета-математического цинизма: все пороки (противоречия и парадоксы), связанные с очевидной противоречивостью понятия АБ, современная АТМ приписала «наивной» теории множеств Г. Кантора, однако, с другой стороны, из этой «наивной» теории современная АТМ позаимствовала всего лишь один, но «краеугольный (!) камушек» – теорему о несчетности континуума, доказательство которой основано на использовании... очевидно-противоречивого понятия АБ.

И куда только смотрит Комиссия РАН по борьбе с лже-наукой?!

Ложь-3. Необходимые условия математических доказательств как философские «прибамбасы» доказательств мета-математических.

Согласно «устоявшемуся» мнению современных мета-математических и АТМ-экспертов, наиболее определенно выраженному С. Феферманом [23]²⁴, «понятия потенциальной и актуальной бесконечности относятся к неформальному, философскому уровню и потому вообще не употребляются в современных аксиоматических системах, хотя некоторые аксиомы *обосновываются* *<are justified>* допущением актуально-бесконечного». По поводу особенностей своей новой Операциональной Теории Множеств *<Operational Set Theory>* Феферман признает, что она «явно включает в себя форму существования актуальной бесконечности». Однако, суммируя свое отношение к АБ, он утверждает, что «концепция АБ не является частью математики».

Довольно странная позиция. Конечно, любую аксиому можно «обосновывать» и философски, и эмпирически, и психологически, и юридически, и т.п. Вопрос в том, используется ли это обоснование в самой *формальной* системе? Если используется, то оно должно быть *явно* сформулировано и зафиксировано в аксиоматике данной формальной системы, иначе такая система не является формальной. Если не используется, то дедуктивные выводы из данной системы аксиом не могут зависеть ни от каких вне-системных «обоснований». С этой точки зрения, *явное* включение *<в любую АТМ>* некой «*формы существования актуальной бесконечности*», которая «не является частью математики» представляется очевидной логической несурзностью. Как установить факт (как правило, неявного, основанного на различных «фигурах умолчания») [11]²⁵) использования АБ в АТМ? – Для этого достаточно заменить «обоснование» на основе «допущения АБ», на *контрадикторное* обоснование на основе «допущения не-АБ», т.е. ПБ. Очевидно, что в результате такой замены «обоснований», значительная часть наиболее важных АТМ-конструкций (канторовское доказательство существования несчетных множеств, различение бесконечных множеств по их мощности, теория порядковых и количественных трансфинитных чисел и т.п.) окажется нереализуемой в рамках АТМ и просто потеряет всякий смысл. Это означает, что «допущение АБ» представляет собой не философское обоснование «некоторых аксиом АТМ», которое не является «частью математики», а необходимое условие доказательства (дедукции) большинства формальных теорем АТМ, именно с точки зрения классической логики и математики. А математика, как известно, тем и отличается от прочих наук, что в ней *все необходимые условия доказательства* любой теоремы формулируются *явно* (если, конечно, они сами уже не «выписаны» явно в качестве аксиом или определений данного раздела математики), а не *подразумеваются* на уровне философских «прибамбасов» мета-математических и АТМ-доказательств, не являющихся «частью математики».

И куда только смотрит Комиссия РАН по борьбе с лже-наукой?!

Ложь-4. Если конкурент не сдается, его уничтожают.

Как справедливо заметил Петр Вопенка, «теория множеств, чья энергия была направлена на актуализацию потенциальной бесконечности, оказалась в конечном счете неспособной устранить потенциальность» [24]²⁶. В этом утверждении есть только одна неточность. Действительно, АТМ не смогла «устранить потенциальность» с помощью научной методологии, поскольку в рамках науки «устранить» какую-либо концепцию (или понятие) можно только

²³ А.А. Френкель, И. Бар-Хиллел, *Основания теории множеств*. – М.: «Мир».

²⁴ 23. Feferman S., *In the Light of Logic*. – Oxford University Press, 1998, Logic and Computation in Philosophy series, <http://www.oup-usa.org/>.

²⁵ Зенкин А.А. *Infinitum Actu Non Datur*. // Вопросы философии. 2001, № 9, стр. 157–169.

²⁶ Вопенка П., *Математика в альтернативной теории множеств*, Москва, 1983 г.

одним способом – доказав *противоречивость* этой концепции (здесь – понятия ПБ). Будучи не в состоянии доказать противоречивость понятия ПБ, АТМ пошла по другому пути. Как уже говорилось, АТМ-адепты *объявили* проблему легитимности использования АБ в математике *философской* проблемой. Есть сильное подозрение, что основной причиной такого «выдавливания» АБ в область беспредметных философских «дискурсов» явилась не классическая логика, и даже не мета-математическая логика, а профессиональная АТМ-интуиция, которая на уровне спинного мозга ощущает опасность, связанную с возможностью формального, строгого определения понятия АБ: если такое определение будет однажды дано, противоречивость понятия АБ станет слишком очевидной и за рамками АТМ-«клана», а это ставит под угрозу неплохо «фондируемое» и ставшее привычным благолепное благополучие АТМ-завсегдатаев канторовского «трансфинитного рая». С другой стороны, согласно Аристотелю, АБ есть НЕ-ПБ. Это значит, что если не дай бог, кто-то даст формальное, строгое определение понятия ПБ, то любой студент может применить к этому определению ПБ операцию отрицания и получить строгое определение понятия АБ с теми же катастрофическими последствиями для благополучия АТМ-адептов. Во избежание подобной вполне реальной опасности, современная АТМ «выдавила» в область беспредметных философских «дискурсов» и понятие ПБ, дабы не провоцировало очевидных и не очень приятных вопросов о легитимности логических оснований того трансфинитного «рая, который создал <для АТМ-адептов – АЗ> Георг Кантор» [1]²⁷. Таким полу-криминальным, лже-научным способом современная АТМ «расправилась» со своим основным оппонентом – с понятием ПБ-множества.

И куда только смотрит Комиссия РАН по борьбе с лже-наукой!?

Однако, последняя PR-акция современной АТМ оказалась позорно провальной, поскольку совершенно строгое определение понятия ПБ было дано... еще Аристотелем в IV веке до н.э..

Остановимся коротко на этом определении.

3. Строгое определение понятия потенциальной бесконечности (Аристотель, IV век до н.э.)

Более двух тысячелетий тому назад великий Аристотель дал следующее совершенно строгое, хотя и вербальное, определение понятия ПБ [25]²⁸.

D1) **ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПБ** (АЗ: вставки в квадратных скобках принадлежат мне): «...бесконечное существует через полагание одной вещи $[n+1]$, взятой после $[>]$ другой $[n]$; то, что полагается всегда остается конечным $[n < \infty]$, но всегда другим и другим $[n \rightarrow \infty]$ ».

Это вербальное определение Аристотеля в переводе на современный формальный язык выглядит следующим образом.

D2) АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПБ.

(A1) Существует вещь '0' (поскольку любая, вполне-упорядоченная, *конечная* последовательность вещей всегда содержит первую вещь; мы будем обозначать эту первую вещь символом, скажем, '0').

(A2) [если n есть вещь (натуральное число) то $n+1$ также есть вещь (натуральное число)], причем $[n+1 > n]$.

(A3) Других вещей (натуральных чисел), отличных от тех, которые определены аксиомами (A1) & (A2), не существует.

Как нетрудно заметить, аксиомы (A1) & (A2) & (A3) представляют собой *строгое, формальное, аксиоматическое, индуктивное* определение обычного ряда обычных конечных натуральных чисел:

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots \quad (*)$$

а сами утверждения (A1) – (A3) являются первыми тремя аксиомами формальной арифметики Пеано [18]²⁹.

Сюда же следует добавить фундаментальное характеристическое свойство потенциально-бесконечного ряда (*), которое в известном смысле можно рассматривать как определение понятия ПБ, эквивалентное определению аксиоматическому.

²⁷ Гильберт Д., *Основания Геометрии*. – М-Л: ОГИЗ, 1948.

²⁸ Moore A.W., *The Infinity*. – The Problems of Philosophy Their Past and Present. Edited by Ted Honderich. – London – New York, 1993.

²⁹ Клини С. *Введение в метаматематику*. – М.: Мир, 1957.

ТЕОРЕМА-А. Не существует последнего (наибольшего) элемента в ряду (*).

Таким образом, абсолютно строгое и формальное (в самом современном смысле!) определение ПБ, хотя и на вербальном уровне (другого уровня в то время просто не существовало), было дано Аристотелем за две с лишним тысячи лет до появления современных математиков и АТМ-специалистов.

Теперь желающие могут вместе с Кантором применить к этому определению понятия ПБ операцию отрицания и получить абсолютно строгое определение понятия АБ. Детальное описание этой, в исполнении Кантора таки-довольно скандальной, процедуры можно найти в [3, 12]³⁰.

ЗАМЕЧАНИЕ. Конечно, все канторовские определения понятия АБ являются противоречивыми. Однако, это не тот случай, когда противоречивость понятия является достаточным основанием для запрета на его употребление. Вспомним аналогичный случай: понятие общей точки двух параллельных линий является внутренне противоречивым (с точки зрения евклидовой геометрии), однако такая точка безо всяких противоречий используется в проективной геометрии (бесконечно удаленная точка как некий *идеальный* элемент). С другой стороны, как уже подчеркивалось выше, если говорить строго, то ни Аристотель не доказал, что ряд (*) является потенциально-бесконечным, ни Кантор не доказал, что этот ряд является актуально-бесконечным. Это значит, что определения ПБ и АБ имеют аксиоматический характер, т.е. имеют место Аксиома Аристотеля и Аксиома Кантора (см. выше) [9, 11]³¹.

Таким образом, повторюсь, мы приходим к выводу о том, что де-факто существуют две математики: классическая математика, основанная на понятии ПБ, и неклассическая математика трансфинитных множеств Г. Кантора, основанная на понятии АБ. Но, как известно, «Запад есть Запад, Восток есть Восток, и вместе им не сойтись», а потому классическая математика и неклассическая математика трансфинитных множеств Г. Кантора не имеют между собой никаких онтологических и семантических пересечений.

Следует подчеркнуть, что в отличие от неевклидовой геометрии, непротиворечивость которой строго доказана, непротиворечивость канторовской теории трансфинитных множеств пока не доказана, а это значит, что неклассическая теория трансфинитных множеств Г. Кантора, вообще говоря, может в одночасье оказаться продуктом «чисто умозрительного» мифотворчества, а не математики (см. ниже).

4. Миф о сложности ДМК-доказательства несчетности континуума.

Возвращаясь к драматическому противостоянию канторианцев и *анти*-канторианцев, формально зафиксированному в Списке-1, трудно поверить, чтобы профессиональная математическая и логическая интуиция противников АБ не имела под собой весьма серьезных и глубоких оснований. Однако, чтобы удостовериться, что интуиция может обманывать даже корифеев, имеется единственный путь – убедиться в непротиворечивости канторовской «трансфинитной математики», если, вопреки Геделю, это окажется возможно. Если же (чем черт не шутит!) будет однажды доказано, что логика «трансфинитной математики» Г. Кантора противоречива, то придется признать, что в данном случае профессиональная интуиция не обманула корифеев, упомянутых (и не упомянутых) в Списке-1 [13]³².

Заметим, что эта канторовская «трансфинитная математика» обладает уникальной особенностью, отличающей ее от всех других наук, а именно, она основана на единственной теореме – теореме о несчетности континуума. Эта Теорема Кантора поистине является акупунктурной точкой всей аксиоматической теории множеств в том прямом смысле, что если эта теорема неверна, то несчетных множеств не существует и все бесконечные множества имеют одинаковую мощность. В таком случае вся «теория» трансфинитных порядковых и кардинальных «чисел», а вместе с ними и всё «Учение о трансфинитном» Г. Кантора лишается всякого смысла, а потому

³⁰ Кантор Г., *Труды по теории множеств*. – М.: Наука, 1985. Zenkin A.A., *As to strict definitions of potential and actual infinities*. – FOM-archive <http://www.cs.nyu.edu/pipermail/fom/2002-December/006072.html> (FOM = Foundations of Mathematics).

³¹ Zenkin A.A., *Априорные логические суждения с нулевой онтологией*. – Сборник «Математика и опыт», изд. МГУ, 2004, ред. проф. А.Г. Барабашев, стр. 423–434. Zenkin A.A. *Infinitum Actu Non Datur*. // Вопросы философии. 2001, №9, стр. 157–169.

³² Zenkin A.A., *Scientific Intuition Of Genii Against Mytho-"Logic" Of Transfinite Cantor's Paradise*. International Symposium – Philosophical Insights into Logic and Mathematics (PILM 2002): The History and Outcome of Alternative Semantics and Syntax, 2002, Nancy, France. Proceedings, pp. 141–148.

«трансфинитный рай» Г. Кантора может быть закрыт без всякого ущерба для реально работающей математики.

В связи с ДМК-доказательством Теоремы Кантора о несчетности континуума имеет место быть очередная

Ложь 5. Сложность ДМК-доказательства даже РАН не по зубам.

Прежде, чем двигаться дальше, разберемся с одним распространенным PR-«ужасником», навязанным АТМ математическому сообществу. Принято считать (благодаря АТМ-зомбированию), что доказательство Теоремы о несчетности континуума является столь сложным, что его тонкости доступны только профессиональным АТМ-интерпретаторам. Большинство «работающих» математиков, логиков и философов, к сожалению, поверили в этот очередной АТМ-миф: даже академики МИРАН им. В.А. Стеклова (за исключением, естественно, сотрудников отдела мат-логики МИРАН) признают свою полную некомпетентность при обсуждении фундаментальной теоремы мета-математических Оснований своей родной науки Математики – Теоремы Кантора о несчетности континуума.

Чтобы прояснить вопиющую ложность этого мифа, сравним эпистемологические «параметры» доказательства Теоремы Кантора и доказательства, например, известной Теоремы Пифагора.

Пифагор доказал свою знаменитую теорему о квадрате гипотенузы прямоугольного треугольника, который равен сумме квадратов его катетов, в далеком VI веке до н.э.

В доказательстве используются *три (!) элементарных понятия* математики (понятие прямоугольного треугольника, понятие подобия треугольников, понятие пропорции) и *выполняются три (!) математические операции*: два умножения и одно сложение *алгебраических* выражений.

Само доказательство (без рисунка) занимает 5 (пять!) строчек.

Теорема Пифагора изучается в средней школе без каких бы то ни было педагогических проблем.

В течение двух с половиной тысячелетий ни одному математику ни разу не приходила в голову идея усомниться в корректности этого доказательства.

Кантор доказал свою знаменитую теорему о несчетности континуума в 1890 г. (первый вариант – в 1873 г.).

В доказательстве используются *три (!) элементарных понятия* математики (понятие натурального числа, понятие действительного числа и понятие бесконечной последовательности занумерованных действительных чисел) и *не выполняется ни одной (!) математической операции*.

Само доказательство занимает 5 (пять!) строчек, написанных на языке *элементарной* логики второй половины XIX века.

С момента публикации и до наших дней корректность этого доказательства вызывает серьезные возражения со стороны выдающихся реально «работающих» математиков, логиков и философов (см. Список-1).

По своим парадигмальным последствиям для философии, логики, математики и психологии познания теорема Кантора не имеет себе равных.

Столь различная эпистемологическая «судьба» столь похожих по формальным критериям (и по «кричащей» *тривиальности* доказательств) указанных теорем объясняется тем, что доказательство теоремы Кантора использует (*неявно*) противоречивое понятие *актуальной* бесконечности.

Известный американский популяризатор математики Смулиан (Smullian) в своем недавнем очередном бестселлере «Сатана, Кантор и Бесконечность» совершенно справедливо выражает свое недоумение по тому поводу, что такой важный и интригующий объект, как Бесконечность, так мало знаком широкой публике: почему Теорему Пифагора уже более двух тысяч лет изучают в средней школе, а «теорему Кантора «изучают» только на математических факультетах университетов? Ведь даже неофит может понять ее ДМК-доказательство!»

Чтобы окончательно развеять АТМ-миф о фантастической сложности ДМК-доказательства Теоремы Кантора о несчетности континуума, рассмотрим это доказательство в его канонизированной АТМ-форме.

5. Теорема Кантора о несчетности континуума

Введем следующие сокращения и обозначения:

ДМК – Диагональный Метод Кантора;

д.ч. – действительное(ные) число(а);

АД-д.ч. – Анти-Диагональное д.ч., которое порождается применением ДМК к любой последовательности д.ч.;

RAA – Reductio ad Absurdum (метод «от противного»).

$X=[0,1]$ – множество всех точек или д.ч. отрезка $[0,1]$,

$N=\{1,2,3,\dots\}$ – множество всех натуральных чисел,

$|Z|$ – мощность (количество элементов) множества Z для любого Z ,

$\neg A$ – логическое отрицание утверждения A для любого A .

Для простоты везде ниже используется *двоичная* система представления д.ч., т.е. по определению, любое д.ч. a из X есть бесконечная последовательность:

$$a = 0. a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots, \text{ где для любого } n: a_n \text{ есть } 0 \text{ или } 1. \quad (\text{ДЧ})$$

Символы, заключенные в фигурные скобки, используются в качестве ссылочных меток на утверждения, стоящие непосредственно за соответствующими скобками.

Как известно, Кантор дал два доказательства несчетности континуума: первое, *прямое*, доказательство он опубликовал в 1874 г., второе доказательство методом RAA – спустя 17 лет, в 1890 г. К анализу первого доказательства мы вернемся несколько позже, а сейчас рассмотрим *традиционное* RAA-доказательство теоремы Кантора, предложенное в 1890 году [3, 10, 11, 13, 26]³³.

ТЕОРЕМА КАНТОРА (1890). $\{A:\}$ Множество X – *несчетно*, т.е. $|X| > |N|$.

RAA-ДОКАЗАТЕЛЬСТВО-1. Допустим, что $\{\neg A:\}$ X – *считно*, т.е. $|X| = |N|$. Тогда *существует* взаимно-однозначное (или 1–1-) соответствие между элементами множеств X и N . Пусть $\{B:\}$

$$x_1, x_2, x_3, \dots \quad (1)$$

– произвольное 1–1-соответствие между элементами множеств X и N или, что то же, некоторый пересчет (список) *всех* д.ч. из X . В таком случае применение знаменитого диагонального метода Кантора к списку (1) порождает *новое* АД-д.ч., скажем, x^* , *отличное от каждого* д.ч. списка (1), т.е. $x^* \notin (1)$.

Следовательно, $\{\neg B:\}$ список (1) содержит *не все* д.ч. из X . Противоречие. Ч.Т.Д.

Приведем логическую схему RAA-Доказательства-1 (здесь: И = Истина, Л = Ложь):

$$A: \neg A \rightarrow [B \rightarrow \neg B] \rightarrow [B = Л] \rightarrow [\neg A = Л] \rightarrow [A = И] \quad (\text{ЛС})$$

Согласно «устоявшемуся» мнению современной мета-математики и аксиоматической теории множеств, логика ДМК – безупречна и «в доказательстве Кантора нет никаких ошибок» [20]³⁴.

Учитывая очевидную *тривиальность* логики этого доказательства, можно только выразить искреннее сочувствие тем профессиональным, большей частью выдающимся, «работающим» математикам, которые искренне считают, что эта «логика» превышает IQ-показатели их математического интеллекта.

И тем не менее, если из записи этого ДМК-доказательства убрать лишние (необязательные для профессионала) пояснительные слова, то мы и получим знаменитые 5 (пять !) строчек, которые вот уже более ста лет «трясут» думающую часть математического сообщества.

ЗАМЕЧАНИЕ. Напомню суть так называемого знаменитого ДМК, чтобы АТМ-непрофессионалы (например, гуманитарии) не подумали, что в этом ДМК «зарыта» такая «высшая математика», понимание которой превышает интеллектуальные возможности нормального человека, или ученика средней школы, или непрофильного академика РАН.

«Диагональю» списка (1) называется бесконечная двоичная последовательность:

³³ Кантор Г., *Труды по теории множеств*. – М.: Наука, 1985. Zenkin A.A. *Ошибка Георга Кантора*. // Вопросы философии. 2000, №2, 165–168. Zenkin A.A. *Infinitum Actu Non Datur*. // Вопросы философии. 2001, №9, стр. 157–169. Zenkin A.A., *Scientific Intuition Of Genii Against Mytho-“Logic” Of Transfinite Cantor’s Paradise*. International Symposium – Philosophical Insights into Logic and Mathematics (PILM 2002): The History and Outcome of Alternative Semantics and Syntax, 2002, Nancy, France. Proceedings, pp. 141–148. Zenkin A.A., «Диагональный метод Кантора: «мухи – отдельно, котлеты – отдельно». – VIII Общероссийская научная конференция «Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке», Секция «Символическая логика». Труды Конференции, изд-во Санкт-Петербургского государственного Университета, 2004. Стр. 487–491.

³⁴ Wilfrid Hodges, *An Editor Recalls Some Hopeless Papers*. – The Bulletin of Symbolic Logic, Vol. 4, No. 1, pp. 1–17, 1998.

$$d = 0. d_1 d_2 d_3 \dots d_n \dots,$$

у которой

первая двоичная цифра d_1 есть первая двоичная цифра x_{11} первого д.ч. x_1 из списка (1),
 вторая двоичная цифра d_2 есть вторая двоичная цифра x_{22} второго д.ч. x_2 из списка (1),
 третья двоичная цифра d_3 есть третья двоичная цифра x_{33} третьего д.ч. x_3 из списка (1),
 и т.д.

В таком случае, вся «математическая» суть знаменитого ДМК «звучит» так:

заменить все нули диагонали d на единицы, а все единицы – на нули.

Или короче:

$$[0 \rightarrow 1] \& [1 \rightarrow 0] \quad (\text{Алг})$$

Истинную семантику ДМК и всей канторовской теории множеств лучше многих современников понял и оценил учитель Кантора по Берлинскому университету, выдающийся математик XIX века и родоначальник математического интуиционизма Леопольд Кронекер: «Я не знаю, чего больше в теории Г. Кантора – философии или теологии (АЗ: см. ниже), но я абсолютно уверен, что в ней нет никакой математики».

6. Мета-математическая логика ДМК с точки зрения теории множеств.

Отметим очень странную (именно с точки зрения эпистемологии) особенность ДМК. – Что значит утверждение « X – *несчетно*» с точки зрения *здоровой* математической интуиции? Это значит, что количество элементов в X не просто больше количества элементов в N , например, на сто, или тысячу, или миллион, или (страшно выговорить) миллиард квадриллионов элементов, а «много-много-много- ... больше», т.е. $|X| \gg \dots |N|$.

Более строго и более формально это *интуитивное* «много-много-много- ... больше» специфицирует филдсовский Лауреат-1966 П. Козн [28]³⁵: «Таким образом, *<мощность континуума>* $|X| = C$ больше, чем $\aleph_0, \aleph_1, \dots, \aleph_n, \dots, \aleph_\omega, \dots, \aleph_\alpha$, где $\alpha = \aleph_\omega$, и т.д. C этой точки зрения, C рассматривается как *непомерно большое* множество». Здесь $\aleph_0$ – наименьшая (счетная) мощность бесконечного множества N .

На интуитивном уровне этот факт порождает естественное *ожидание* того, что в процессе доказательства несчетности континуума нам будет продемонстрировано хотя бы одно подмножество континуума, которое фактически, *в реально воспринимаемой и убедительной форме*, действительно содержит элементов много больше, чем множество натуральных чисел N .

Представим себе такую бытовую сценку: персона А имеет 10 монет, персона Б имеет 1'000'000 монет. Разница, по Козну, достаточно «непомерно большая». Процедура ответа на вопрос, у кого больше монет, выглядит, по Кантору, таким образом: персона А выкладывает на левую чашку весов *все* свои 10 монет и вопросительно сморит на персону Б; персона Б скромно выкладывает на правую чашку весов свои 10 монет и вопросительно смотрит на арбитра. Арбитр уверенно и однозначно фиксирует результат: фифти–фифти, ничья! *Вдруг* персона Б достает, как бы сказал известный поэт, «из широких штанин дубликатом бесценного груза» еще одну монету и аккуратно кладет ее на правую чашку, каковая, согласно известным законам физики, медленно, но верно опускается вниз. Арбитр – в шоке, но мужественно и однозначно резюмирует: победила персона Б! Следовательно, мощность множества монет у персоны Б больше мощности множества монет у персоны А, т.е. $1'000'000 > 10$.

Логика рассуждений арбитра – безупречна, но сам процесс, – особенно применительно к бесконечным множествам, – выглядит не очень убедительно и, как справедливо заподозрил Виттгенштейн, пахнет откровенным мошенничеством [20]³⁶.

Гораздо убедительнее этот процесс сравнения мощностей выглядел бы в том случае, если бы персона Б в момент равновесия чашек выложила не одну дополнительную монетку, а «грохнула», скажем, «мешок аж в 1000 монет». – Не правда ли? – И наглядно, и убедительно, и... Список-1, возможно, был бы существенно короче!

Но Кантор в своем доказательстве *почему-то* (!?) предпочитает именно «скромную» победу «по очкам» с перевесом в одну монетку: его диагональное доказательство количественной несоизмеримости двух *бесконечных* множеств X и N основано на том факте, что

³⁵ Козн Пол Дж., *Теория множеств и континуум-гипотеза*. – М.: МИР, 1969.

³⁶ Wilfrid Hodges, *An Editor Recalls Some Hopeless Papers*. – The Bulletin of Symbolic Logic, Vol. 4, No. 1, pp. 1–17, 1998. **МОИ:** – ??? (Не ошибочно ли указан источник у Зенкина?)

бесконечное множество X *всегда* содержит *один лишний* элемент (канторовское новое АД-д.ч. x^*), для нумерации которого, «как всегда», не хватает *одного* элемента из *бесконечного* множества N , или, *формально*, из того факта, что *бесконечное* множество X имеет на один элемент больше, чем *бесконечное* множество N .

Я думаю, это – именно то место канторовского доказательства, которое всегда вызывало категорическое отторжение (неприятие) со стороны научной интуиции выдающихся математических профессионалов (см. Список-1).

Психологическое обоснование такого отторжения весьма *точно*, хотя, возможно, и не слишком почтительно, обрисовал Витгенштейн [20, 29, 26]³⁷:

«Человек день за днем трудится в поте лица своего – составляет список всех д.ч., и вот, когда список, наконец-то, закончен, появляется фокусник, берет диагональ этого списка и на глазах изумленной публики с помощью таки-довольно «эзотерического» алгоритма (**Алг**) превращает ее в ... анти-диагональ, т.е. в *новое* АД-д.ч., которое не содержится в исходном списке. Такого рода диагональное доказательство Кантора представляет собой занятие для идиотов, которое не имеет никакого отношения к тому, что в классической логике принято называть дедукцией».

Канторианцы, конечно, ужасно возмущаются, когда их «тыкают носом» и говорят, что с точки зрения мета-математической логики канторовское доказательство несчетности континуума X основано на том факте, что X содержит на один элемент больше, чем N : «Но как же так? – хором волнуются и брызжут слюной АТМ-адепты, – Ведь *мы же хорошо знаем*, что применение ДМК к списку (**1**) порождает *бесконечное* множество, скажем, Y_1 *новых* АД-д.ч., которые не принадлежат этому списку (**1**)!». Действительно, тот факт, что множество Y_1 *новых* АД-д.ч. *бесконечно*, хорошо известен не только современным мета-математикам. Однако, ни в одном доказательстве Теоремы Кантора о несчетности континуума этот факт *нигде не используется* [3, 9, 10, 13]³⁸. – Почему? – Ведь утверждение о том, что мощность континуума $X=[0,1]$ больше мощности множества $N=\{1,2,3,\dots\}$ на том основании, что континуум *всегда содержит на один* (канторовское АД-д.ч.) *элемент больше*, чем N , по меньшей мере смехотворно, поскольку любому школьнику известно, что «если два *бесконечных* множества различаются *одним* элементом, то такие множества – *эквивалентны*».

С другой стороны, совершенно очевидно, что именно *бесконечность* множества Y_1 *новых* канторовских АД-д.ч. могла бы явиться весомым (именно с теоретико-множественной точки зрения!) «мешком»-аргументом «аж в 1000 монет» в пользу несчетности континуума!

Исчерпывающий ответ на этот вопрос мы дадим чуть позже, а сейчас рассмотрим наиболее «неудобный» с точки зрения *анти*-канторовской критики ДМК случай, когда применение ДМК к списку (**1**) порождает *бесконечное* множество *новых* АД-д.ч., не принадлежащих этому списку. Подчеркну еще раз, что этот случай *нигде и никогда* не рассматривался ни в канторовской, «наивной», ни в современной, «ненаивной», теории множеств.

Для этого вернемся к *традиционному* доказательству Кантора, в котором на этот раз будем *явно* учитывать тот факт, что Y_1 – *бесконечное* множество (ср. с RAA-Доказательством-1).

RAA-ДОКАЗАТЕЛЬСТВО-2. Допустим, что $\{\neg A:\} X$ – *сечно*, т.е. $|X| = |N|$. Тогда *существует* 1–1-соответствие между элементами множеств X и N . Пусть $\{B:\}$

$$x_1, x_2, x_3, \dots \quad (1)$$

– некоторый список, содержащий *все* д.ч. из X .

Представим X в виде суммы двух слагаемых: $X = X_1 + Y_1$, где X_1 есть множество всех д.ч., реально вошедших в список (**1**), а Y_1 есть дополнение к X_1 в X , т.е. $Y_1 = X - X_1$.

³⁷ Wilfrid Hodges, *An Editor Recalls Some Hopeless Papers*. – The Bulletin of Symbolic Logic, Vol. 4, No. 1, pp. 1–17, 1998. Wittgenstein L., *Remarks on the foundations of mathematics*. – Blackwell, Oxford, 1956. Зенкин А.А., «Диагональный метод Кантора: «мухи – отдельно, комлеты – отдельно». – VIII Общероссийская научная конференция «Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке», Секция «Символическая логика». Труды Конференции, изд-во Санкт-Петербургского государственного Университета, 2004. Стр. 487–491.

³⁸ Кантор Г., *Труды по теории множеств*. – М.: Наука, 1985. Зенкин А.А., *Априорные логические суждения с нулевой онтологией*. – Сборник «Математика и опыт», изд. МГУ, 2004, ред. проф. А.Г. Барабашев, стр. 423–434. Зенкин А.А. *Ошибка Георга Кантора*. // Вопросы философии. 2000, №2, 165–168. Zenkin A.A., *Scientific Intuition Of Genii Against Mytho- "Logic" Of Transfinite Cantor's Paradise*. International Symposium – Philosophical Insights into Logic and Mathematics (PILM 2002): The History and Outcome of Alternative Semantics and Syntax, 2002, Nancy, France. Proceedings, pp. 141–148.

В силу допущения **B** = «список (1) содержит все д.ч. из X », X_1 – *счетно*, а Y_1 – *пусто*.

Применение ДМК к списку (1) порождает *бесконечное* множество *новых* АД-д.ч., не принадлежащих списку (1). Очевидно, что все эти *новые* АД-д.ч. будут принадлежать дополнительному множеству Y_1 . В силу счетности X_1 , это значит, что мощность множества X определяется теперь мощностью дополнения Y_1 . Возможны два случая.

СЛУЧАЙ 1. Y_1 – *счетно*. В таком случае X – *счетно* как сумма двух счетных множеств $X_1 + Y_1$, и, следовательно, допущение $\{\neg A:\}$ « X – *счетно*» – *неопровержимо*.

СЛУЧАЙ 2. Y_1 – *несчетно*. Но сам факт существования несчетных множеств еще не доказан, а потому должно быть доказано следующее утверждение (гипотеза).

ТЕОРЕМА КАНТОРА. $\{A:\}$ Множество Y_1 – *несчетно*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $\{\neg A:\}$ Y_1 – *счетно*, т.е. $|Y_1| = |N|$. Тогда существует 1–1-соответствие между элементами множеств Y_1 и N . Пусть $\{B:\}$

$$x_1, x_2, x_3, \dots \quad (1.1)$$

– некоторый список, содержащий все д.ч. из Y_1 .

Представим Y_1 в виде суммы двух слагаемых: $Y_1 = X_2 + Y_2$, где X_2 есть множество всех д.ч., реально вошедших в список (1.1), а Y_2 есть дополнение к X_2 в Y_1 , т.е. $Y_2 = Y_1 - X_2$.

В силу допущения **B** = «список (1.1) содержит все д.ч. из Y_1 », X_2 – *счетно*, а Y_2 – *пусто*.

Применение ДМК к списку (1.1) порождает *бесконечное* множество *новых* АД-д.ч., не принадлежащих списку (1.1). Очевидно, что все эти *новые* АД-д.ч. будут принадлежать дополнительному множеству Y_2 . В силу счетности X_2 , это значит, что мощность множества Y_1 определяется теперь мощностью дополнения Y_2 . Возможны два случая.

СЛУЧАЙ 1. Y_2 – *счетно*. В таком случае Y_1 – *счетно* как сумма двух счетных множеств $X_2 + Y_2$, и, следовательно, допущение $\{\neg A:\}$ « Y_1 – *счетно*» – *неопровержимо*.

СЛУЧАЙ 2. Y_2 – *несчетно*. Но сам факт существования несчетных множеств еще не доказан, а потому должно быть доказано следующее утверждение (гипотеза).

ТЕОРЕМА КАНТОРА. $\{A:\}$ Множество Y_2 – *несчетно*.

И т.д.

Таким образом, в случае, когда применение ДМК к списку (1) порождает *бесконечное* множество *новых* канторовских АД-д.ч., традиционное РАА-Доказательство-2 теоремы Кантора или не способно опровергнуть РАА-допущение « X – *счетно*», или сводится к *нефинитной* системе «вложенных» доказательств исходной теоремы Кантора $\{A:\}$ « X – *несчетно*» с последовательной заменой исходного символа X на символы $Y_1, Y_2, Y_3, \dots$, т.е. сводится к следующему *нефинитному*, *тавтологическому* и *таки-довольно бессмысленному* «рассуждению» (здесь: D_i = «*требуется доказать, что Y_i – несчетно*»):

$$D_1 \rightarrow D_2 \rightarrow D_3 \rightarrow \dots \quad (2)$$

Очевидно, что пока *потенциально-бесконечное* «рассуждение» (2) не закончено, РАА-допущение « X – *счетно*» канторовского доказательства – *неопровержимо* с точки зрения *классической* логики и теории (*бесконечных*) множеств, и, следовательно, утверждение « X – *несчетно*» – *недоказуемо*.

Таким образом, и в случае 1, и в случае 2 канторовское утверждение « X – *несчетно*» – *недоказуемо*. Следовательно, *доказано* следующее утверждение [9, 10, 13, 26]³⁹.

ТЕОРЕМА 1. В случае, когда применение ДМК к списку (1) порождает *бесконечное* множество *новых* канторовских АД-д.ч., не принадлежащих списку (1), Теорема Кантора о несчетности континуума – *недоказуема* (именно с теоретико-множественной точки зрения).

Очевидно, что если существование несчетных множеств – *недоказуемо*, то «Учение о Трансфинитном» Г. Кантора является откровенной лже-наукой, и потому «трансфинитный рай» Г. Кантора можно закрыть без всякого ущерба для работающей математики.

³⁹ Зенкин А.А., *Априорные логические суждения с нулевой онтологией*. – Сборник «Математика и опыт», изд. МГУ, 2004, ред. проф. А.Г. Барабашев, стр. 423–434. Зенкин А.А. *Ошибка Георга Кантора*. // Вопросы философии. 2000, №2, 165–168. Zenkin A.A., *Scientific Intuition Of Genii Against Mytho-“Logic” Of Transfinite Cantor's Paradise*. International Symposium – Philosophical Insights into Logic and Mathematics (PILM 2002): The History and Outcome of Alternative Semantics and Syntax, 2002, Nancy, France. Proceedings, pp. 141–148. Зенкин А.А., «*Диагональный метод Кантора: «мухи – отдельно, котлеты – отдельно*». – VIII Общероссийская научная конференция «Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке», Секция «Символическая логика». Труды Конференции, изд-во Санкт-Петербургского государственного Университета, 2004. Стр. 487–491.

И куда только смотрит Комиссия РАН по борьбе с лже-наукой!?

7. Об одном фатальном дефекте «безупречной» мета-математической логики ДМК.

Вернемся к традиционному РАА-Доказательству-1 Теоремы Кантора.

Очевидно, что если РАА-Доказательство-1 Теоремы Кантора справедливо при *единственном* АД-д.ч., не входящем в список (1), то оно будет тем более справедливо при *бесконечном* множестве АД-д.ч., не входящих в список (1). А это значит, что из допущения $\{\neg A:\}$ « X – *счетно*» следуют два *контрадикторных* вывода:

(i) $\{C:\}$ утверждение « X – *несчетно*» – *доказуемо* (прямое следствие Теоремы Кантора),

(ii) $\{\neg C:\}$ утверждение « X – *несчетно*» – *недоказуемо* (Теорема 1).

Следует заметить, что оба вывода (i) и (ii), на первый взгляд, представляются безупречными с точки зрения мета-математической логики. Очевидно, однако, что хотя здесь имеет место вывод вида $\neg A \rightarrow C \ \& \ \neg C$, традиционный мета-математический «трюк» («из *лжи* следует всё, что угодно», в том числе и любое противоречие) здесь (и не только здесь!) не проходит потому, что *ложность* допущения $\{\neg A:\}$ « X – *счетно*» – *недоказуема* в силу Теоремы 1. Поэтому один из двух дедуктивных выводов C или $\neg C$ является некорректным (ложным).

Для выяснения вопроса о том, какой же вывод из двух указанных является ложным, рассмотрим более подробно *прямое* доказательство-1873 Теоремы Кантора.

Как справедливо замечает Есенин-Вольпин (см. Примечание переводчика на стр. 127, в [28]⁴⁰), в действительности это доказательство представляет собой очень нетривиальную композицию нескольких (опущенных) утверждений.

Рассмотрим последовательность этих утверждений.

ТЕОРЕМА 2. Никакой пересчет д.ч. из X не содержит всех д.ч. из X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (см. [18]⁴¹). Рассмотрим *произвольный* список *некоторых*, *но не обязательно всех* д.ч. из X :

$$x_1, x_2, x_3, \dots \quad (1)$$

Применение ДМК к списку (1) порождает новое АД-д.ч., не принадлежащее списку (1). Следовательно, список (1) содержит *не все* д.ч. из X . В силу произвольности списка (1), отсюда следует утверждение Теоремы. Ч.Т.Д.

СЛЕДСТВИЕ 1. Не существует 1–1-соответствия между элементами множеств X и N .

Далее используется основное АТМ-определение *неэквивалентности* двух множеств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Если *не существует* 1–1-соответствия между элементами множеств Z_1 и Z_2 , то множества Z_1 и Z_2 , – *неэквивалентны*, т.е. $|Z_1| \neq |Z_2|$, и, следовательно, либо $|Z_1| > |Z_2|$, либо $|Z_1| < |Z_2|$.

Из СЛЕДСТВИЯ 1 и ОПРЕДЕЛЕНИЯ 1 следует

ТЕОРЕМА 3. $|X| \neq |N|$, т.е. либо $|X| > |N|$, либо $|X| < |N|$.

Заметим, что именно утверждение Теоремы 3 является ключевым моментом как прямого доказательства несчетности континуума, полученного Кантором в 1873 г., так и доказательства «от противного», полученного Кантором в 1890 г.

Далее используется следующее тривиально очевидное утверждение.

ТЕОРЕМА 4. $|X| \geq |N|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Счетное множество, например, рациональных чисел Q отрезка $[0,1]$ является собственным подмножеством множества X , т.е. $|Q| = |N|$ и $Q \subset X$. Следовательно, $|X| \geq |Q| = |N|$. Ч.Т.Д.

Из ТЕОРЕМЫ 3 и ТЕОРЕМЫ 4 следует

ТЕОРЕМА КАНТОРА. $|X| > |N|$, т.е. множество X – *несчетно*.

Единственным уязвимым местом в этой безукоризненной (с точки зрения мета-математической логики) цепочке доказательств Теоремы Кантора является... *интуитивно* почти *очевидное* ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Однако, следующее утверждение показывает, что несущество-

⁴⁰ Коэн Пол Дж., *Теория множеств и континуум-гипотеза*. – М.: Мир, 1969.

⁴¹ Клини С. *Введение в метаматематику*. – М.: Мир, 1957.

вание 1–1-соответствия между элементами двух множеств является необходимым, но недостаточным условием их неэквивалентности [9, 11, 26]⁴².

ТЕОРЕМА 5. {A:} Если X эквивалентно N, т.е. $|X| = |N|$, то не существует правила / алгоритма для установления 1–1-соответствия между элементами множеств X и N.

РАА-ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что {¬A:} $|X| = |N|$, но существует правило / алгоритм для установления 1–1-соответствия между элементами множеств X и N.

Это значит, что {B:} существует список,

$$x_1, x_2, x_3, \dots, \quad (1)$$

содержащий *все* д.ч. из X.

Применение ДМК к списку (1) порождает новое АД-д.ч., не принадлежащее списку (1). Следовательно, {¬B:} список (1) содержит *не все* д.ч. из X. Противоречие. Ч.Т.Д.

Это значит, что основное АТМ-ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 *неэквивалентности* двух множеств является некорректным с точки зрения мета-математической логики, и, следовательно, некорректной (точнее – просто, *ошибочной*) является первая альтернатива:

(i) {C:} утверждение «X – несчетно» – *доказуемо*, доказательство которой существенно опирается на это АТМ-ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.

Отсюда следует, что с точки зрения мета-математической логики корректной и легитимной является контраридикторная альтернатива:

(ii) {¬C:} утверждение «X – несчетно» – *недоказуемо* (Теорема 1).

ЗАМЕЧАНИЕ. Применяя к утверждению Теоремы 5 закон контрапозиции, получаем

СЛЕДСТВИЕ 2. Если *существует* 1–1-соответствие между элементами множеств X и N, то эти множества – *неэквивалентны*, т.е. $|X| \neq |N|$.

Очевидно, что Следствие 2 фатально противоречит следующему основному АТМ-определению понятия эквивалентности множеств:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Если *существует* 1–1-соответствие между элементами множеств Z_1 и Z_2 , то эти множества – *эквивалентны*, т.е. $|Z_1| = |Z_2|$.

Очевидно, что без Определения 2 понятия эквивалентности множеств вся «наивная» теория множеств Г. Кантора, равно как и вся «ненаивная» АТМ лишаются всякого научного смысла, а потому «трансфинитный рай» Г. Кантора можно закрыть без всякого ущерба для работающей математики.

И куда только смотрит Комиссия РАН по борьбе с лже-наукой!?

8. Открытие альтернативной версии метода контр-примера.

Рассмотрим классический пример использования в математике *классического* метода контр-примера (далее – **КП**).

В XVIII веке Эйлер сформулировал следующее, весьма правдоподобное, *общее* утверждение.

ГИПОТЕЗА ЭЙЛЕРА. Для любого показателя $r \geq 3$ диофантово уравнение,

$$n^r = n_1^r + n_2^r + n_3^r + \dots + n_s^r, \quad (ГЭ)$$

не имеет решений в натуральных числах, если число слагаемых меньше показателя степени, т.е. $s < r$.

При $s = 2$, $r \geq 3$ Гипотеза Эйлера представляет собой Великую Теорему Ферма. В течение более 200 лет никому не удавалось ни доказать, ни опровергнуть эту Гипотезу Эйлера. Только в 1967 году большая группа американских математиков с помощью мощного компьютера обнаружила ... *один единственный* контр-пример [30]⁴³,

$$144^5 = 27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5, \quad (КП)$$

⁴² Зенкин А.А., *Априорные логические суждения с нулевой онтологией*. – Сборник «Математика и опыт», изд. МГУ, 2004, ред. проф. А.Г. Барабашев, стр. 423–434. Зенкин А.А. *Infinitum Acti Non Datur*. // Вопросы философии. 2001, №9, стр. 157–169. Зенкин А.А., «*Диагональный метод Кантора: «мухи – отдельно, котлеты – отдельно»*». – VIII Общероссийская научная конференция «Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке», Секция «Символическая логика». Труды Конференции, изд-во Санкт-Петербургского государственного Университета, 2004. Стр. 487–491.

⁴³ Lander L.J., Parkin T.R. *A counter example to Euler's sum of power conjecture*. – Math. Comp., 21, 101–103 (1967).

где $r = 5$, $s = 4$, т.е. $s < r$. И этот *единственный* контр-пример навсегда опроверг знаменитую Гипотезу Эйлера.

Таким образом, для того, чтобы опровергнуть *общее* утверждение, достаточно *единственного* контр-примера, и тот факт, что могут существовать и другие контр-примеры, и даже бесконечное множество таких контр-примеров, не играет уже никакой роли.

Заметим, что указанный контр-пример разыскивался с помощью компьютера на множестве *всех четверок* натуральных чисел (n_1, n_2, n_3, n_4) при $r = 5$, т.е. на множестве *всех возможных реализаций* того *общего* утверждения (Гипотезы Эйлера), истинность которого подвергалась сомнению. И до сих пор ни одному работающему математику не приходила в голову бредовая идея *дедуцировать* этот контр-пример напрямую из самой Гипотезы Эйлера (ГЭ).

Вернемся к довольно странной особенности традиционного РАА-Доказательства-1 Теоремы Кантора о несчетности континуума: почему для доказательства несчетности континуума X достаточно *единственного* д.ч. из X , для индексации которого не хватает *единственного* натурального числа из *бесконечного* множества N ?

Следующее довольно неожиданное мета-математическое *открытие* дает исчерпывающий ответ на этот вопрос.

Сравнительный анализ логики канторовского РАА-доказательства и *классического* метода контр-примера, позволил нам впервые обнаружить уникальный (в силу его *абсолютной новизны* и *очевидной тривиальности*) *мета-математический факт*, а именно, что ключевым моментом канторовского доказательства является *явное использование* метода контр-примера. В общем виде этот факт формулируется следующим образом [10, 11, 26]⁴⁴.

ОТКРЫТИЕ-XXI. Знаменитый Диагональный Метод Кантора (в любой его мета-математической реализации) является специальным случаем метода контр-примера, в котором сам контр-пример не отыскивается в множестве всех возможных реализаций данного *общего* утверждения, а алгоритмически *дедуцируется* из того общего утверждения, которое этот контр-пример и призван опровергнуть (в форме *дедуктивного* вывода $[B \rightarrow \neg B]$, здесь B = «список (1) содержит все д.ч. из X »).

Как уже подчеркивалось, для того, чтобы в рамках метода контр-примера опровергнуть *общее* утверждение, достаточно *единственного* контр-примера, и тот факт, что множество таких контр-примеров может быть бесконечным, не играет в таком опровержении никакой роли. Другими словами, опровержение общего утверждения B = «список (1) содержит все д.ч. из X » с помощью данного контр-примера, – канторовского АД-д.ч. $x^* \notin (1)$, – и вопрос о фактическом количестве таких контр-примеров, т.е. вопрос о *мощности множества* Y_1 всех возможных контр-примеров (канторовских АД-д.ч. для списка (1)), являются абсолютно различными и *независимыми* проблемами. Причем (предположительно, несчетная) мощность множества X определяется теперь мощностью именно *бесконечного* множества Y_1 всех канторовских АД-д.ч., порождаемых применением ДМК к данному списку (1) [9, 26]⁴⁵.

Именно это мета-математическое *открытие* и объясняет тот странный (с теоретико-множественной точки зрения) факт, что для доказательства несчетности континуума Кантору, вообще говоря, достаточно *единственного* АД-д.ч., не принадлежащего списку (1).

В Интернете есть такой весьма представительный, высоко профессиональный дискуссионный FOM-сайт по основаниям математики (FOM = Foundations Of Mathematics), «модератором» которого является Martin Davis, а его постоянными участниками – John Conway, Reuben Hersh, Colin McLarty, John McCarthy, Milo Gardner, Gordon Fisher, Harvey Friedman, Robert Solovay, Stewart Shapiro, Solomon Feferman, Jaroslav Peregrin, Vladik Kreinovich, Vladimir Kanovei и множество других ведущих современных мета-математиков, «математических» логиков и специалистов в области аксиоматической теории множеств.

⁴⁴ Зенкин А.А. *Ошибка Георга Кантора*. // Вопросы философии. 2000, №2, 165–168. Зенкин А.А. *Infinitum Actu Non Datur*. // Вопросы философии. 2001, №9, стр. 157–169. Зенкин А.А., «Диагональный метод Кантора: «мухи – отдельно, котлеты – отдельно». – VIII Общероссийская научная конференция «Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке», Секция «Символическая логика». Труды Конференции, изд-во Санкт-Петербургского государственного Университета, 2004. Стр. 487–491.

⁴⁵ Зенкин А.А., *Априорные логические суждения с нулевой онтологией*. – Сборник «Математика и опыт», изд. МГУ, 2004, ред. проф. А.Г. Барабашев, стр. 423–434. Зенкин А.А., «Диагональный метод Кантора: «мухи – отдельно, котлеты – отдельно». – VIII Общероссийская научная конференция «Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке», Секция «Символическая логика». Труды Конференции, изд-во Санкт-Петербургского государственного Университета, 2004. Стр. 487–491.

В прошлом году я послал на этот сайт «открытым текстом» провокационное сообщение о том, что в России (!) сделано сенсационное (!) мета-математическое (!) открытие (!) (см. выше ОТКРЫТИЕ-XXI). Реакция FOM-сайта легко прогнозировалась: «Хм! – Открытие!? Где? – В России!? В какой области? – В мета-математике!? Когда? – В XXI веке!? – Чушь! Спустить на него всех собак, ату его!» – Провокация достигла своей цели: нашлось немало АТМ-профессионалов, которые начали обвинять меня в логической «неадекватности», поскольку метод контр-примера, по их мнению, нельзя использовать в рамках канторовского доказательства «от противного», поскольку ложность допущения « X – *счётно*» канторовского доказательства следует якобы не из существования контр-примера, а из «полученного противоречия» [$B \rightarrow \neg B$] и т.п. – Одним словом, как на рентгене проявился весь липовый профессионализм ряда признанных АТМ-авторитетов именно в области элементарной логики. Эти «специалисты» продолжали бы и до сего дня выражать свое категорическое возмущение по поводу моего мета-математического Открытия-XXI, если бы на них вовремя не «цыкнул» FOM-модератор Martin Davis:

On Monday 01 Mar 2004, Martin Davis wrote [31]⁴⁶:

> Given any one-one correspondence between the natural numbers and a specified set of real numbers, the diagonal method provides a counter-example in precisely Zenkin's sense.

В переводе на русский это звучит так: «Если дано любое 1–1-соответствие между натуральными числами и данным множеством действительных чисел, то диагональный метод порождает контр-пример именно в том смысле, как утверждает Зенкин».

Возникает скандальная ситуация! – Более ста лет выдающиеся (и не очень) профессионалы в области мета-математики, математической логики, аксиоматической теории множеств и прочие бурбакисты каждый год *учат* (правильнее сказать зомбируют) новые поколения студентов, «как правильно доказывать» несчетность континуума с помощью знаменитого диагонального метода Кантора, абсолютно не понимая логической природы этого метода!

Воистину, «патологический казус, от которого, – согласно Брауэру, – грядущие поколения придут в ужас!» – Или, скорее, будут смеяться «от глубины души», но ... «до полного упаду». – Над кем? – Я думаю, что над теми 90% «работающих» математиков, которые на целое столетие «совершенно бескорыстно» уступили свою «королеву всех наук» для явно «нецелевого использования» «левополушарными больными». Ибо смеяться над больными, даже левополушарными – грешно и бессмысленно.

В любом случае, указанный «казус» заставляет усомниться в логической (и, что немало важно, *этической*) правомерности безапелляционного вердикта выдающегося мета-математика современности Wilfrid'a Hodges'a (17300 ссылок в Google!) о том, что «в диагональном доказательстве Кантора нет никаких ошибок» («...there is nothing wrong with Cantor's argument» [20]⁴⁷). – Ведь на W. Hodges'a «равняется» и подрастающее поколение бурбакистов (см., например, [11]⁴⁸).

И куда только смотрит Комиссия РАН по борьбе с лже-наукой!!

9. Д. Гильберт против Г. Кантора: «Изгнание из рая ...».

В истории человечества одно «изгнание из рая» уже состоялось: как описано в Ветхом Завете, искусил хитрый Змий любознательных прародителей наших, Адама и Еву, ослушались они запрета Божия и вкусили яблок с древа познания. И сказал Господь Бог Адаму: «за то, что ты ... ел от дерева <познания>, ... будешь есть хлеб, доколе не возвратишься в землю, из которой ты взят, ибо прах ты и в прах возвратишься».

И изгнал Господь Бог Адама (и возлюбленную супругу его Еву) из сада Едемского, чтобы тот в поте лица своего «возделывал землю, из которой он взят» [32]⁴⁹.

⁴⁶ [FOM] RE: [HM] Cantor's diagonal proof. – <http://www.cs.nyu.edu/pipermail/fom/2004-March/007997.html>.

⁴⁷ Wilfrid Hodges, *An Editor Recalls Some Hopeless Papers*. – The Bulletin of Symbolic Logic, Vol. 4, No. 1, pp. 1–17, 1998.

⁴⁸ Зенкин А.А. *Infinitum Actu Non Datur*. // Вопросы философии. 2001, №9, стр. 157–169.

⁴⁹ Ветхий завет. Первая книга Моисея. Бытие. Глава 3.
<http://212.188.13.168/izdat/Bibliya/Быт/index.htm>.

На сей раз предстоит изгнание из рая, «созданного для нас Георгом Кантором».

Как известно, великий немецкий математик первой половины XX века, Давид Гильберт, выразил свое безразмерное восхищение по поводу «Учения о трансфинитном» Г. Кантора посредством следующего поэтического дифирамба [1]⁵⁰: «Ядром канторовского учения является его *теория трансфинитных чисел*. Эта теория представляется мне наиболее заслуживающим удивления цветком математического духа и вообще одним из высших достижений *чисто умственной* деятельности человека». И при этом довольно неосмотрительно добавил: «*Никто не сможет изгнать нас из рая, который создал для нас Георг Кантор!*»

Как известно, теория множеств Г. Кантора изобилует не отдельным «цветком», а целым букетом самых разнообразных парадоксов. Один из последних и, по-видимому, самый драматический парадокс состоит в том, что около 80 лет тому назад довольно непрезентабельную роль судебного исполнителя и «вышибалы» элитных АТМ-завсегдатаев канторовского трансфинитного рая сыграл... сам Давид Гильберт.

Воистину уникальный в истории математики случай, когда выдающийся адепт, поклонник и апологет становится «могильщиком» объекта своего поклонения!

Как известно, Кантор (а вслед за ним и современная АТМ) постоянно подчеркивал: бесконечное принципиально отличается от конечного, а потому некоторые свойства трансфинитных множеств кажутся «нам» противоречивыми, парадоксальными, а нередко и просто вздорными.

Чтобы сгладить такое гнетущее впечатление от знакомства с трансфинитными объектами Кантора, в 20-х годах прошлого века Давид Гильберт предложил следующий популярный парадокс под именем «Гранд Отель» (далее, для краткости, – **ГО**), который иллюстрирует фундаментальное различие между конечными и бесконечными множествами в канторовской (равно как и в современной аксиоматической) теории множеств [22]⁵¹.

Представьте себе, говорит Гильберт, отель с *конечным* числом, скажем, 665 комнат. Если все 665 комнат уже заняты, то очевидно, что вновь прибывшему, 666-му, гостю придется ночевать на улице. Теперь представьте себе отель с *бесконечным* числом комнат. Пусть все комнаты заняты, и метрдотель может даже предъявить неподкупным «нашим» фискальным органам «амбарную книгу» с бесконечным списком *всех* зарегистрированных постояльцев ГО:

$x_1, x_2, x_3, \dots$ (1)

Здесь уместно сделать следующее, важное для дальнейшего, замечание: очевидно, что в ГО с *бесконечным* числом комнат можно поселить *всех* (!) жителей земли, которые когда-либо жили, живут или будут жить не только на земле, но и во всей вселенной. С точки зрения современной АТМ, это означает, что **{B:}** «список (1) содержит *всех* жителей вселенной».

Пусть теперь прибывает (с учетом сделанного замечания, скорее всего, уже из «параллельного» или «паранормального» мира) новый гость, скажем, *y*. Можно подумать, что и в этом случае вновь прибывшему гостю *y* придется ночевать на улице, поскольку все комнаты ГО уже заняты. Однако, находчивый метрдотель ГО применяет следующий **ГО-алгоритм-1** для предоставления жилплощади неожиданному «пришельцу»: он переселяет постояльца, занимающего комнату 1, в комнату 2, постояльца, занимающего комнату 2, в комнату 3, постояльца, занимающего комнату 3, в комнату 4 и т.д. Таким незамысловатым образом (используя, однако, фундаментальное свойство *бесконечности* списка (1), а именно, эквивалентность множества *N* любому своему *бесконечному* подмножеству) метрдотель освобождает комнату 1, поселяет в эту комнату вновь прибывшего гостя *y* и записывает для отчета в своей «амбарной книге» новый список *всех* постояльцев ГО:

$y_1, x_2, x_3, x_4, \dots$ (1a)

Если из «параллельного» мира прибывает новый гость, скажем, *z*, то применяя тот же ГО-алгоритм-1, метрдотель опять освобождает комнату 1, вселяет в нее вновь прибывшего гостя *z* и составляет новый список *всех* постояльцев:

$z_1, y_2, x_3, x_4, x_5, \dots$ (1b)

Очевидно, что таким же образом метрдотель Гранд Отеля может поселить любое, даже *бесконечное*, количество новых пришельцев из «параллельного» мира. – И при этом у метрдотеля

⁵⁰ Гильберт Д., *Основания Геометрии*. – М-Л: ОГИЗ, 1948.

⁵¹ [Wikipedia] *Hilbert's paradox of the Grand Hotel*. –

http://www.wikipedia.org/wiki/Hilbert's_paradox_of_the_Grand_Hotel.

не возникает никаких проблем типа неразрешимых противоречий и парадоксов логики и математики.

Усложним задачу: пусть теперь гости из «параллельного» мира прибывают не пешком и не по одиночке, а целым транс-галактическим «туристическим автобусом» с *бесконечным* числом пассажиров. Обозначим это множество вновь прибывающих гостей через Y , а элементы этого множества – через y_1, y_2, y_3 , и т.д.

В этом случае для расселения бесконечного количества новых клиентов из «параллельного» мира хитроумный метрдотель ГО применяет **ГО-алгоритм-2**: он переселяет жильца, занимающего комнату 1, в комнату 2, занимающего комнату 2 – в комнату 4, занимающего комнату 3 – в комнату 6 и т.д.. В результате этой операции все комнаты с нечетными номерами освобождаются для бесконечного множества Y новых гостей-пришельцев, и метрдотель ГО «с чувством глубокого удовлетворения» записывает для отчета в своей «амбарной книге» новый список *всех* постояльцев ГО (используя при этом знаменитый канторовский алгоритм «*трансмутации*» двух счетно-бесконечных последовательностей в одну, – прием, хорошо знакомый шулерам и профессиональным картежникам, виртуозно «впрыскивающим» одну колоду карт в другую):

$$y_1, x_1, y_2, x_2, y_3, x_3, \dots \quad (1c)$$

Пере-индексируя элементы *счетного* списка (1c) с помощью натуральных чисел $\{1, 2, 3, \dots\}$ и заменяя символы y на символы x , мы *формально* «трансформируем» список (1c) в *исходный* список (1).

Очевидно, что с помощью ГО-алгоритма-2 метрдотель Гранд Отеля может теперь обслужить любое, даже *бесконечное*, количество транс-галактических «туристических автобусов» с *бесконечным* числом пришельцев в каждом «автобусе» из «параллельного» мира.

Профессиональную деятельность метрдотеля Гранд Отеля можно описать следующим образом: обозначим через **V** состояние Гранд Отеля в тот момент, когда нет новых гостей, т.е. **V** = «ВСЕ гости расквартированы в ГО». Тогда в момент, когда прибывают новые гости, Гранд Отель «переходит» в состоянии $\neg V$ = «НЕ ВСЕ гости расквартированы в ГО». Очевидно, что деятельность метрдотеля в целом будет выражаться следующим *бесконечным* «рассуждением»:

$$V \rightarrow \neg V \rightarrow V \rightarrow \neg V \rightarrow V \rightarrow \neg V \rightarrow V \rightarrow \dots, \quad (II)$$

где фрагмент « $V \rightarrow \neg V$ » читается как «если **V**, то НЕ-**V**», а фрагмент « $\neg V \rightarrow V$ » читается как «если НЕ-**V**, то **V**».

Очевидно, что до тех пор, пока этот *потенциально-бесконечный* процесс не закончится, нет никаких (логических или математических) оснований утверждать, что для какого-то нового гостя не найдется свободной комнаты в ГО и ему придется ночевать на улице, т.е. никогда не наступит такой момент, когда метрдотель будет вынужден с прискорбием признать, что мощность *бесконечного* множества *всех* гостей (как уже расквартированных в ГО, так и вновь прибывающих) больше мощности *бесконечного* множества *всех* комнат в ГО.

По свидетельству современников, Д. Гильберт любил начинать чтение своего курса лекций по мета-математике для первокурсников Берлинского Университета именно с этого парадокса, потому что, во-первых, с точки зрения математики, никакого неразрешимого парадокса здесь нет – просто метрдотель умело использует фундаментальные свойства бесконечных множеств, а, во-вторых, он очень наглядно демонстрирует *основное* свойство таких множеств: если к бесконечному множеству прибавить конечное или счетно-бесконечное множество, то мощность первого множества не изменится.

Таким образом, основная идея парадокса ГО состоит не в том, чтобы получить какое-то противоречие, а в том, чтобы без всяких противоречий «расселить» всех (вновь прибывающих) гостей в ГО.

Нетрудно показать, что ДМК-доказательство несчетности континуума является дедуктивной моделью (в смысле Тарского) парадокса ГО Д. Гильберта. Для этого достаточно заменить термины «ГО», «постоялец», «список всех постояльцев», «вновь прибывший гость», «внести гостя в амбарную книгу (1)» и т.д. заменить на термины «**RAA**-Доказательство», «д.ч. из X », «список (1) всех д.ч. из X », «АД-д.ч.», «при-конкатенировать (т.е. приписать) новое АД-д.ч. к списку (1)» и т.д., и парадокс ГО превращается в доказательство Теоремы Кантора.

Действительно, рассмотрим традиционное РАА-Доказательство-1 теоремы Кантора о *несчетности* континуума, с учетом ГО-алгоритма-2 и того факта, что применение ДМК к списку (1) порождает *бесконечное* множество новых канторовских АД-д.ч. [26]⁵².

РАА-ДОКАЗАТЕЛЬСТВО-3. Допустим, что $\{\neg A:\}$ «X – *счетно*». Тогда в «амбарной книге» АТМ $\{B:\}$ существует список (1), содержащий *все* д.ч. из X. Применяя к этому списку (1) свой знаменитый диагональный метод, Кантор порождает бесконечное множество, скажем, Y_1 *новых* АД-д.ч. («пришельцев» из параллельного мира), которые не принадлежат списку (1).

Возможны два совершенно *равноправных* продолжения этого доказательства.

ПРОДОЛЖЕНИЕ 1 (канторовское). Следовательно, $\{\neg B:\}$ список (1) содержит *не все* д.ч. из X. Получили противоречие $[B \rightarrow \neg B]$, из которого, согласно «математической» логике современной мета-математики, «следует», что допущение «X – *счетно*» – ложно, а потому утверждение «X – *несчетно*» доказано.

ПРОДОЛЖЕНИЕ 2 (не-канторовское).

К сожалению, Кантор не был знаком с парадоксом ГО Давида Гильберта, а потому не имел возможности догадаться о том, что с помощью ГО-алгоритма-2 можно «поселить» *без всяких противоречий* *счетно-бесконечное* множество Y_1 «вновь прибывших» из «паранормального» мира *новых* АД-д.ч. в *счетно-бесконечный* список (1), и создать новый *счетный* список (1c), содержащий как все д.ч. из списка (1), так и все д.ч. из множества Y_1 .

Пере-индексируя элементы *счетного* списка (1c) с помощью натуральных чисел $\{1, 2, 3, \dots\}$ и заменяя символы y на символы x, мы «трансформируем» список (1c) в *исходный* список (1), содержащий все д.ч. из X.

Следует заметить, что список (1c) конечно же не является тождественным списку (1), поскольку первый содержит «на бесконечное множество элементов больше», чем второй. Однако, оба списка являются *эквивалентными* не только по мощности, но и по формальной *эффективности* применения ДМК, т.е. с точки зрения алгоритмической: в обоих случаях применение ДМК порождает новое бесконечное множество АД-д.ч., не принадлежащих соответствующему списку. И это свойство ДМК не зависит от конкретного «качественного состава» списка, к которому он применяется.

Должен заметить, что после непростой «разъяснительной работы» на ФОМ-сайте, (в общем-то, очевидная для любого первокурсника) легитимность указанных операций «трансмутации» двух списков д.ч. в один список (1c), переиндексации и переобозначения (символов y в символы x) элементов списка (1c) была признана даже выдающимся мета-математиком современности W. Hodges'ом, правда пока – в частной переписке.

Повторные применения ДМК к списку (1) порождают уже знакомую нам «сказку про белого бычка», т.е. бесконечное «рассуждение» (II) метрдогателя «Гранд Отеля», где $B =$ «список (1) содержит *все* д.ч. из X».

Очевидно, что до тех пор, пока *потенциально-бесконечный* процесс (II) не закончится, нет никаких (логических или математических) оснований утверждать, что допущение «X – *счетно*» является ложным. Следовательно, в том случае, если множество Y_1 является *счетно-бесконечным*, утверждение Теоремы Кантора «X – *несчетно*» – *недоказуемо*.

Даже если Кантор, как обычно, объявит этот *потенциально-бесконечный* процесс (II) *актуально-бесконечным*, никто и никогда не узнает, является ли истинным утверждение B или $\neg B$, т.к., согласно Аристотелю (кстати, и современной математике тоже), любой бесконечный процесс не имеет последнего элемента (см. Теорему-А).

Случай 2, когда множество Y_1 (предположительно!) является *несчетным*, был рассмотрен ранее в процессе РАА-Доказательства-2 Теоремы 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Строго говоря, и в РАА-ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ-3 из допущения «X – *счетно*» опять следуют два *контрадикторных*, но совершенно равноправных вывода:

ПРОДОЛЖЕНИЕ 1. $\{C:\}$ утверждение «X – *счетно*» – *ложно*,

ПРОДОЛЖЕНИЕ 2. $\{\neg C:\}$ утверждение «X – *счетно*» – *неопровержимо*.

⁵² Зенкин А.А., «Диагональный метод Кантора: «мухи – отдельно, котлеты – отдельно». – VIII Общероссийская научная конференция «Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке», Секция «Символическая логика». Труды Конференции, изд-во Санкт-Петербургского государственного Университета, 2004. Стр. 487–491.

Эта ситуация уже была рассмотрена выше, где было показано, что вывод, основанный на ПРОДОЛЖЕНИИ 1, противоречит классической логике.

Таким образом, доказано, что Теорема Кантора о несчетности континуума – недоказуема. Это значит, что различение бесконечностей по количеству элементов является мифотворчеством. Но если несчетность континуума недоказуема, то теория трансфинитных множеств Г. Кантора является не просто «наивной», а откровенной лже-наукой, и потому трансфинитный «рай» Г. Кантора может быть закрыт без всякого ущерба для реально «работающей» математики.

И куда только смотрит Комиссия РАН по борьбе с лже-наукой!!?

ЗАМЕЧАНИЕ 2. *Актуальная бесконечность* списка (1) является необходимым условием ДМК-доказательства несчетности континуума. Как было показано выше, это доказательство в действительности представляет собой *потенциально-бесконечное* «рассуждение» (II), где **В** = «список (1) содержит все д.ч. из X». Причем на каждом шаге **¬В** этого процесса, т.е. при построении *нового* АД-д.ч. x^* , не принадлежащего списку (1), явно используется *актуальность* бесконечного списка (1); а на *следующем* шаге **В** этого процесса, т.е. при построении нового списка, содержащего все д.ч. из X, включая новое д.ч. x^* , явно используется *бесконечность* списка (1). Другими словами, из *актуальности* пересчета (1) Кантор дедуцирует **¬В**, а из его *бесконечности* дедуцируется **В**. Это доказывает, что «актуальное» и «бесконечное» в рамках канторовского доказательства Теоремы о несчетности континуума являются (логически и алгоритмически) *контрадикторными* понятиями, и, следовательно, понятия «актуальное» и «конечное» являются алгоритмически *тождественными*. Таким образом, *впервые доказано* великое интуитивное провидение (и предостережение !) Аристотеля, Евклида, Лейбница, и многих других (см. Список-1) выдающихся логиков, математиков и философов о том, что «актуальная бесконечность» является *внутренне противоречивым* понятием (нечто вроде «оконечной (Кантором) бесконечности») и потому его использование в математике – недопустимо.

Здесь уместно вспомнить пророческие слова Френкеля и Бар-Хиллела о ненадежности ограждения канторовского рая с помощью АТМ, поскольку именно противоречивое понятие АБ и является той «парадоксальной тварью», которая успела «засесть внутри АТМ» [6]⁵³.

Но если понятие АБ является внутренне противоречивым, то трансфинитный «рай» Г. Кантора, основанный на использовании концепции АБ, может быть закрыт без всякого ущерба для реально «работающей» математики.

И куда только смотрит Комиссия РАН по борьбе с лже-наукой!!?

10. «Критяне всегда лжецы...» или библейский сюжет на пороге Апокалипсиса.

Как известно, в самом начале Библии (Ветхий Завет, Гл. 11)⁵⁴ описана знаменитая «стройка века» – возведение Вавилонской Башни-1. Еще не успев просохнуть от Всемирного Потопа, сыны человеческие сказали: «построим себе город и башню, высотой до небес, и сделаем себе имя, прежде нежели рассеемся по лицу всей земли». – Основной мотивацией этого явно несвоевременного общественного «энтузиазма» была амбициозная претензия, единовременно охватившая весь народ, «сделать себе имя!» – Прямо-таки какой-то психопатологический «пир во время чумы»!

«И сказал Господь: вот, один народ, и один у всех язык; и вот что начали они делать, и не отстанут они от того, что задумали делать; сойдем же и смешаем там язык их, так чтобы один не понимал речи другого». И перестали они понимать друг друга, и перестали они строить город Вавилон и Вавилонскую Башню-1; и рассеял их Господь оттуда по всей земле. И начали они возделывать землю и добывать себе в поте лица своего хлеб свой насущный.

История, несомненно, интригующая, но довольно «трансцендентная»: с какой целью библейские «летописцы» сочли необходимым рассказать о ней, причем, в самом начале Библии? – Не очень понятно, ведь никаких явных, поучительных моральных и богоугодных выводов из этой истории не делается, а само имя Вавилон, если я не ошибаюсь,⁵⁵ нигде далее (вплоть до «Вавилонской блудницы» Апокалипсиса) ни разу не упоминается?

⁵³ А.А. Френкель, И. Бар-Хиллел, *Основания теории множеств*. – М.: «Мир».

⁵⁴ **МОИ:** БЫТИЕ, гл.11, 1–9.

⁵⁵ **МОИ:** Ошибается, и весьма сильно. Вавилон очень много раз упоминается в Четвертой книге царств (17:24 и далее), потом в Первой книге Паралипоменон (9:1 и др.), далее в Книге Ездры (1:11 и

Я не знаю, какой эзотерический смысл находят в этой истории ученые богословы, но на мой взгляд, эта история имеет следующее, довольно неожиданное продолжение.

Всеведущий Господь Бог знал, естественно, *заранее*, что спустя 2000 лет амбициозная гордыня вновь овладеет людьми и они примутся возводить новую «Вавилонскую Башню-2, высотой до небес». Дабы пресечь это кошунственное мероприятие в корне, Господь оставил эзотерическое предостережение, довольно прозрачно закодированное в *последних* главах Нового Завета (перед самым «откровением Иоанна Богослова», т.е. перед самым «Апокалипсисом», что тоже символично само-по-себе, ибо «дальше наступать некуда – впереди...! »).

Действительно, в самом конце Библии приведено Послание к Титу Святого Апостола Павла [33]⁵⁶.

В этом послании «Павел, раб Божий, Апостол же Иисуса Христа» обращается к «Титу, истинному сыну по общей вере», которого Павел «оставил на Крите» для укрепления «властной вертикали», с наставлением о том, как правильно поставить пресвитеров и епископов <А3: на современном языке – губернаторов!> по всем критским городам:

«Епископ должен быть непорочен, как Божий домостроитель, не дерзок, не гневлив, не пьяница, не бийца, не корыстолюбец, но страннолюбив, любящий добро, целомудрен, справедлив, благочестив, воздержан, держащийся истинного слова, согласного с учением, чтобы он был силен и наставлять в здравом учении и противящихся обличать <А3: Прямо-таки «моральный кодекс» современного губернатора – строителя очередного «светлого будущего»!>».

Ибо есть много и непокорных, пустословов и обманщиков, ...каковым должно заграждать уста: они развращают целые дома, уча, чему не должно, из постыдной корысти.

Из них же самих один стихотворец сказал: «Критяне всегда лжецы, злые звери, утробы ленивые».

Свидетельство это справедливо. По сей причине обличай их строго, дабы они были здравы в вере, не вникая Иудейским басням и постановлениям людей, отвращающихся от истины. Для чистых всё чисто; а для оскверненных и неверных нет ничего чистого, но осквернены и ум их и совесть. Они говорят, что знают Бога, а делами отрекаются, будучи гнусны и непокорны и не способны ни к какому добродетельному делу»⁵⁷.

Казалось бы, Святой Апостол Павел достаточно полно очертил круг лиц, каковым пресвитеры и епископы должны «заграждать уста»: непокорным, пустословам и обманщикам, которые «развращают целые дома, уча, чему не должно, из постыдной корысти» (ср. с современной бурбакизацией математики и математического образования в интерпретации Арнольда). Зачем же Павлу понадобилось персонифицировать одно из этих лиц в форме утверждения: «Из них же самих один стихотворец сказал: «Критяне всегда лжецы...»? Опустив Павел это выражение, содержательная часть его послания к Титу от этого ничего не потеряла бы. Однако, для логики, для оснований математики, для философии и психологии познания, а, возможно, и для интеллектуального прогресса всего рода человеческого в последующие 2000 лет отсутствие именно этой, одной-единственной фразы явилось бы невосполнимой потерей, потому что в несколько «причесанной» форме эта фраза звучит так: «один критянин сказал, что все критяне – лжецы», а это есть не что иное, как один из вариантов знаменитого парадокса «Лжец», открытие которого приписывается древнему греку Эпимениду, жившему в VI веке до нашей эры.

далее), потом в Книге Неемии (7:6 и 13:6), далее в Книге Есфири (1:1 и 2:6), в Псалтыре (86:4 и 136:1,8), в Книге пророка Исаии (13:1 и далее), в Книге пророка Иеремии (20:4 и далее), в Книге пророка Иезекииля (12:13 и др.), в Книге пророка Даниила (1:1 и далее), в Книге пророка Михея (4:10), в Книге пророка Захарии (2:7 и 6:10), а также в неканонических Второй книге Ездры (1:40 и далее), в Третьей книге Ездры (3:1 и др.), в Книге пророка Варуха (1:1 и далее), в Послании Еремии (1:1 и далее), в Первой книге Маккавейской (6:4), во Второй книге Маккавейской (8:20) и в Третьей книге Маккавейской (6:5). В Новом Завете Вавилон упоминается в Евангелие от Матфея (1:11 и далее), в Деяниях апостолов (7:43), в Первом соборном послании Петра (5:13), в Откровении Иоанна Богослова (14:8 и др., в т.ч. 17:4, где и впервые у Иоанна Вавилон назван: «мать блудницам и мерзостям земным»). (Как же было не упоминать Вавилон, если имел место знаменитый «Вавилонский плен»?)

⁵⁶ Новый завет. Откровение святого апостола Иоанна Богослова. Глава 1.

<http://212.188.13.168/izdat/Bibliya/Orkp/index.htm>.

⁵⁷ **МОИ:** Послание к Титу 1:7–16. В Библии это называется Посланием Павла, но писал это анонимный псевдо-Павел.

Некто утверждает «Я – лжец». – Лжец ли он? Если он лжец, то он лжет, утверждая, что он лжец; следовательно, он не лжец. Но если он не лжец, то он говорит правду, утверждая, что он лжец; следовательно, он лжец, или, короче (здесь $A = \text{«Я – лжец»}$):

$$[A \rightarrow \neg A] \text{ и } [\neg A \rightarrow A] \quad (\Pi 1)$$

Зачем же Библейский Летописец намеренно вставил... парадокс «Лжеца» в послание Апостола Павла? – Для ответа на этот вопрос проясним одно досадное мета-математическое заблуждение. Один из ведущих мета-математиков XX века Клини так трактует парадокс «Лжеца»: если A есть истина, то A есть ложь и, если A есть ложь, то A есть истина, а потому A не может быть ни истиной, ни ложью [18]⁵⁸.

В нашей работе [8]⁵⁹ впервые сформулированы необходимые и достаточные условия феномена парадоксальности и с помощью «физического» моделирования парадокса «Лжец» на аналоговой вычислительной машине доказано, что этот парадокс имеет не конечную форму ($\Pi 1$), обусловленную фактором чисто психологического «торможения» ментальных процессов в состоянии интеллектуального шока перед лицом непостижимой противоречивой эзотерики «Лжеца», а следующую *бесконечную* форму

$$A \rightarrow \neg A \rightarrow A \rightarrow \neg A \rightarrow A \rightarrow \neg A \rightarrow A \rightarrow \dots \quad (\Pi 2)$$

и не существует логических и математических причин, поводов или оснований для завершения этого *потенциально-бесконечного* процесса. Следует подчеркнуть, что именно бесконечная форма ($\Pi 2$) реализует необходимые и *достаточные* условия (в строгом логическом и математическом смысле) самого феномена парадоксальности. В таком случае истинная «семантика» этого парадокса состоит вовсе не в том, что высказывание «Я – лжец» «не может быть ни истинным, ни ложным» [18]⁶⁰, а в том, что это высказывание, напротив, является одновременно *и истинным, и ложным* «в одно и то же время, в одном и том же месте и в одном и том же отношении». Другими словами, в парадоксе «Лжец» в форме ($\Pi 2$) смешаны-перемешаны истина и ложь, а это значит, что истина и ложь становятся неразличимыми.

А теперь сравним каноническую бесконечную форму ($\Pi 2$) парадокса «Лжец» с канонической бесконечной формой (Π) канторовского «диагонального» доказательства теоремы о несчетности континуума, которая, по замыслу Кантора, должна была служить надежным основанием для его трансфинитной «лестницы на небо» или новой Вавилонской Башни-2 *высотой до небес*. Как известно, строительством этой Вавилонской Башни-2 в течение всего XX века усердно занимался весь АТМ-«народ». И занимается до сих пор. На немалые деньги ничего не подозревающих налогоплательщиков.

Как подчеркивают ведущие исследователи научного наследия Кантора, сам Кантор понимал свою профессиональную деятельность как выполнение определенной религиозной миссии – донести до человечества истину о трансфинитных числах, содержащихся в уме Бога. Шкала трансфинитных чисел оказывается, в этом смысле, своеобразной «лестницей на Небо», ведущей к самому Богу, и, действительно, очень напоминает новую Вавилонскую Башню-2, возводимую уже, в отличие от известной Вавилонской Башни-1, не из «обожженной глины», а из «глины» чисто умозрительной. Причем, как сказано выше, на немалые деньги ничего не подозревающих налогоплательщиков.

Сам Кантор подчеркивал, что, по его мнению, «философское ($A3$: точнее, теологическое) значение его теории множеств выше ее математического значения», поскольку «постижение трансфинитной бесконечности есть постижение Божественной бесконечности, т.е. оно есть познание Бога, приближение к нему, вхождение в Божественный Разум» [34, 35, 36]⁶¹.

Претензия – не мелочная! – Аж дух захватывает. Однако, трудно за такого рода «строительством» узреть что-либо, кроме уже знакомого намерения первобытных сынов человеческих «сделать себе имя, прежде чем...». Глобальный и вневременной характер и априорная бессмысленность подобного намерения делает его достойным объектом для самого серьезного психо-патологического исследования.

⁵⁸ Клини С. Введение в метаматерику. – М.: Мир, 1957.

⁵⁹ Зенкин А.А. Новый подход к анализу проблемы парадоксов. – Вопросы философии. 2000, №10, 79–90.

⁶⁰ Клини С. Введение в метаматерику. – М.: Мир, 1957.

⁶¹ Пурперт В., Ильгаудс Х.И., Георг Кантор. – Харьков: «Основа», 1991. Катасонов В.Н., Боровицкий с бесконечностью: философские и религиозные аспекты теории множеств Г. Кантора. – М.: Мартис, 1999. Dauben, J.W. Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1990. <http://www.amazon.com/exec/obidos/ASIN/0691024472/ericstreasuretoA/>.

Впрочем, на теологическую несостоятельность канторовской претензии построить трансфинитную «лестницу на небо» указывали светила богословской науки XIX века. Так, например, папский Кардинал Францелин (Francelin), с которым Кантор состоял в недолгой переписке (1885 г.), прямо указал Кантору на «ошибку пантеизма» в его статье «О различных точках зрения на актуально бесконечное» и вежливо попросил Кантора прекратить переписку по вопросам богословских аспектов его теории трансфинитных множеств. Таким образом, в знаменитой теории трансфинитных множеств Г. Кантора, которая, по мнению современных *бурбакистов*, «изменила лицо всей математики XX века», нет не только никакой математики, но даже и столь вожделенная теологическая претензия *конечного* человека на «постижение Божественной бесконечности, на познание Бога, на вхождение в Божественный Разум» оказалась несостоятельной [35, 36]⁶².

Я полагаю, что теперь даже самый неисправимый атеист согласится с тем, что Господь Бог вовсе не случайно «вставил» в послание Апостола Павла парадокс «Лжеца»! Это не просто логическая шарада, которую человечество не может разгадать в течение 2600 лет, это грозное предостережение на будущее.

Всеведущий Господь Бог, повторюсь, предвидел, что значительную часть «народа» с высшим мета-математическим образованием, пораженную синдромом приобретенного иммунодефицита мозга или, короче, инфицированную ментальным СПИДОМ (бурбакизмом), вновь обуюет амбициозное стремление построить «Башню до неба». Дабы предостеречь просвещенное человечество-XXI от такого опрометчивого шага, Господь и явил свое предостережение в форме «Лжеца»: в первый раз, когда «человеки» еще не имели высшего мета-математического образования, Господь справедливо решил, что будет достаточно смешать языки, чтобы надомнить их (человеков) заняться более полезными делами на «земле, из которой они вышли». Предвидя, однако, что человеки с высшим мета-математическим образованием могут вновь не по назначению воспользоваться дарованным им разумом и «свободой воли», Господь оставил им свое предостережение в форме «Лжеца», в котором заранее смешал истину и ложь, дабы... человеки с высшим мета-математическим образованием прекратили строительство Башни-2 и занялись более полезными земными делами.

«И сказал Господь: вот, один народ, и один у всех <формальный> язык <скажем, LISP в духе Грегори Чейтина>; и вот что начали они делать, и не отстанут они от того, что задумали делать; сойдем же и смешаем Истину и Ложь, так чтобы один <с точностью до наоборот> понимал <намерения> другого».

И рассеял бы (!) их Господь оттуда по всей земле; и они перестали бы (!) строить город Вавилон и Вавилонскую Башню-2. Но на этот раз всё оказалось не так просто. Даже для Господа Бога.

Дело в том, что бурбакизм – инфекционное заболевание, а потому «левополушарные больные», «уча, чему не должно, из постыдной корысти» [33]⁶³, зомбируя и превращая в формальные машины (заведомо неслабоумных) студентов [14]⁶⁴, и сами становятся жертвами своей профессиональной жизнедеятельности [11, 17]⁶⁵. А потому было бы непростительной наивностью ожидать от само-зомбированных АТМ-профессионалов адекватной реакции на знамение божие в форме «Лжеца».

В этой связи отнюдь не случайно Господь Бог ниспослал на Президента РАН Ю.С. Осипова свою благодать и надомнил его «основать» Комиссию РАН для борьбы с лже-наукой, которая (эта Комиссия), по мысли Господа, и должна «заградить уста непокорным, пустословам и обманщикам, которые развращают целые дома, уча, чему не должно, из постыдной корысти».

⁶² Катасонов В.Н., *Боровившийся с бесконечностью: философские и религиозные аспекты теории множеств Г. Кантора*. – М.: Мартис, 1999. Dauben, J.W. *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1990. <http://www.amazon.com/exec/obidos/ASIN/0691024472/ericstreasuretroA/>.

⁶³ Новый завет. Откровение святого апостола Иоанна Богослова. Глава 1. <http://212.188.13.168/izdat/Bibliya/Otkp/index.htm>.

⁶⁴ *An Interview with Vladimir Igorevich Arnol'd* by S.H. Lui. – Notices of the AMS, v.44, No. 4, 432–438 (1997).

⁶⁵ Зенкин А.А. *Infinitum Actu Non Datur*. // Вопросы философии. 2001, № 9, стр. 157–169. Зенкин А.А., «Научная контр-революция в математике». – Независимая газета от 19 Июля, 2000 г. Приложение «НГ-НАУКА», стр. 13.

А для этого прежде всего Комиссия должна реализовать императивные мета-математические интенции, содержащиеся в парадоксе «Гранд Отель» Д. Гильберта и в обращении Святого Апостола Павла к Титу, и официально закрыть «трансфинитный рай» Г. Кантора – главную опорную базу мета-математического терроризма-бурбакизма.

Однако, при этом министру образования и науки А. Фурсенко не следует торопиться с закрытием *всех* кафедр так называемой «математической логики» во всех университетах РФ, ибо в противном случае будет трудно найти желающих отделить «зерна от плевел» в тех развалах мета-математической «мудрости», которые за столетие накопились в «трансфинитном раю» Г. Кантора.

--- О ---

Если истина и ложь становятся неразличимыми, то неразличимыми становятся и понятия добра и зла.

Что дальше? За смешением понятий истины и лжи в математике – «Королеве всех наук» и понятий добра и зла в сфере (а)морально-социально-политической, основанной, естественно, на последних достижениях современной академической науки, следует, как и сказано в Библии, только Апокалипсис.

«Блажен читающий и слушающие слова пророчества сего и соблюдающие написанное в нем; ибо время близко ... Се, грядущее скоро, и возмездие Мое со Мною, чтобы воздать каждому по делам его».

Как говорится, «Имеющий уши, да услышит, имеющий очи, да узреет, имеющий в душе своей отблеск Его Бесконечной Мудрости, да поймет...»

ЗАМЕЧАНИЕ. МИНЗДРАВ ПРЕДУПРЕЖДАЕТ: людям, не обладающим чувством *здорового юмора* читать вышеизложенное – противопоказано.

12. Литература

1. Гильберт Д., *Основания Геометрии*. – М-Л: ОГИЗ, 1948.
2. Aristotle, *Physics*, Book III (translated by R.P. Hardie and R.K. Gaye). – <http://classics.mit.edu/Aristotle/physics.html>.
3. Кантор Г., *Труды по теории множеств*. – М.: Наука, 1985.
4. Ф.А. Медведев, *Французская школа теории функций и множеств на рубеже XIX–XX вв.* – М.: «Наука», 1976.
5. А. Пуанкаре, *О науке*. – М.: Наука, 1983.
6. А.А. Френкель, И. Бар-Хиллел, *Основания теории множеств*. – М.: «Мир».
7. Н. Бурбаки, *Теория множеств*. – Москва: МИР, 1965.
8. Зенкин А.А. *Новый подход к анализу проблемы парадоксов*. – Вопросы философии. 2000, №10, 79–90.
9. Зенкин А.А., *Априорные логические суждения с нулевой онтологией*. – Сборник «Математика и опыт», изд. МГУ, 2004, ред. проф. А.Г. Барабашев, стр. 423–434.
10. Зенкин А.А. *Ошибка Георга Кантора*. // Вопросы философии. 2000, №2, 165–168.
11. Зенкин А.А. *Infinitum Acti Non Datur*. // Вопросы философии. 2001, №9, стр. 157–169.
12. Zenkin A.A., *As to strict definitions of potential and actual infinities*. – FOM-archive <http://www.cs.nyu.edu/pipermail/fom/2002-December/006072.html> (FOM = Foundations of Mathematics).
13. Zenkin A.A., *Scientific Intuition Of Genii Against Mytho- "Logic" Of Transfinite Cantor's Paradise*. International Symposium – Philosophical Insights into Logic and Mathematics (PILM 2002): The History and Outcome of Alternative Semantics and Syntax, 2002, Nancy, France. Proceedings, pp. 141–148.
14. *An Interview with Vladimir Igorevich Arnol'd* by S.H. Lui. – Notices of the AMS, v.44, No. 4, 432–438 (1997).
15. Arnold V.I., *«International Mathematical Congress in Berlin»*. – Vestnik RAN, Vol. 69, no.2, 163–172 (1999).
16. Арнольд В.И., *«Антинаучная Революция и Математика»*. – Вестник РАН, 1999, №. 6, 553–558.
17. Зенкин А.А., *«Научная контр-революция в математике»*. – Независимая газета от 19 Июля, 2000 г. Приложение «НГ-НАУКА», стр. 13.
- Интернет-адрес: http://science.ng.ru/magnum/2000-07-19/5_mathem.html (in Russian).
18. Клини С. *Введение в метаматематику*. – М.: Мир, 1957.
19. Клини С., *Математическая логика*. – М.: Мир, 1973.

20. Wilfrid Hodges, *An Editor Recalls Some Hopeless Papers*. – The Bulletin of Symbolic Logic, Vol. 4, No. 1, pp. 1–17, 1998.
21. [Wikipedia] *Talk: Cantor's diagonal argument*, – http://en.wikipedia.org/wiki/Talk:Cantor%27s_diagonal_argument.
22. [Wikipedia] *Hilbert's paradox of the Grand Hotel*. – http://www.wikipedia.org/wiki/Hilbert's_paradox_of_the_Grand_Hotel.
23. Feferman S., *In the Light of Logic*. – Oxford University Press, 1998, Logic and Computation in Philosophy series, <http://www.oup-usa.org/>.
24. Вопенка П., *Математика в альтернативной теории множеств*, Москва, 1983 г.
25. Moore A.W., *The Infinity*. – The Problems of Philosophy Their Past and Present. Edited by Ted Honderich. – London – New York, 1993.
26. Зенкин А.А., «Диагональный метод Кантора: «мухи – отдельно, комлеты – отдельно». – VIII Общероссийская научная конференция «Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке», Секция «Символическая логика». Труды Конференции, изд-во Санкт-Петербургского государственного Университета, 2004. Стр. 487–491.
27. Zenkin A.A., *Gödel's numbering of multi-modal texts*. – The Bulletin of Symbolic Logic, Vol. 8, No. 1, March 2002, p. 180.
28. Коэн Пол Дж., *Теория множеств и континуум-гипотеза*. – М.: Мир, 1969.
29. Wittgenstein L., *Remarks on the foundations of mathematics*. – Blackwell, Oxford, 1956.
30. Lander L.J., Parkin T.R. *A counter example to Euler's sum of power conjecture*. – Math. Comp., 21, 101–103 (1967).
31. [FOM] RE: [HM] Cantor's diagonal proof. – <http://www.cs.nyu.edu/pipermail/fom/2004-March/007997.html>.
32. Ветхий завет. Первая книга Моисея. Бытие. Глава 3. <http://212.188.13.168/izdat/Bibliya/Быт/index.htm>.
33. Новый завет. Откровение святого апостола Иоанна Богослова. Глава 1. <http://212.188.13.168/izdat/Bibliya/Откр/index.htm>.
34. Пурперт В., Ильягудс Х.И., *Георг Кантор*. – Харьков: «Основа», 1991.
35. Катасонов В.Н., *Боровшийся с бесконечностью: философские и религиозные аспекты теории множеств Г. Кантора*. – М.: Мартис, 1999.
36. Dauben, J.W. *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1990. <http://www.amazon.com/exec/obidos/ASIN/0691024472/ericstreasuretroA/>.

Ипатьева М.О. Комментарий к последней статье Зенкина

(написанный для Комиссии РАН по борьбе с лженаукой
и фальсификацией научных исследований
и особенно для «математического» ее члена – академика Л.Д. Фаддеева)⁶⁶

§1. Статьи Зенкина

ноябрь 2016

Данная статья А.А. Зенкина содержит 10 не прямых обращений к вашей Комиссии и в конце один прямой призыв, поэтому я решила предоставить ее вам в технически обработанном мной виде на тот случай, если вам не приходилось эту статью читать, а также прокомментировать ее с точки зрения предоставленных вам ранее моих материалов.

Статья эта, насколько мне известно, не была Автором нигде опубликована, и имеется в Интернете только в виде DOC файла, записанного, согласно спецификациям самого файла, неким Карповым.

Статья датирована 18 августа 2005 г., то есть за 188 дней до смерти Автора, наступившей 22 февраля 2006 года в возрасте 68 лет, 7 месяцев и 13 дней. Из всех известных мне статей Зенкина она – последняя.

У меня имеется более десяти статей этого автора, но по части канторизма и парадоксов они в значительной степени дублируют одна другую; в моей коллекции имеется также множество отзывов на статьи Зенкина – от нападок кантористов до теологически окрашенной апологии. Но я не буду заваливать Комиссию всеми этими материалами, ограничившись этой (последней!) статьей Автора как подводящей некоторый итог всем предыдущим. А вместо разбора чужой критики и апологетики дам свою собственную оценку идеям Зенкина.

Безусловно, Зенкин целиком прав, когда утверждает, что *«Учение о Трансфинитном» Г. Кантора является откровенной лже-наукой, и потому «трансфинитный рай» Г. Кантора можно закрыть без всякого ущерба для работающей математики*, а самих кантористов он характеризует как «мафиозную структуру».

Однако те доказательства, которые Зенкин приводит для опровержения учения канторизма, не могут удовлетворить нас. Он в общем-то продолжает мыслить в рамках Канторовской парадигмы, т.е. «идет у них на поводу», вместо того, чтобы противопоставить их парадигме другую парадигму, гораздо более осмысленную и ясную.

§2. Актуальная бесконечность

В целом критика Зенкина в адрес канторизма сводится к тезису *«Infinitum Acti Non Datur»* (аристотелевская фраза в латинском переводе, которую Зенкин не произносит в данной статье, но снова и снова цитирует, ставит то в эпиграф, то в заглавие в других своих статьях)⁶⁷. Согласно Зенкину:

1) различаются только два вида (математической) бесконечности – потенциальная бесконечность (ПБ) и актуальная бесконечность (АБ); оба эти вида «контрадикторны», т.е. исключают одна другую: если не одна, значит, другая;

2) понятие АБ внутренне противоречиво и поэтому не должно использоваться в математике;

⁶⁶ **МОИ 2017-03-16:** Эта статья была мной начата (и первые ее 7 параграфов написаны) в ноябре 2016 года, когда ничто еще не предвещало о близкой смерти академика Л.Д. Фаддеева. Потом статья была на 4 месяца оставлена, и работа над ней возобновлена в марте 2017 года, когда академик Л.Д. Фаддеев уже скончался (26 февраля 2017 года).

⁶⁷ См., напр., МОИ [№ 108](http://moialmanah.blogspot.com/p/108.html); <http://moialmanah.blogspot.com/p/108.html>.

3) рецепт исправления положения, следовательно, заключается в том, чтобы оперировать одной только ПБ (при этом Зенкин не упоминает и не поясняет, как в таком случае быть с иррациональными числами: ведь если АБ исключена, то сами такие числа, как $\sqrt{2}$, π , e не существуют, а существуют только потенциально бесконечные приближения к ним).

На самом деле вся эта система понятий (или парадигма), которой оперирует Зенкин, есть та же система кантористов, в которую Зенкин внес только одно (в общем-то небольшое) изменение: запрет АБ. Но система кантористов, как я это уже много раз говорила, представляет собой построение туманного мышления, не сумевшего увидеть все существенные и важные детали объективной действительности.

Более ясное и четкое мышление (оформленное в Веданскую теорию) в данном вопросе видит такую картину:

1) бесконечность в математике (о возможной бесконечности в Космосе как в сторону большого, так и в сторону малого мы сейчас не говорим) – бесконечность в математике порождается только «процессами» (а эти «процессы» осуществляются мозговыми программами);

2) бесконечные процессы можно рассматривать как всё продолжающиеся и продолжающиеся – и тогда мы имеем дело с потенциальной бесконечностью;

3) разумеется, эти процессы физически никогда не заканчиваются, и в этом смысле «*Infinitum Actu Non Datur*», актуальная бесконечность не существует;

4) однако это не мешает нам в своем мышлении представить их завершившимися и дальше оперировать с их продуктами так, будто они действительно завершились; в компьютере (например, в мозге робота) это «представление» реализуется программной операцией «бокоанализа», многократно нами описанной;⁶⁸ эта операция вводит в наше мышление (а не в какую-то другую реальность!) актуальную бесконечность; в этом смысле «*Infinitum Actu Datur*», актуальная бесконечность существует;

5) благодаря такой операции мы считаем существующими как числа $\sqrt{2}$, π , e и другие иррациональные числа, так и считаем существующими одновременно все натуральные числа $\mathbb{N}$, действительные числа $\mathbb{R}$ и т.д.;

6) эта операция (ввод актуальной бесконечности путем бокоанализа) не приводит ни к каким противоречиям, и ее можно считать абсолютно законной математической абстракцией;

7) при вводе АБ как продукта «завершившегося» бесконечного процесса созданные множества отличаются между собой по мощности (по количеству элементов); так, например, если одна программа N генерирует множество натуральных чисел $\mathbb{N}$, а другая программа P отбирает из результирующего множества все четные числа, строя множество $\mathbb{P}$, то в множестве $\mathbb{N}$ всегда будет в два раза больше элементов, чем в множестве $\mathbb{P}$, – как в ходе незавершенной генерации еще при конечных множествах, так и после «завершения» (бесконечной) генерации – в актуально бесконечных множествах;

8) в общем случае соотношения мощностей актуально бесконечных множеств зависят от условий генерации и измеряются по правилу Лопиталя, известному с конца XVII века.

Такова картина, если мы просто вводим актуальную бесконечность – и не делаем ничего кроме этого.

Но весь «фокус» состоит в том, что кантористы ДЕЛАЮТ еще одну вещь, а именно: они вводят постулат (называемый нами постулатом Кантора), и в этом постулате они объявляют равномощными все множества, построенные любым бесконечным процессом в любых условиях. Так, для приведенного выше примера постулат Кантора объявляет равномощными («счетными») множества $\mathbb{N}$ и $\mathbb{P}$.

При этом кантористы связывают в единое целое ввод АБ и принятие постулата Кантора: якобы, мол, эти вещи неразрывны, и как только принята АБ, так сразу автоматически вступает в силу постулат Кантора, а отказ от постулата Кантора, мол, означает отказ от АБ.

Первоначально они связали вместе эти две вещи просто в силу своей неспособности разглядеть истинное положение дел и построить адекватную систему понятий (т.е. связали по глупости). Это относится лично к Кантору, Гильберту и остальным, кто несет ответственность за этот позор математики.

⁶⁸ Последнее на данный момент описание бокоанализа – в моей, посланной Комиссии, статье «Математика и мракобесие»: https://drive.google.com/open?id=0B1laodfse_orY21udUZRY3VHVlkl, раздел 11. (МОИ № 107, стр.15).

Но в наши дни кантористы пытаются неразрывно связать вместе АБ и постулат Кантора уже не по глупости. Я не верю, что те математики, которым нами многократно преподносилась изложенная выше логика (такие, как профессор Подниекс и академик Решетняк) – я не верю, что они не способны эту логику понять. Если они были бы до такой степени глупы, то они не смогли бы окончить среднюю школу (тем более, советскую школу, в которой еще не было ЕГЭ и действительно требовались знания и понимание). Я уверена, что тут уже вступают в силу совсем другие причины, а именно: эти люди прекрасно понимают, что отделение АБ от постулата Кантора означает катастрофу, полное крушение их «Трансфинитного рая», и вот, чтобы спасти этот «рай», они начинают симулировать глупость, они притворяются, будто тупы до такой степени, что ну никак не в состоянии понять, как можно постулат « $\aleph$ равномошно $\mathbb{P}$ » заменить на постулат « $\aleph$ НЕ равномошно $\mathbb{P}$ ».

В этом нет ничего удивительного: именно так ведут себя ВСЕ представители ВСЕХ лженаучных сект от астрологов до петриков. Все они нагло отрицают самые очевидные истины, игнорируют все возражения и логику, притворяются дурачками – и всё ради того, чтобы спасти и утвердить свое «учение».

Итак, ввод актуальной бесконечности и постулат Кантора – это две разные вещи; осуществляются они двумя разными умственными действиями, и эти вещи отнюдь не связаны между собой неразрывно. Их не только можно, но и непременно нужно отделить одну от другой. Если такое отделение не происходит, то это означает, что мышление данного субъекта туманно, путанно, и он не может прийти к правильным результатам.

Ввод актуальной бесконечности – полезная для математики абстракция, и она не приводит ни к каким пагубным последствиям.

Постулат же Кантора – это такая вещь, которую трудно обозначить другим словом, кроме «идиотский». Именно он (а не АБ) порождает все те нелепости, против которых выступает профессор Зенкин.

К сожалению, Зенкин пошел на поводу у кантористов, поверил им, что АБ и Постулат Кантора – одно и то же, и стал выступать против актуальной бесконечности. Это сразу делает его рассуждения путанными, нечеткими и малоубедительными (особенно для тех, кто видит и понимает, КАК на самом деле надо было выступать против кантористов), и эти его рассуждения быстро становятся довольно легкой мишенью для критики кантористов.

§3. Постулат Кантора

Теперь исследуем более подробно Постулат Кантора. Во-первых, он находится в противоречие с Эглематическим (Компьютерным) постулатом, т.е. с постулатом о том, что мозг – это компьютер и что математика порождается (некоторыми) программами мозгового компьютера, а математические «структуры» – это потенциальные продукты таких программ. Если множества есть продукты программ (процессов), то не только при потенциальной, но и при актуальной бесконечности «мощности» этих множеств различаются уже на уровне «счетных множеств», и соотношения этих «мощностей» зависят от условий генерации данных множеств.

Так, при описанных в предыдущем параграфе условиях генерации четных чисел (когда они отбираются из ранее сгенерированных натуральных чисел), четных чисел также и в актуальной бесконечности будет вдвое меньше, чем натуральных. Однако можно рассматривать другие генерирующие программы, связанные другими условиями их взаимной связи, и тогда соотношения результирующих множеств окажутся другими. Так, если одна программа просто генерирует натуральные числа, а другая параллельно и синхронно с ней генерирует четные, то оба результирующие множества окажутся равномошными. Можно придумать и такое взаимодействие генерирующих программ, при котором одна программа генерирует натуральные числа, а другая из каждого ее продукта создает два четных числа, уходящих вперед и обгоняющих натуральные. Тогда четных чисел окажется в два раза больше, чем натуральных.

Это не свидетельствует о противоречивости; это означает только то, что нами изучаются продукты конкретных программ, поставленных в конкретные условия (а не какое-то абстрактное «то, не знаю что»). Другое дело, что при понимании этих вещей само понятие «равномошности множеств» становится пустым, ненужным и, в общем-то, глупым.

Постулат Кантора очевидным образом противоречит такой картине. Он объявляет равномошными («счетными») ВСЕ бесконечные множества, генерируемые ВСЕМИ бесконечными процессами, каковы бы ни были взаимные соотношения этих процессов, как бы ни взаимодействовали генерирующие программы.

Всякий, даже самый нелепый, постулат можно принять (на время), чтобы посмотреть, что из этого получится. Примем на таких условиях и Постулат Кантора.

Так как этот постулат противоречит Компьютерному постулату, то его принятие означает ввод новой сущности, нового объекта, не совпадающего с теми объектами, которые у нас фигурировали раньше. Множества, генерируемые какими-то процессами (программами), не могут быть все одинаковой мощности независимо от условий генерации. Значит, Постулатом Кантора постулируется существование таких множеств, для которых это возможно. Точнее, это уже множества, никем не создаваемые (не генерируемые), а просто «существующие».

(Зенкин правильно отмечает, что для самого Кантора эти множества содержались, т.е. существовали «в уме Бога»).

Эти введенные Постулатом Кантора новые объекты (множества) тоже бесконечны, но это НЕ ТА актуальная бесконечность, которую мы в §2 получили, посчитав завершенными бесконечные процессы. Это новый, уже третий тип бесконечности, отличающийся как от ПБ, так и от АБ. В Веданской теории этот третий тип бесконечности еще в начале 1980-х годов был назван «аксиоматической бесконечностью». Эта бесконечность НЕ создается завершившимся бесконечным процессом, как это было с актуальной бесконечностью, а ее существование просто постулируется (постулатами или аксиомами).

Таким образом, противопоставление Зенкиным ПБ и АБ как *контрадикторных* тоже неверно. Кантористы НЕ оперируют ни потенциальной бесконечностью, ни актуальной бесконечностью, а аксиоматической бесконечностью, свойства которой ими просто постулированы, т.е., выражаясь не очень почтительно, «высосаны из пальца» – как и сами их «множества», никем не генерируемые, никем не создаваемые.

Принятие Постулата Кантора является ключевым, переломным моментом всего этого дела. До этого момента математика изучала (пусть самым математикам это и было неизвестно) потенциальные продукты мозговых программ. Эти программы связывали математику с реальным миром и обеспечивали ее применимость к вещам этого реального мира, ее «непостижимую эффективность»⁶⁹. Постулат Кантора же ввел в обиход такие объекты с такими свойствами, которые уже НЕ соответствовали никаким программам – и тем самым – никаким вещам реального мира. Это означало принципиальную и непреодолимую невозможность какого-либо практического использования дальнейших построений, означал принципиальную и непреодолимую их бесполезность.

Абсолютно с таким же успехом, с каким «математики» (поставим теперь это слово в кавычки) сочиняли сказки своего «трансфинитного рая» – точно с таким же успехом можно, как мы это многократно писали, постулировать существование кентавров, русалок и т.п. объектов и сочинять сказки про них.

Сочинение под видом науки сказок, не соответствующих никаким реальностям объективного мира, – это и называется лженаукой. Канторизм представляет собой классическую, типичную лженауку. От тех лженаук, с которыми ваша, уважаемые адресаты, Комиссия борется на страницах бюллетеня «В защиту науки», канторизм отличается только одно: канторизм был успешнее тех лженаук и смог пробраться в Академии наук, на кафедры университетов, в энциклопедии и учебники.

Канторизм является величайшим позором математики (и математиков) – и они не скоро смогут смыть с себя этот чудовищный позор – если вообще когда-нибудь смогут.

§4. Если Кантор и Гильберт были бы программистами...

Для программиста, который проектировал и создавал большие системы (работающие!) и поэтому привык думать о продуктах этих программ и их структурах, с максимальной отчетливостью представлять их себе (без этого программы не будут работать!) – для такого программиста Постулат Кантора выглядит просто невообразимо идиотским, глупым, до предела дилетантским. С первого взгляда – еще до всяких разборов и доказательств – видно, что этот постулат непременно приведет к массе осложнений, что там будет проблема за проблемой, из которых никогда не выбраться...

⁶⁹ Вигнер Е. *Непостижимая эффективность математики в естественных науках*. «Успехи физических наук», 1968 г. Март, том 94, вып. 3. Перевод В.А. Белоконоя и В.А. Угарова с: E. Wigner, *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*, Comm. Pure and Appl. Math. **131**, 1 (1960). Лекция в честь Рихарда Куранта, прочитанная 11 мая 1959 г. в Нью-Йоркском университете. См. МОИ № 107, стр.34–43; http://moialmanah.blogspot.com/p/blog-page_3.html.

Я однозначно заявляю, что если Кантор и Гильберт, сохранив ТАКОЙ способ мышления, взялись бы написать какую-нибудь систему программ, то их система НИКОГДА не заработала бы. (Я вообще-то видела таких «гениальных математиков»; был у нас в Институте некий Ш., который открыто называл себя «суперпрограммистом экстракласса»; так его назначили зав. группой и поручили создать определенную систему. После полугода программирования группа начала отладку Системы; прошли сроки, установленные Дирекцией, назначили новые сроки, потом продлили, еще раз продлили, еще раз, и еще... Уже полгода группа пыталась отладить свою систему, но та как не работала, так и не работала. Не выдержав столь длительной нервотрепки, от Ш. сбежали все его сотрудники... Их система так и не заработала, и в конце концов Дирекция поручила сделать эту систему нам, и мы ее запустили с нуля за три месяца...).

Что отличает человека, который НЕ способен создать работающую систему, от человека, который СПОСОБЕН это сделать? – А отличает образ мышления. И вот, я говорю: тот образ мышления, который мы видим у Кантора и Гильберта, когда они принимают Постулат Кантора, принципиально не может создать работающую систему; при таком способе мышления можно сочинять только сказки.

§5. Диагональный процесс

Итак, Постулат Кантора, объявивший равномоными результаты всех бесконечных процессов независимо от их взаимных соотношений, был тем водоразделом, до которого математика была наукой, а после которого началось чистое мифотворчество.

Как всегда в математике (и не только в математике), если есть какое-то фундаментальное обстоятельство, то оно принимает всевозможные виды в зависимости от того, с какой стороны подойти к вопросу. Так и с Постулатом Кантора – как бы мы не крутились, в какой форме не разбирали бы «теорему Кантора о несчетности континуума», это фундаментальное обстоятельство – постулат и только постулат! – всё равно выскакивает наружу в том или ином виде. Я знаю три принципиально разных «доказательства» этой теоремы Кантора (Зенкин говорит о двух) – и все они сводятся к постулату.

Вот, возьмем то, что Зенкин назвал «РАА-ДОКАЗАТЕЛЬСТВО-1». «Для гуманитариев», наверное, более наглядно будет объяснять его в такой форме. Вот, Кантор предполагает, что ВСЕ действительные числа, содержащиеся между 0 и 1, каким-то образом перенумерованы и составлен некоторый их список, который начинается, например, так⁷⁰:

1-е число:	0,7854...
2-е число:	0,2341...
3-е число:	0,1869...
4-е число:	0,9752...

и т.д.

Далее Кантор «по диагонали» (которая выделена жирным шрифтом) берет подчеркнутые цифры, заменяет их какой-нибудь другой цифрой и из этих заменяющих цифр строит новое число (называемое «диагональным» или «анти-диагональным» числом или элементом), например, так:

0,1234...

Это новое число хотя бы в одной позиции отличается от КАЖДОГО из чисел списка. Следовательно, заключает Кантор, действительные числа указанного отрезка перенумеровать невозможно, и, значит, множество действительных чисел (континуум) имеет мощность (т.е. количество элементов) больше, чем множество натуральных чисел (номеров в нашей таблице).

Но при этом Кантором принимается (не оговоренное явно) предположение (т.е. постулат), что в таблице цифр бесконечность «вправо» (количество цифр в числе) и бесконечность «вниз» (количество самих чисел) одинаковы. Если эти бесконечности не одинаковы, то диагональный элемент не может быть корректно построен. Например, если «вправо» будет больше цифр, чем «вниз» чисел, то диагональный элемент окажется короче остальных чисел и станет неопределенным. А если «вниз» будет больше чисел, чем «вправо» цифр, то, значит, диагональный

⁷⁰ Зенкин оговаривает, что «для простоты» он «везде ниже» использует двоичную систему счисления; на самом деле двоичная система дает существенный выигрыш только в том случае, если в полном объеме рисовать таблицы цифр после очередных шагов генерации матрицы; в тексте же Зенкина вполне можно было бы использовать и десятичную систему. Чтобы не смущать «гуманитариев», возможно, не очень им понятной двоичной системой, я здесь вернулась к «обычной».

процесс не охватил весь список, и построенное диагональное число не доказывает, что такого числа нет в списке: оно ЕСТЬ в списке, но только в той его части, которая не была охвачена диагональным процессом.

Если мы пишем всего две цифры за запятой, то (при десятичной системе счисления) мы можем написать $10^2 = 100$ различных чисел. В общем случае, если мы пишем n цифр за запятой, то можем написать 10^n разных чисел. Значит, бесконечность «вправо» характеризуется как n , а бесконечность «вниз» характеризуется как 10^n . Чтобы доказательство Кантора оказалось верным, нужно принять, что эти бесконечности одинаковы, то есть, что $n = 10^n$.

И кантористы это принимают, раз они утверждают, что доказательство Кантора верно.

В этом нет ничего удивительного, потому что это всего лишь одна, очередная форма того самого Постулата Кантора, о котором мы говорили выше и который объявил, что все бесконечные процессы равноможны. В самом деле, раз все процессы создают одинаковые по мощности множества, то множество с n элементами равномощно множеству с 10^n элементами.

Если принять такой постулат, то, действительно, теорема Кантора доказана, и континуум имеет мощность больше, чем счетная.

Некоторые читатели упрекали меня в письмах, что я соглашаюсь с тем, что ЕСЛИ принят такой постулат, то несчетность континуума доказана. «Это же абсурд», – они говорили, – «не может быть $n = 10^n$!».

«Да», – я отвечала, – «это абсурдный постулат, но ЕСЛИ он принят, то несчетность континуума доказана».

Таким образом, всё упирается в постулат. Если кантористы принимают и утверждают, вот, такой постулат, то я признаю несчетность континуума (в теории, построенной на таком постулате).

Дело, однако, в том, что за 36 лет ни один математик не осмеливался признать наличие у них такого постулата. Все они всеми силами изворачивались, и отрицали, отрицали, отрицали, что у них вообще есть какой-то постулат. Они хотели, чтобы их результат (истинность доказательства Кантора и несчетность континуума) получался и признавался нами «просто так», без всяких постулатов, без всяких предположений, без всяких условий.

§6. Три уровня аргументации

Зенкин правильно квалифицирует канторизм как лженауку, правильно отвергает «доказательства» Кантора как ошибочные, но аргументация, которую Зенкин приводит в подтверждение своей концепции, с нашей точки зрения является весьма слабой по сравнению с той, которую можно было бы здесь дать (и которая дается нами). Нашу аргументацию можно разделить на три уровня.

1-й уровень – наиболее глобальный. Это ввод Эглематического (Компьютерного) постулата и объяснение всей природы математики. Если объекты математики (в том числе все канторовские множества) есть продукты некоторых процессов (алгоритмов, программ), то все выводы Кантора о существовании несчетных множеств очевидно и элементарно ошибочны. Представления Кантора невозможно совместить с представлением о множествах как объектах, генерируемых определенными процессами.

Но Зенкин НЕ разбирает это обстоятельство, не противопоставляет генерирующие процессы канторовской «актуальной бесконечности», не анализирует, какие конкретно содержатся ошибки в рассуждениях Кантора, если их разбирать с точки зрения процессов.

Например, в генерируемой процессами матрице «всех чисел отрезка $[0, 1]$ » строк будет 10^n при длине строки n , и диагональный процесс никогда не будет охватывать все строки, следовательно, диагональным процессом НИКОГДА не строится такой элемент, которого нет в списке (аналогичные ошибки содержатся и во всех остальных разновидностях «доказательств» Кантора). Но Зенкин не обсуждает этот вопрос, он сходу соглашается с Кантором в том, что диагональный процесс и вправду строит новый, не содержащийся в списке элемент, и дальше сам рассуждает так, как будто это действительно верно; Зенкин ни в каком виде не прибегает к нашей аргументации этого, 1-го уровня.

А между тем этот верхний, глобальный уровень аргументации уже сам по себе достаточен для уничтожения канторизма. Здесь мы имеем, с одной стороны, (в лице Веданской теории) учение, объясняющее сущность интеллекта, а в рамках интеллекта также и сущность математики, и делающее свои выводы на основе данного объяснения, а, с другой стороны, (в лице канто-

ризма) имеем учение, не способное объяснить, откуда берутся те объекты, о которых оно рассуждает, и делающее свои выводы на основе этого незнания.

Канторизм – это учение, порожденное невежеством. Там, где у нас есть объяснение, у них нет ничего – пустое место. Научное мышление должно принять имеющееся объяснение, а не пустое место.

2-й уровень аргументации – это Постулат Кантора. Первый уровень аргументации разбирал НАШ постулат – вводимый нами. На втором уровне мы разбираем, наоборот, постулат, вводимый кантористами (или постулаты, если различать его разновидности). Рассуждения Кантора и кантористов становятся осмысленными только в том случае, если отвергнуть НАШ постулат и принять ИХ постулат (закрывающийся в признании равномогными все результаты процессов, что в случае данного выше примера диагонального процесса проявляется как постулат $n = 10^n$).

Но канторизм может держаться только в том случае, если он скрывает свои постулаты. Это и естественно: ведь их постулаты настолько абсурдны, что над ними все просто смеялись бы, объяви кантористы их открыто. Потому они и не осмеливаются свои постулаты открыто признать.

Аргументация 2-го уровня тоже вполне достаточна для уничтожения канторизма. Даже если не приводить больше никакой другой аргументации, одного того, что люди не осмеливаются признать те принципы, на которых построено их учение, – одно это уже доказывает, что это «учение» – липа.

Мы должны постоянно указывать кантористам на их постулаты – и своим отрицанием этих постулатов кантористы снова и снова подтверждают свой проигрыш.

А Зенкин НЕ рассматривает также и аргументацию 2-го уровня, он обходит молчанием эти постулаты кантористов. Он не показывает читателю, что для того, чтобы получить диагональный элемент, которого НЕТ в списке, нужно предположить, что $n = 10^n$ (или $n = 2^n$ при двоичной системе счисления).

Таким образом, мы видим, что Зенкиным опущены и не использованы против канторизма два самых мощных пласта аргументации – т.е. наиболее сильные доказательства.

3-й уровень аргументации – это внутренние противоречия в канторизме. Принятие (в том или ином его виде) тотально абсурдного Постулата Кантора, естественно, не проходит бесследно и в дальнейшем порождает всякие несуразности. Вот, на эти несуразности Зенкин и концентрирует всё свое внимание. С нашей точки зрения это всего лишь аргументы третьей степени, после смертельных для канторизма аргументов о постулатах (о наших постулатах и о их постулатах). Но, тем не менее, аргументы 3-го уровня – это тоже аргументы.

Пройдемся по следам Зенкина.

§7. По следам Зенкина

Логические его рассуждения начинаются с формулировки и противопоставления двух аксиом: «Аксиомы Аристотеля» (что все бесконечности потенциальны) и «Аксиомы Кантора» (что все бесконечности актуальны). Как мы уже видели, эти аксиомы плохо отражают действительное положение дел. Нет необходимости принимать Аксиому Аристотеля: мы признаем актуальную бесконечность, но – признаем как (мысленное) завершение бесконечных процессов, и в этой актуальной бесконечности сохраняются все те свойства множеств, какие имелись в ходе генерации этих множеств.

Так, например, записи действительных чисел отрезка $[0, 1]$ имеют актуально бесконечную длину, и их актуально бесконечно много, но первая актуальная бесконечность имеет мощность N , в то время как вторая актуальная бесконечность имеет мощность 10^N (или 2^N и т.д.). Актуальная бесконечность отделена от постулата о равномогности всех процессов; первое принято, второе – нет.

Тезис о том, что актуально бесконечные множества имеют различную мощность, вполне согласуется с духом самого канторизма. У них ведь тоже выстраивается «шкала алефов» – актуально бесконечных множеств с различной мощностью. Только у них это делается алогичным и абсурдным путем: сначала принимается (никому не нужный) постулат о том, что $2^n = n$, а потом с неимоверным апломбом как великое открытие в «золотой теореме Кантора» преподносится, что всё-таки $2^n > n$. У нас же этого абсурда нет, и как было с самого начала $2^n > n$, так и осталось до конца – даже в актуальной бесконечности.

Вместо же зенкиновской «Аксиомы Кантора» мы различаем две вещи: 1) постулат Кантора, объявляющий все процессы равномошными; и 2) ввод Кантором в обиход таких множеств, в которых (в результате постулата) возможна ситуация $n = 10^n$ (или $n = 2^n$), называемых поэтому уже не актуально бесконечными, а аксиоматически бесконечными.

В целом мы можем сказать, что Зенкин правильно видит аксиоматическую (постулатную) природу всего дела с потенциальной и с актуальной бесконечностью, но он не смог построить правильной системы понятий; он пользуется такой системой понятий, которая нам представляется крайне неудобной, не позволяющей адекватно описать положение вещей, и поэтому большие куски текста Зенкина нам приходится просто пропускать.

Несмотря на этот недостаток изложения у Зенкина, затрудняющий анализ, попытаемся всё же выделить некоторые узловые моменты в нем.

1. Диагональный элемент – один! Этот мотив у Зенкина появляется в разных вариантах в разных статьях: то как образный пример о бросаемых на чаши весов монетах, то в разговоре о контр-примере, а в статье «Ошибка Георга Кантора»⁷¹ прямо разбирается факт, что в двоичной системе можно построить только ОДИН (!) диагональный элемент, которого нет в списке; и в конце концов всё это выливается в фразу Зенкина:

Ведь утверждение о том, что мощность континуума $X=[0,1]$ больше мощности множества $N=\{1,2,3,\dots\}$ на том основании, что континуум *всегда содержит на один* (канторовское АД-д.ч.) *элемент больше*, чем N , по меньшей мере смехотворно, поскольку любому школьнику известно, что «если два бесконечных множества различаются одним элементом, то такие множества – эквивалентны».

Конечно, это аргумент против кантористов, но это третьестепенный аргумент, потому что первостепенным аргументом уже показано, что диагональный процесс вообще не может построить ни одного такого АД-д.ч., которого нет в списке, точнее, это АД-д.ч. может считаться построенным только в том случае, если принят постулат, что $n = 2^n$. Так что на самом деле речь идет не о множестве с единственным таким элементом, а о пустом множестве таких элементов. Аргумент Зенкина о единственности АД-д.ч. вступает в силу только в том случае, если принят постулат $n = 2^n$. Для кантористов, которые этот постулат приняли, аргумент Зенкина должен действовать.

2. Доказательство Кантора порождает бесконечную цепь таких доказательств. Это обстоятельство тоже Зенкин упоминает много раз в различных статьях. Но опять же, все эти рассуждения вступают в силу только после принятия постулата, что $n = 2^n$. Эти рассуждения Зенкина используют обычный прием кантористов: «трансмутацию» бесконечных множеств. Кантористы трансмутацию используют, когда им это выгодно, но запрещают, когда не выгодно – обычный для них стиль. В бесконечной цепи рассуждений, возникающей при «доказательстве теоремы Кантора», Зенкин видит аналогию с парадоксом Лжеца. Этот парадокс мы рассмотрим ниже.

§8. Парадокс Лжеца

март 2017

Выше мы видели, что у профессора Зенкина имелось правильное отношение к канторовской теории множеств (как к оригинальной «наивной», так и к современной ее версии в виде АТМ – аксиоматической теории множеств). Но та аргументация, которую Зенкин пускает в ход против этих вещей, хоть в основных чертах и верная, но с нашей точки зрения является всего лишь третьестепенной, в то время как в области первостепенной важности (сущность математики и Эглематический постулат) и второстепенной важности (постулат Кантора и невозможность диагонального процесса без этого постулата) – в этих областях Зенкин остается в плену у Канторовской парадигмы, принимает условия противника и тем самым делает свою аргументацию малоубедительной и малоэффективной, чем, разумеется, немедленно пользуются противники, а мы в своем выступлении против канторизма опираемся на аргументацию Зенкина не можем.

Аналогичная ситуация наблюдается и при анализе Зенкиным Парадокса лжеца (который им упоминается в разных статьях, но наиболее развернутый анализ которого дан в статье «Новый подход к анализу проблемы парадоксов»⁷²). Здесь тоже Зенкин правильно видит глубинную

⁷¹ МОИ № 108, стр.3; <http://moialmanah.blogspot.com/p/108.html>. См. также стр.98 там же.

⁷² МОИ № 108, стр.6–16; <http://moialmanah.blogspot.com/p/108.html>.

сущность парадокса (что дело в заикливании некоторого процесса), но та аргументация, которую он приводит, и та модель парадокса, которую он строит (при помощи инвертора с обратной связью для аналоговой ЭВМ) представляется нам наивной и опять-таки малоубедительной и малоэффективной.

В модели Зенкина ему приходится принимать, что физическое воздействие (в данном случае электрический ток) распространяется с бесконечной скоростью $V = \infty$.⁷³ На самом деле ничего такого не нужно для правильного понимания как парадокса лжеца, так и парадокса Рассела и других.

Доктор физико-математических наук Александр Александрович Зенкин был ведущим научным сотрудником Вычислительного центра РАН и работал в Отделе интеллектуальных прикладных систем.⁷⁴ Но то, какую технику он избрал для своей модели парадоксов, показывает, что он, видимо, был ближе связан с аналоговыми машинами, чем с дискретными. (Похоже, он сам вообще не программировал для компьютеров современного типа и не имел соответствующего опыта). А между тем в программистских понятиях парадоксы объясняются элементарно и представляют собой простое заикливание программы, хорошо знакомое каждому, даже начинающему, программисту.

Возьмем Парадокс лжеца в наиболее четкой его форме:

Утверждение А: Утверждение А ложно.

Пусть теперь Субъект должен проверить, истинно или ложно Утверждение А. Для этого он составляет у себя (в своем мозговом компьютере) программу В такой проверки (как он путем самопрограммирования составляет программы вообще для любого своего действия). На рис.1 приведена блок-схема алгоритма программы В – схема такого типа, какие рисуют в самом начале обучения программированию (опытные программисты никогда такие не рисуют для себя).

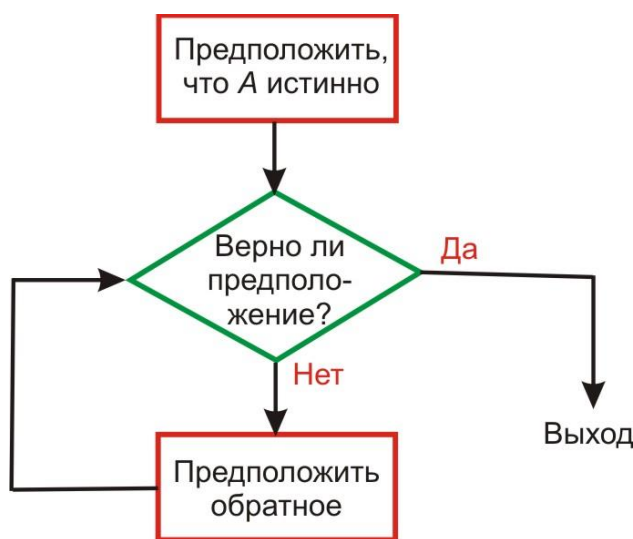


Рис.1. Блок-схема программы В проверки истинности утверждения А

Центральное звено программы (оценка актуального в данный момент предположения) заключается в проверке следствий этого предположения. Так, при предположении «А истинно» следствием является «А ложно» (в силу самого текста и смысла утверждения). Поэтому обозначенный ромбом блок программы дает ответ «Нет», и далее принимается противоположное предположение. Но ромб и на это дает ответ «Нет»; ответа «Да» никогда нет, и программа входит в бесконечный цикл.⁷⁵

Аналогичным образом парадокс Рассела тоже представляет собой заикливание программы, которая генерирует «множество всех множеств...» и потом проверяет результат этой генерации.

⁷³ Там же, стр.11.

⁷⁴ Там же, стр.5.

⁷⁵ Парадокс лжеца уже неоднократно разбирался в альманахе МОИ; см., напр., МОИ № 41, стр. 52–53, <http://moialmanah.blogspot.com/p/41.html>.

§9. Парадокс Рассела

Блок-схема программы C , генерирующей множество R «всех множеств, не содержащих себя в качестве элемента», приведена на рис.2.

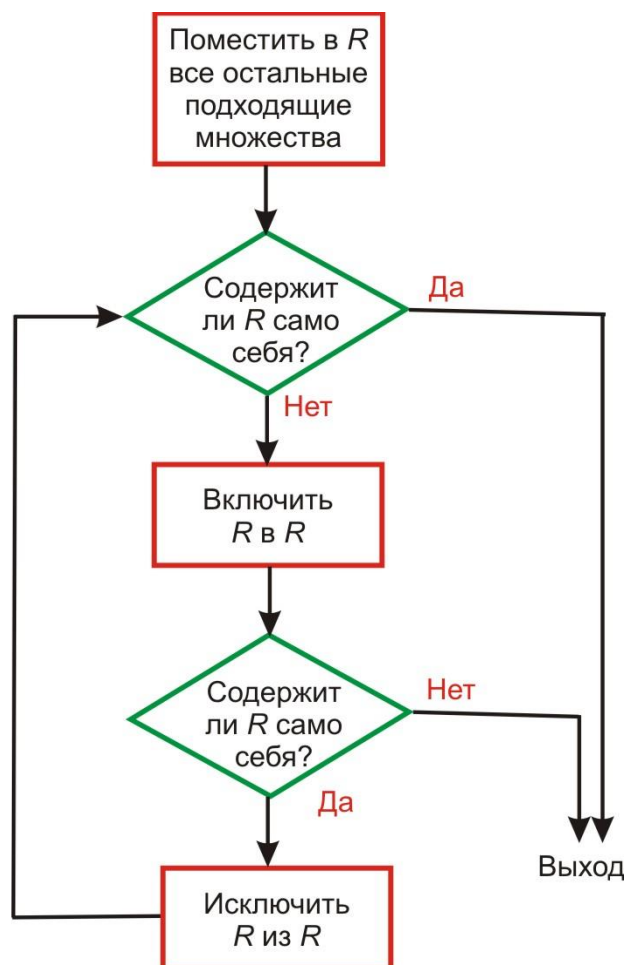


Рис.2. Блок-схема программы C генерации (с проверкой) множества R всех множеств, не содержащих себя в качестве элемента

Чтобы упростить блок-схему, предположим, что программа C сначала разобралась со всеми остальными множествами и лишь в качестве самого последнего рассматривает собственно множество R (тогда можно выходить из программы, как только с ним разобралась).

Алгоритм программы C предусматривает дважды проверять, «содержит ли R само себя?»: первый раз для того, чтобы включить или не включить R в генерируемое множество (в само R), а второй раз, чтобы убедиться в правильности результата.

Первый раз приступая к первой проверке, R еще не содержит само себя (так как не было акта включения), поэтому R удовлетворяет условию построения, ответ дается «Нет», и R включается в R . Если и при проверочном тесте ответ тоже окажется «Нет», то всё в порядке, и можно заканчивать работу.

Но так как акт включения уже был, то теперь контрольная проверка дает ответ «Да», следовательно, R уже не удовлетворяет условию построения, и его следует исключить из R (и продолжить построение). Однако после акта исключения R опять удовлетворяет условию построения, и снова включается в R .

Таким образом, программа закидывается в двух проверках (первичной и контрольной) и в блоках включения и исключения, а на выход из программы никогда не попадает. Если бы программа была более примитивной и не имела бы контрольной проверки, то она просто включила бы R в R , и так оно и осталось ($R \in R$), а если после исключения не возвращалась бы к проверке для построения, то осталось бы ($R \notin R$). Таким образом, парадокс Рассела – это

свойство достаточно развитой программы, которая старается во что бы то ни стало достичь осмысленного результата (что соответствует уму пытливого, не поверхностного человека).⁷⁶

Вопрос об этих двух (как и о других) парадоксах абсолютно элементарен, если мы смотрим на все эти вещи как на деятельность (мозговых) программ. Ну, подумаешь – при некоторых условиях программа закичивается! – вот так мировая проблема, которую нужно обсуждать тысячелетиями! (К тому же еще и не приходя ни к какому вразумительному выводу!)

Только если не видеть программной природы всех этих вещей, если смотреть на генерируемые множества как на застывшие и «расстеленные» в канторовском и бурбакистском духе, тогда элементарное закичивание превращается в страшный, неразрешимый парадокс, о котором причитают уже второе столетие. Выбор между программной и бурбакистской концепциями есть выбор между такой системой понятий, в которой проблем нет, и такой, в которой проблемы создаются «на ровном месте». Казалось бы, ясно, какой концепцией надо пользоваться. Но математики избирают вторую.

Зенкин тоже закрутил над всем этим сложную и маловразумительную теорию, всякие там «необходимые и достаточные условия феномена парадоксальности»⁷⁷, «классификацию парадоксов»⁷⁸ и т.п. Все эти построения мы считаем ненужными; они только затуманивают дело по сравнению с той ясностью, которая нам дается программной концепцией.

Но, в отличие от бурбакистов, Зенкин правильно понимал, что дело здесь в закичивании процессов. И это уже большая его заслуга.

§10. Катастрофа математики

Во времена Эйлера (1707–1783), Канта (1724–1804) и Гаусса (1777–1855) математика была «царицей всех наук». Но в конце XIX столетия она этот свой (тогда заслуженный) статус потеряла. В безупречное прежде здание математики были добавлены построения, основанные на (очевидно абсурдном) постулате (Кантора), провозгласившем, что $n = 10^n$ при бесконечном n (или на аналогах такого постулата). В результате рядом с красивым деревом подлинной математики выросло уродливое древо квазиматематики, стоящее корнями на этом постулате.

Хотя сначала это дикое образование встретило сильнейшее сопротивление среди математиков, в конце концов оно было признано законной частью математики почти всеми профессионалами. Такое признание было катастрофой для математики, и по сей день является величайшим ее позором.

Самой яркой фигурой среди виновников этой катастрофы и этого позора сияет Давид Гильберт (1862–1943). С самого Кантора (1845–1918) и спрашивать-то нечего: каждому, кто знаком с его биографией, хорошо известно, что он был психически больным человеком, причем его регулярные пребывания в психиатрической клинике Галльского университета начались примерно в то же самое время, когда он начал разрабатывать свою «теорию множеств».

Но Гильберт – другое дело. У меня нет сведений о его пребывании в психиатрических клиниках. Поэтому мы, так сказать, признаем Кантора невменяемым и, следовательно, невиновным, а Гильберта вменяемым и, значит, виновным.

Гильберт в свое время считался «королем математиков», занявшим этот трон после прежнего «короля» – Гаусса. Я не знаю, есть ли у Гильберта вообще какие-нибудь действительно ценные достижения в математике, но те три вещи, которые снова и снова гремят по всему миру, кочуют из книги в книгу, – все ошибочны. Эти три вещи:

- утверждение, благодаря своему авторитету, канторовской теории множеств («рая, из которого их уже никто не выгонит»);
- разработка программы полной формализации математики;
- утверждение аксиом в качестве оснований геометрии.

Всё это неправильно, и вело математику только в болото.

Однако здесь мы останавливаемся только на первой из этих вещей.

Итак, стараниями Гильберта (а также, конечно, других, не столь сиятельных) канторовское учение было признано законной частью математики. Это превратило математику из «царицы всех наук» в самую отсталую из всех наук, так как в ней рядом существуют, перемешаны

⁷⁶ Парадокс Рассела уже неоднократно разбирался в альманахе МОИ; см., напр., МОИ № 5, стр. 73, <http://moialmanah.blogspot.com/p/5.html>.

⁷⁷ МОИ № 108, стр. 10; <http://moialmanah.blogspot.com/p/108.html>.

⁷⁸ Там же, стр. 8.

подлинные знания с мифологией, с дикими измышлениями. Ни в одной другой науке нет такого положения: мифы были изгнаны из них уже с зарождением современной экспериментальной науки – во времена Фрэнсиса Бэкона и Лондонского королевского общества – и больше не возрождались. Ни в одной другой науке нет такого положения, чтобы сказки признавались бы научной истиной почти всеми представителями данной науки. Это делает положение математики уникальным.

Сравнимая катастрофа постигла советскую генетику в конце 1940-х годов. Но это было всего лишь в одной стране – в СССР – в то время, как в остальном мире генетика продолжала нормально развиваться. И даже в СССР это продолжалось всего-то около десятилетия: со знаменитой сессии ВАСХНИЛ (31 июля – 7 августа 1948 года) и до самого начала 1960-х.⁷⁹ А в математике торжество канторизма продолжается уже более столетия и охватывает весь мир.

Такое положение могло создаться в математике потому, что она, в отличие от других наук, не имеет экспериментального базиса. Необходимость экспериментом подтвердить воображаемые предположения деятелей других наук сдерживает и связывает их фантазию, и не позволяет в этой области развиваться мифам. А в математике этот сдерживающий фактор отсутствует. «Истинность» предположений математиков определяется не опытной проверкой, а «доказательством», т.е. голосованием среди представителей их науки. Если большинство математиков признают миф реальностью, значит, он и будет считаться реальностью (что мы и видим на примере канторизма), и проверять истинность мифа на Природе не требуется.⁸⁰

Зенкин вслед за академиком В.И. Арнольдом называет кантористов (и бурбакистов) «обладающей большим влиянием мафией». Мне такое сравнение никогда не представлялось хорошим. Мафия – это организованная преступность, криминальные действия, убийства и т.д. Кантористы не мафиози; они – сектанты. Это религиозная секта фанатиков, нечто по духу и поведению похожее на пятидесятников, мормонов или «свидетелей Иеговы». Как и эти, кантористы нечувствительны ни к какой логике и аргументации, готовы любыми средствами отстаивать свои догмы. Но разница в том, что те секты признают себя религией, верой, в то время как кантористы выдают свое учение не за религию, а за науку.

Их лозунг (не рекламируемый открыто, но зато скрыто применяемый с непреклонной настойчивостью) – это «Credo quia absurdum»⁸¹. И в самом деле: что может быть абсурднее, чем утверждение профессионального математика о том, что n равно 10^n при бесконечном n ?

Но не только религиозный фанатизм заставляет математиков отчаянно защищать этот абсурд. Есть еще один фактор, наверное, в наше время даже более сильно действующий.

В книге Дитера Нолла «Приключения Вернера Хольта»⁸² есть такой эпизод: Хольт с товарищами на Карпатах попадают в лесопилку, где до них эсэсовцы на циркульной пиле распилили русского военнопленного. И потом Хольт и товарищи отчаянно защищают эту лесопилку от словацких партизан, чтобы правда не раскрылась и чтобы тень содеянного не пала на них.⁸³

Подобный мотив руководит сегодняшними математиками даже в большей степени, чем слепая вера в абсурд. Они отчаянно защищают канторизм для того, чтобы не вскрылась чудовищная правда: что вся наука математика около полутора столетий находилась во власти абсурдного мифа, что самые именитые математики (начиная уже с Гильберта) верили в этот миф,

⁷⁹ Борьба Лысенко началась еще в 1930-х, но рядом продолжала существовать и настоящая генетика; окончательно Лысенко пал лишь в середине 1960-х после смещения Хрущева, но уже с начала того десятилетия опять же рядом существовала и «вейсмано-моргановская» генетика. Так что монопольное владычество «лысенковщины» в СССР имело место лишь примерно 12 лет.

⁸⁰ Моррис Клайн писал («Математика: Утрата определенности», Москва, «Мир», 1984, стр.363, <http://moialmanah.blogspot.com/p/21.html>, МОИ № 21, стр.115): «Доказательство, абсолютная строгость и тому подобные понятия – блуждающие огоньки, химеры, «не имеющие пристанища в математическом мире». Строгого определения строгости не существует. Доказательство считается приемлемым, если оно получает одобрение ведущих специалистов своего времени или строится на принципах, которые модно использовать в данный момент. Никакого общепризнанного критерия строгости в современной математике не существует. Математическая строгость переживает сейчас не лучшее время».

⁸¹ «Верую, потому что абсурдно».

⁸² Dieter Noll. «Die Abenteuer des Werner Holt». Aufbau-Verlag Berlin, 1960. Нолль Д. «Приключения Вернера Хольта». – М.: Издательство иностранной литературы, 1962. Перевод с немецкого Р. Гальпериной и В. Курелла.

⁸³ Часть 2-я, гл.4, <http://militera.lib.ru/prose/foreign/noll/02.html>.

что полчища профессоров преподавали его в университетах, и академики от математики исписали этим мифом горы бумаг в учебниках, монографиях и энциклопедиях.

Канторизм – это «лесопилка математиков». Им нужно во что бы то ни стало «защитить честь мундира» представителей их цеха, а научная истина при этом значения не имеет.

Это сочинение я задумала в первую очередь для академика Л.Д. Фаддеева как профессионального математика в составе Комиссии РАН по борьбе с лженаукой и фальсификацией научных исследований. Я собиралась преподнести ему последнюю статью А.А. Зенкина вместе с этим комментарием, чтобы показать, что не одна дура Марина Ипатьева отрицает канторизм, но есть такие и среди докторов физико-математических наук, каким являлся А.А. Зенкин.

Правда, «Поскреби русского – найдешь татарина», говорит знаменитая крылатая фраза; так если поскребсти математика Зенкина, то оказывается, что он на самом деле химик. Возможно, именно поэтому он и оказался способным освободиться от поголовного заблуждения современных математиков. Но неужели сами математики на это не способны?

Я собиралась обратиться к математику Фаддееву в страстной речи с вопросом о том, неужели ему безразлична честь математики и математиков, неужели он может смириться с тем, что эта страшная печать позора лежит на его науке, неужели он не хочет освободить математику от этого кошмара, защитить по-настоящему, а не обороной лесопилки, честь математиков, сделать математику из самой отсталой науки, в которой всё еще торжествуют мифологические сказки и которая не знает своих оснований, снова «царицей всех наук»?

Но мне не удалось закончить эту работу, пока академик Фаддеев был жив. Он скончался, и мне не остается ничего другого, как, наконец-то закончив этот комментарий, передать материал наследникам академика Фаддеева в Комиссии.

Зенкин в своей последней статье сделал такое ироническое замечание (вся его статья вообще ироническая):

ЗАМЕЧАНИЕ. Напомню суть так называемого знаменитого ДМК, чтобы АТМ-непрофессионалы (например, гуманитарии) не подумали, что в этом ДМК «зарыта» такая «высшая математика», понимание которой превышает интеллектуальные возможности нормального человека, или ученика средней школы, или непрофильного академика РАН.

Действительно, для понимания всех вопросов, связанных с канторизмом, никакая «высшая математика» не требуется. Это вполне доступно ученику средней школы, не говоря уже об академиках РАН, даже если они и не математики.

Итак, умер Зенкин, умер Фаддеев...

Почтим их память минутой молчания, но потом всё-таки возьмемся за восстановление чести математики и математиков!

Марина Ипатьева

19 марта 2017 года

от: Marina Olegovna Ipatjeva <marina.olegovna@gmail.com>

Кому: ealexandrov <ealexandrov@bk.ru>

дата: 19 марта 2017 г., 17:55

тема: Re: К Комиссии РАН

отправлено через: gmail.com

Здравствуйте, Евгений Борисович!

Присоединенный материал предназначался в основном для Л.Д. Фаддеева. Теперь передаю наследникам. Если будете с кем-нибудь говорить о том вопросе, который поднимался в моем предыдущем послании, то можете им передать и этот файл. Возможно, на кого-то подействует то обстоятельство, что против канторизма выступал доктор физико-математических наук, профессор (А.А. Зенкин).

С уважением,
МОИ

Марина Ипатьева. Решетняк, числа и ZFC

Рода Энеева мать, людей и бессмертных услада,
О благая Венера! Под небом скользящих созвездий
Будь же пособницей мне при создании этой поэмы,
Что о природе вещей я теперь написать собираюсь
Меммия милому сыну, которого ты пожелала
Всеми дарами почтить и достоинством щедро украсить...⁸⁴

1. Преамбула

Римский поэт Тит Лукреций Кар свою поэму «О природе вещей» адресовал некоему Меммию⁸⁵ (I век до н.э.), грек Лука, ставший впоследствии святым, свое повествование, известное ныне как «Евангелие от Луки» (1-я книга) и «Деяния апостолов» (2-я книга) адресовал некоему Феофилу⁸⁶ (I век н.э.), Клавдий Птолемей свое сочинение «Альмагест» адресовал некоему Сиру⁸⁷ (II век н.э.). Теперь никто не знает, кто такие были эти Меммий, Феофил и Сир; и значение преподнесенных когда-то им сочинений выходит далеко за пределы рассказа одному конкретному лицу.

Так и я, не претендуя на состязание с Лукрецием, Лукой и Птолемеем, однако в некотором смысле подражая им, настоящее свое сочинение адресую Виктору Викторовичу Сухорукову, присяжному заседателю «Математического суда»⁸⁸, при этом полагая, что и здесь значение сочинения будет больше, чем просто объяснение некоторых вопросов одному конкретному лицу.

Виктор Сухоруков не математик, а молодой социолог, и, возможно, некоторые вопросы, затронутые ниже, он найдет малопонятными для себя. Однако я так думаю, что он всё-таки поймет в них больше, чем академик Решетняк, у которого способность понимания оказалась вообще нулевой, как это стало наглядно видно из опыта моего полугодового общения с ним.⁸⁹

2. Письмо Решетняка, породившее настоящее сочинение

3 февраля 2016 года в 06:46 Решетняк разослал первым присяжным «Математического суда» очередной свой файл под именем *number14.pdf*,⁹⁰ начальная часть которого выглядела так (орфография и пунктуация сохраняется):

О веданической «революции» в математике. Письмо №13

В дополнение ко всемц сказанному

Заткнуть фонтан Ипатьевского грязноречия, как очевидно, невозможно. Мадам обращается к своему оппоненту, как надзирательница в тюрьме для малолетних заключенных. За это я и присвоил ей чин: «унтершарфюрер».

⁸⁴ Тит Лукреций Кар, «О природе вещей», книга I, 1–2, 24–27; перевод с латинского Ф. Петровского.

⁸⁵ Titus Lucretius Carus, «De rerum natura», Liber I, 26. В оригинале «Memmiadae nostro», т.е. «наш Меммиёнок» – юноша из рода Меммиев (возможно, это Гай Меммий, о котором известно, что он был оратором, тоже поэтом и умер 6 лет после Лукреция). Всего в поэме Лукреций обращается к Меммию 12 раз. Меммий был знаменитый римский род; один его представитель – Квинт Меммий – упоминается в Библии: Вторая книга Маккавейская, гл.11, 34.

⁸⁶ «От Луки святое благовествование», гл. 1, 3; «Деяния святых апостолов», гл.1, 1.

⁸⁷ Σύρος – см. МОИ № 101, стр.5.

⁸⁸ <http://moitribunal.blogspot.com/>

⁸⁹ Это общение протоколировано в выпусках МОИ № 25, № 27, № 29, № 31, а также в документах «Математического суда» <http://moitribunal.blogspot.com/>.

⁹⁰ https://drive.google.com/file/d/0B1Iaodfse_orUjAzWGg0a2k1MjQ/view?usp=sharing

Но истина дороже всего и на странности поведения уважаемой Марины Олеговны не будем обращать внимания.

Начнем по порядку.

Сначала приведу цитату из одной известной книги, которая называется «Справочная книга по математической логике. Ч. II Теория множеств. Москва «Наука», 1982». Это перевод с английского. Оригинал издан в одном томе, перевод разбит на 4 отдельные книги. В книге приводятся статьи разных авторов. Глава 1 «Аксиомы теории множеств» написана Дж. Р. Шенфильдом (J.R. Shoenfield). Имеется перевод его учебника по математической логике М.: Наука, 1975)

На стр.19 этого издания читаем:

Довольно удивительным является то, что мы можем определить все обычные математические объекты и доказать их свойства в ZFC.

Несомненно, это показывает, что ZFC является очень сильной аксиоматической системой. Тем не менее мы не склонны преувеличивать это. Было бы ошибочным и бесполезным отождествлять математику с ZFC или рассматривать ZFC как основание математики. Такой взгляд привел бы к тому, что объекты неопределимые в ZFC, не считались бы математическими объектами, а факты, недоказуемые в ZFC, – математическими фактами. Это было бы бесплодным ограничением математики.

То, что программистский подход к математике, предлагаемый Эгле – Ипатьевой безусловно является попыткой бесплодного ограничения математики – это факт. Кроме ограничения предполагается ведь произвести некоторую довольно радикальную чистку. Математик по имени Марина Олеговна Ипатьева научной общественности неизвестен и подобного рода работу ей доверить нельзя.

Предвидя контратаку со стороны мадам Ипатьевой скажу, что я себя великим математиком не считаю. Я скромный последователь таких действительно великих математиков как академики Александр Данилович. Александров (мой непосредственный учитель), Сергей Львович Соболев и Михаил Алексеевич Лаврентьев.

Вот еще цитата из текстов Ипатьевой.

(МОИ [№25](#) сноска на стр. 52) Общеизвестно, что у математиков определения числа нет. Значит, отказ Решетняка дать свое определение числа означает, что и он тоже не знает, что такое число. А что самое худшее – и знать не желает.

В своей личной библиотеке я нашел 10 книг, в каждой из которых приводится определение числа. В частности, на стр. 18 указанной выше книги приводится определение того, что есть натуральное число.

Процитированное место находилось в общем обильном потоке решетняковских глупостей, и я, пробежав глазами «Письмо №13» (в файле с номером 14) и убедившись, что оно, как всегда у этого академика, пусто и никакой аргументации не содержит, не стала на него реагировать. Лишь спустя почти месяц, когда мне понадобилось объяснить В.В. Сухорукову разницу между теми определениями числа, которые дает Веданская теория, и какие даются традиционно математиками, я вспомнила, что Решетняк наконец-то (после почти полутора лет уклонения!) указал на какое-то конкретное определение числа у математиков. Тогда я откопала это указание и отыскала место, на которое Решетняк ссылается. (По его путаному рассказу было непонятно, в которой именно из упомянутых им книг нужно искать ту стр.18, но я достала все названные им книги – 5 штук – и нашла).

3. Некоторые моменты предыстории вопроса о числах

Наши требования к математикам представить такое определение числа, которое они желают противопоставить Веданскому определению,⁹¹ имеют длинную историю.

Процитированные Решетняком мои слова⁹²

Общеизвестно, что у математиков определения числа нет. Значит, отказ Решетняка дать свое определение числа означает, что и он тоже не знает, что такое число. А что самое худшее – и знать не желает

⁹¹ Веданское объяснение сущности чисел излагалось очень много раз; укажу здесь на МОИ [№ 6](#), стр.21 (и окружающие), на МОИ [№ 42](#), стр.5 (и окружающие), на МОИ [№ 36](#) (весь сборник) и МОИ [№ 37](#).

⁹² Это сноска 44 в МОИ [№ 25](#) на стр.53, а не на странице 52, как указывает Решетняк.

– эти слова в общем-то уже были издевательством над Решетняком, уклоняющимся от ответа, и над математиками вообще. Конечно, какие-то определения числа математики в своих учебниках и справочниках приводят. Но характерно, что все они (математики) боятся открыто противопоставить эти свои определения тому определению, которое дает Веданская теория. Решетняк тоже боялся и полтора года не давал. (А теперь хвастается, что у него в книгах 10 определений, но – что характерно! – опять же не цитирует ни одно из них!). Но на этот раз хотя бы страницу назвал – и вскоре мы заглянем на эту страницу. Надо сказать, что это поистине геройский поступок нашего академика – такое случилось впервые за 35-летнюю историю Веданской теории. А в этой истории были и такие темпераментные призывы, как, например, эти слова, адресованные Виталию Малышеву 4 года назад 31 марта 2012 г. в 15:03 (МОИ № 53, стр.77–78):

Веданская теория объясняет десятки всевозможных феноменов, связанных с ментальной деятельностью человека. Но не будем разбрасываться, и сосредоточимся на одном – на самом первом, ею объясненном: на числах.

Виталий Федорович, Вы в школе учились? Арифметику проходили? Что такое число знаете? Прекрасно!

Тогда дайте определение: что такое числа – от натуральных до комплексных! Разрешается использовать любые «шпаргалки»: вся мировая наука, все ресурсы Интернета, все библиотеки в Вашем распоряжении. Пусть это определение сформулировал Марков или Пенроуз, или кто угодно – Вы только приведите это определение!

Если хотите, обратитесь за помощью, скажем, к профессору Манину Юрию Ивановичу (Открытое письмо к которому фигурировало в конце книги R-POTI-1 = МОИ № 41, но который «спрятался в кустах»). Адрес его е-почты: manin@ix.netcom.com. Напишите ему: «Товарищ профессор, выручайте, дайте определение числа! Оччень надо!».

Или напишите математику-академику Васильеву Виктору Анатольевичу (его адрес vva@mi.ras.ru): «Господин академик, спасайте, объясните, что такое число!».

И если Вы сможете такое определение привести (при помощи Манина, Васильева или кого угодно), то я за два часа разнесу это определение «в пух и в прах» и покажу, что оно ни по каким критериям и параметрам не может состязаться с определением, данным Веданской теорией. (Так, во всяком случае, я думаю, но у Вас есть возможность продемонстрировать, что я ошибаюсь).

Да есть ли у вас всех – у Вас, у Манина, у Васильева и всех остальных – хоть какие-то задатки к логическому мышлению? Неужели никто из вас не способен понять, что может иметь место только одно из двух: либо вы ДАЕТЕ объяснение сущности чисел, лучшее и более научное, чем у ВТ, – и тогда ВТ не нужна и действительно «сказка про белого бычка»; либо вы НЕ в состоянии дать такое объяснение – и тогда ВТ и есть подлинная наука о сущности чисел.

А вы все занимаетесь элементарной демагогией: объяснение сущности чисел вы НЕ даете – и, разумеется, вы не в состоянии его дать, – но в то же время объяснение ВТ вы отрицаете и игнорируете (конечно же – БЕЗ указания каких-либо конкретных возражений). Но мне, Виталий Федорович, эта демагогия так осточертела за 33 года истории ВТ, что теперь я ее истребляю «на корню», и все, кто к ней прибегают, будут морально перебиты – независимо от званий и рангов.

И вопрос о числах далеко не единственный, таких вопросов – уйма.

Нечего и говорить, что никакое определение числа тогда так и не было дано. Суть сказанного выше не в том, что у математиков вообще нет определений числа, а в том, что «я за два часа разнесу это определение «в пух и в прах» и покажу, что оно ни по каким критериям и параметрам не может состязаться с определением, данным Веданской теорией». Вот этого они и боятся, и это я им обещаю сделать.

Первое предложение (17 августа 2014 г. в 13:58) Решетняку дать свое определение числа было сделано менее темпераментно, чем Малышеву, вполне вежливо и сдержанно (МОИ № 25, стр.22):

В рамках же настоящей переписки Вам предлагается ответить:

... в) что такое число?

Последний вопрос предназначен для того, чтобы открыть Вам дверь в Веданскую теорию и позволить Вам приблизиться к подлинным основаниям математики. Когда Вы почувствуете (возможно, с моей помощью) свои неудачи дать какое-либо другое объяснение понятию числа, отличное от того, что дается Веданской теорией, то лучше поймете, для чего эта теория и что она дает.

Такова предыстория вопроса. Итак, Решетняк после 1,5 лет уклонений и колебаний назвал наконец-то страницу, где дается определение числа, которое он противопоставляет нашему

определению по Веданской теории, и оказался первым математиком, кто вообще осмелился такое сделать. И вот, я эту страницу нашла и открыла.

Но оказалось, что книга, на 18-ю страницу которой указывал Решетняк, сама по себе настолько интересна и поучительна, что я не удержалась и решила всю ее начальную часть (предисловия и две первые главы) перенести в свой Альманах и прокомментировать (хотя перенос такого сложного математического текста – дело нелегкое, т.к. его нельзя ни расшифровать при помощи OCR программ, ни нормально ввести с клавиатуры).

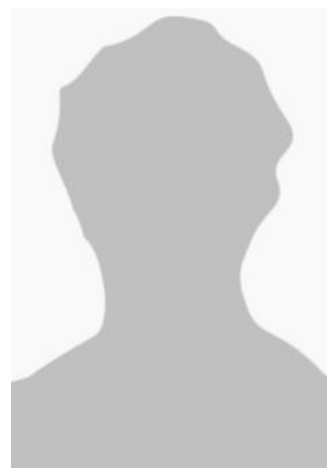
Итак, ниже дается начальная часть книги «Справочная книга по математической логике» под редакцией Дж. Барвайса (Handbook of Mathematical Logic. J. Barwise (ed). North-Holland publishing company. Amsterdam, New York, Oxford, 1977). Часть II «Теория множеств». Перевод с английского В.Г. Кановея. Под редакцией В.Н. Гришина. Москва «Наука», 1982. Файл, служивший мне оригиналом, читатель может найти здесь: <https://yadi.sk/d/Sl4ygxJJqzntp>.



Kenneth Jon Barwise⁹³ – редактор английского издания 1977 года.



Владимир Григорьевич Кановея⁹⁴ – переводчик русского издания 1982 года.



В.Н. Гришин⁹⁵ – редактор русского издания 1982 года и автор Предисловия.
(Фото пока не найдено, будет присоединено, когда найду)

⁹³ Kenneth Jon Barwise (1942.06.29 – 2000.03.05), родился в городе Индепенденс штата Миссури в США, ученик Соломона Фефермана в Стэнфордском университете, преподавал в Йельском университете, потом в Стэнфордском, потом в Университете Индианы. Данную книгу редактировал в возрасте 33–35 лет, будучи доцентом (assistant professor) в Йельском университете.

⁹⁴ Владимир Григорьевич Кановея (род. 1951.01.28), теперь доктор физико-математических наук, профессор; с 2002.10.20 работает в Институте проблем передачи информации им А.А. Харкевича (РАН). Когда издавался перевод, ему был 31 год. Кановея является потенциальным номинантом для операции *Milliaria* (см. документ [M000](#)); адрес его e-почты: kanovei@iitp.ru.

⁹⁵ В.Н. Гришин в свое время был аспирантом Кафедры математической логики и теории алгоритмов на Механико-математическом факультете МГУ. Это пока всё, что я знаю из его биографии.

Предисловия книги «Барвайс – 2»

Предисловие редактора русского перевода

Настоящая книга состоит из ряда глав⁹⁶ и добавления, написанных видными специалистами по теории множеств. Каждая глава – это самостоятельная статья. Она содержит в основном замкнутый в себе материал и может читаться независимо от остальных глав сборника. Главы очень разные по характеру и подробности изложения. Например, глава 2, написанная Т. Йехом, представляет собой весьма беглый обзор проблематики и результатов, относящихся к аксиоме выбора. Написанная Берджесом глава 4 о методе вынуждения, напротив, дает довольно подробное изложение доказательств некоторых основных результатов. Упор в справочном руководстве по теории множеств сделан на разъяснение основных идей и методов аксиоматической теории множеств, а не на охват как можно большего числа результатов. В этом отношении наиболее показательна глава 5 о комбинаторике,⁹⁷ написанная К. Кюненом. Вводная глава, принадлежащая Дж. Шенфилду, посвященная аксиоматике системы Цермело–Френкеля, доступна широкому кругу читателей. Наиболее трудна для чтения написанная К. Девлином глава 5 об аксиоме конструктивности, излагающая громоздкие конструкции и насыщенная большим количеством формул. В книгу включены также топологические приложения аппарата аксиоматической теории множеств. В главах 6 и 7, принадлежащих М. Рудин и И. Юхасу, рассматриваются топологические следствия аксиомы Мартина и различных комбинаторных принципов, вытекающих из аксиомы конструктивности Гёделя.

Было решено перенести в русский перевод второй части справочника из его третьей части – Теории рекурсии – главу о дескриптивной теории множеств, написанную Д. Мартином (глава 8 данной книги). Дело в том, что материал этой главы как по своим истокам, так и применяемым в доказательствах методам тесно связан с аксиоматической теорией множеств. К сожалению, Мартин не включил в свою главу интересный материал, связывающий дескриптивную теорию с основными идеями аксиоматической теории (с конструктивными по Гёделю множествами и методом вынуждения). Этот пробел восполняется в добавлении переводчика к главе 8, в котором рассматриваются также некоторые классические дескриптивные проблемы, не нашедшие места в самой главе, и обсуждается их состояние на сегодняшний день. Кроме того, дескриптивная теория множеств представляет такую область теории множеств, в которой применяется весь арсенал средств аксиоматической теории множеств. Поэтому обращение к этому материалу позволяет показать «в работе» методы аксиоматической теории, изложенные в разных главах книги. Более подробно о выборе темы для дополнения рассказано в предисловии переводчика к добавлению.

Следует отметить, что по охвату материала настоящая книга на самом деле не может служить справочником по теории множеств. Это сборник статей, рассчитанный на широкий круг читателей-математиков. Цель ее – дать представление об аксиоматической теории множеств, основанной на аксиоматике Цермело–Френкеля.

Аксиоматическая система Цермело–Френкеля хорошо отражает свойства интуитивного мира множеств, описанного в главе 1. Они служат основой для других более сильных систем, также не вступающих в явное противоречие с интуитивным универсумом главы 1. На ее основе осуществляется естественная формализация понятий и доказательств реальной классической математики, благодаря чему результаты о невыводимости в системе Цермело–Френкеля имеют особую значимость.

Вопросы, не освещенные подробно в главах данной книги, можно найти в достаточно представительной библиографии к этим главам.

При переводе были исправлены незначительные неточности и опечатки без специальных оговорок. Немногочисленные ссылки на материал других частей справочника оформлены следующим образом. Если в английском издании имеется ссылка на главу 3 части III (например), то в настоящем переводе написано: см. гл. 3 «Теории рекурсии».

В.Н. Гришин

⁹⁶ **МОИ 2016-03-06:** Всего в книге 8 глав + Добавление Кановея о проективной иерархии Лузина.

⁹⁷ **МОИ 2016-03-02:** Должна быть Глава 3 (небрежное издание, если на первой же странице такая опечатка).

Введение

Бурное развитие теории множеств, последовавшее за фундаментальными открытиями Гёделя и Коэна, привело к многочисленным результатам о непротиворечивости в различных областях математики. Основной целью настоящей книги является изложение ряда основных методов и результатов теории множеств в доступном виде.

Вводная глава написана Дж. Шенфилдом. В ней на основании анализа интуитивного теоретико-множественного универсума вводятся и рассматриваются аксиомы системы Цермело–Френкеля ZF. Мы настоятельно рекомендуем прочесть эту главу каждому, кто не очень искушен в аксиоматической теории ZF, а также каждому, кто считает, что аксиомы придуманы только лишь для того, чтобы избежать парадоксов.

Следующая глава, написанная Т. Йехом, раскрывает особую роль аксиомы выбора AC. Автор анализирует характерные примеры использования аксиомы выбора в математике и показывает, как выглядела бы математика без аксиомы выбора. В этой главе также содержится обзор результатов о непротиворечивости (совместимости) и невыводимости, относящиеся к AC.

Предложение ϕ языка ZF называется *совместимым* с ZF, если мы не можем вывести его отрицание $\neg\phi$ из аксиом ZF. Иными словами, ϕ совместимо с ZF, если теория ZF + ϕ непротиворечива. Предложение ϕ называется *невыводимым* в ZF, если ϕ не является теоремой ZF, т.е. если $\neg\phi$ совместимо с ZF. Имеются два способа доказательства совместимости математических предложений с аксиомами теории множеств – легкий способ и трудный способ.

Легкий способ доказательства совместимости некоторого предложения ϕ с ZF состоит в подыскании другого предложения ψ , совместимость которого с ZF уже известна, и в доказательстве средствами ZF того, что из ψ следует ϕ . Известно несколько хороших кандидатов на роль предложения ψ . Математик, знакомый с ними, может вообще не знать логики, получая результаты о непротиворечивости. Можно упомянуть, в частности, аксиому Мартина MA, континуум-гипотезу CH и более сильный принцип Йенсена $\diamond$. Аксиома Мартина и ее приложения рассматриваются в шестой главе, написанной М. Рудин. Приложения CH и $\diamond$ рассматриваются в третьей и седьмой главах, написанных соответственно К. Кюненом и И. Юхасом.

Трудный способ состоит в построении моделей. Именно, если мы хотим доказать, что некоторое предложение ϕ совместимо с ZF, то мы строим модель $\mathcal{M}$, в которой истинны все аксиомы (а следовательно, и теоремы) теории ZF, а также истинно рассматриваемое предложение ϕ .

Первой такой моделью был построенный Гёделем универсум L всех конструктивных множеств. Он является очень естественной моделью – именно, наименьшей моделью теории ZF, содержащей все ординалы. Гёдель доказал, что в модели L истинны аксиома выбора AC и континуум-гипотеза CH. Следовательно, AC и CH совместимы с аксиомами теории множеств. Многие красивые и более глубокие свойства этой модели такие, как принцип $\diamond$, были открыты Йенсеном. Эти результаты Гёделя и Йенсена представлены К. Девлином в главе 5.

Второй чрезвычайно плодотворный метод построения моделей – это метод вынуждения Коэна. Сам Коэн использовал свой метод для установления невыводимости AC и CH в ZF. Впоследствии этот метод был усовершенствован и упрощен Соловеем и другими математиками и в настоящий момент является мощным и не таким уж сложным методом получения результатов о непротиворечивости. Берджес в главе 4 излагает метод вынуждения в доступном для математиков-нелогиков виде, позволяющем им получать собственные результаты о непротиворечивости. Предварительный материал этой главы (об абсолютности) используется в пятой главе.

Написанная К. Кюненом третья глава посвящена комбинаторике и не предполагает никакого знакомства читателя с логикой. В ней рассматриваются инфинитарные комбинаторные принципы теории множеств (некоторые из этих принципов возникли из работ по логике), нашедшие широкое распространение. В частности, показано, что AC, CH и $\diamond$ можно рассматривать как возрастающие по силе принципы «перечисления», и указаны примеры их использования в математике. Обсуждается также теорема Рамсея и ее обобщения на несчетные кардиналы. Заканчивается глава введением в теорию больших кардиналов, появляющихся при анализе указанных обобщений теоремы Рамсея. В добавлении к этой главе рассмотрены большие кардиналы другой природы.

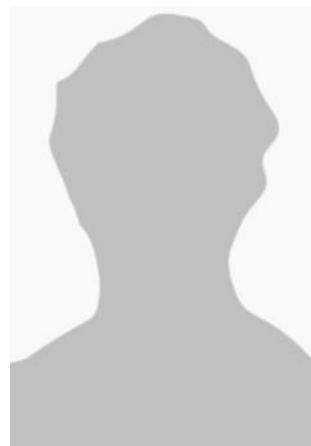
К. Кюнен



Герберт К. Кюнэн⁹⁸ –
автор Введения.



Джозеф Р. Шенфилд⁹⁹ –
автор Главы 1.
(Фото пока не найдено, будет
присоединено, когда найду)



Томас Дж. Йех¹⁰⁰ –
автор Главы 2.
(Фото пока не найдено, будет
присоединено, когда найду)

Глава 1. Аксиомы теории множеств

Джозеф Р. Шенфилд

§1. Введение

В принципе аксиоматическая система строится следующим образом. Сначала мы выбираем основные понятия и как можно полнее разъясняем их природу. Затем пишем аксиомы для этих понятий. При этом наши разъяснения должны сделать очевидной истинность написанных аксиом.

Попытаемся представить аксиомы теории множеств именно таким образом. Начнем с объяснения понятия множества. Наше объяснение может показаться слишком сложным математику, считающему, что он понимает множества достаточно хорошо. Мы увидим, однако, что это объяснение довольно полезно, и не только для проверки аксиом теории множеств, но и для введения новых аксиом, а также для доказательства теорем о множествах.

Представленные здесь идеи развивались постепенно на протяжении последнего столетия. Но они редко появлялись в печати в последовательном изложении, хотя и хорошо известны для большинства специалистов по теории множеств. Этим объясняется отсутствие библиографии.

§2. Множества и образование множеств

Как объяснить понятие множества? В первом приближении множество есть совокупность объектов. Множество образуется путем отбора определенных объектов, называемых его элементами; множество полностью определено своими элементами.¹⁰¹

⁹⁸ **МОИ 2016-03-19:** Herbert Kenneth Kunen (род. 1943.08.02), *Ph.D.* получил в Стэнфордском университете у Дана Стюарта Скотта; теперь *emeritus professor* математики в Висконсинском университете в Мадисоне. Во время издания книги ему было 34 года.

⁹⁹ **МОИ 2016-03-19:** Joseph Robert Shoenfield (1927.05.01 – 2000.11.15), родился в Детройте; *PhD* получил в 1953 году в Мичиганском университете у Раймонда Уайлдера; с 1952 преподавал в Университете Дьюка, где и стал *Emeritus* на 40 лет позже в 1992 году. Во время издания книги ему было 50 лет.

¹⁰⁰ **МОИ 2016-03-19:** Thomas Jech (чешское Tomáš Jech), родился 1944.01.29 в Праге. Окончил Карлов университет в Праге у Петра Вопенки; работает в Институте математики АН Чешской Республики. Во время английского издания книги ему было 33 года.

¹⁰¹ **(*1) МОИ 2016-03-06:** Шенфилд излагает обычный подход математиков к множествам, но этот подход неточен. Веданская теория (ВТ) предлагает гораздо более точный подход. Вкратце (и несколько упрощенно) его можно изложить так. Вообще множества, как они будут в дальнейшем фигурировать в теориях (как в теории, излагаемой здесь Шенфилдом, так и в Веданской теории) есть внутренние структуры (мозгового) компьютера. Однако ограничиться этим представлением затруднительно, потому что тогда из понятия множества оказываются исключенными все множества, составленные из предметов внешнего мира (например, «множество семи уток, плавающих в пруду»). Поэтому ВТ в первом прибли-

Элементы множеств могут быть объектами любой природы. В частности, мы хотим рассматривать любое множество как объект и поэтому разрешим ему быть элементом другого множества. Объекты, не являющиеся множествами, но используемые в качестве элементов множеств, называются *праэлементами*.¹⁰²

Даже без помощи праэлементов мы можем построить достаточно много множеств. Можно образовать пустое множество $\emptyset$; множество $\{\emptyset\}$, состоящее из единственного элемента $\emptyset$; множество, элементами которого являются только $\emptyset$ и $\{\emptyset\}$, и т.д. Ограничимся только такими множествами и будем использовать буквы x, y, z для их обозначения. Мы объясним позже, почему это ограничение ничего не упускает.¹⁰³

Итак, мы приходим к тому, что любое множество x образовано отбором тех множеств, которые являются элементами x . Существуют ли какие-нибудь ограничения на такой способ образования множеств? Как показывают парадоксы теории множеств, ограничения действительно существуют.

Напомним парадокс Рассела. Пусть r есть множество, элементами которого являются все такие множества x , что x не есть элемент x . Тогда для любого множества x будет

$$x \in r \leftrightarrow x \notin x \quad (1)$$

Подставив r вместо x , получим противоречие.

Объяснение в сущности не сложно. Когда мы строим какое-то множество r , выбирая его элементы, мы еще не имеем r как объект и поэтому не можем использовать его в качестве элемента множества r .¹⁰⁴ По той же причине некоторые другие множества также не могут быть

жении разделяет понятие множества на две части: **реалия** (в нашем примере это сами утки) и **номиналия** (структура, которая строится в мозговом компьютере и соответствует реалии). «Построить множество» означает создать номиналию, привязывая ее к каким-то ранее существовавшим структурам в компьютере. Во втором приближении происходит обобщение понятий реалий и номиналий. Номиналии (как структуры) могут строиться соответствующими не только предметам внешнего мира (как в случае с утками), но и соответствующими внутренним структурам компьютера или воображаемым объектам. В этом случае номиналия так же реальна (как структура в компьютере), а соответствующая ей реалия «абстрактна», «идеальна» и т.п., т.е. во внешнем мире не существует (но ее можно предполагать «существующей»). В итоге на этом уровне мы можем выделить и различать 4 объекта, связанные с понятием «множество»: 1) материальная реалия во внешнем мире; 2) номиналия, соответствующая материальной реалии; 3) номиналия, соответствующая несуществующему в материальном мире объекту; 4) сам этот несуществующий в материальном мире объект как реалия, существующая в «платоновском мире идей». Все операции, которые Шенфилд (или кто-нибудь другой) будет производить над «множествами», на самом деле производятся над их номиналиями (объекты 2 и 3), но рассматриваются как проводимые над соответствующими реалиями (объекты 1, 4). Эту картину в дальнейшем следует всегда держать в голове.

¹⁰² **МОИ 2016-03-06:** Деление объектов на «множества» и «праэлементы», разумеется, условно и относится только к какому-то конкретному построению или рассуждению, в рамках которого «праэлементы» никогда не рассматриваются как множества. Но в рамках другого построения или рассуждения те же самые «праэлементы» уже могут рассматриваться как множества, состоящие из других праэлементов. Поэтому вместо описываемого Шенфилдом подхода лучше использовать обычный, стандартный программистский подход: для какого-нибудь построения (т.е. для программы или системы программ) есть входная информация («материалы», «праэлементы»), и данная программа (данное построение) не интересуется, откуда эта входная информация взялась, кем и как была построена.

¹⁰³ **МОИ 2016-03-16:** Это «ограничение» упускает очень многое, в сущности, оно упускает ВСЁ. Шенфилд излагает традиционный подход математиков к теории множеств (и тем самым к основаниям математики вообще), и этот традиционный подход заключается в том, что начинают какое-то гипотетическое, в сущности – игрушечное – (но программистское!) построение («от $\emptyset$ ») вместо того, чтобы рассмотреть те мозговые программы, которые отрабатывают в человеческих головах в действительности. Здесь самая фундаментальная развилка, у которой разошлись дорога теории множеств традиционных математиков и дорога Веданской теории. ВТ не делает этих игрушечных построений, а вместо этого берет и анализирует реальные мозговые программы, задействованные в математическом мышлении.

¹⁰⁴ **МОИ 2016-03-16:** Шенфилд (вслед за всей «традиционной математикой») делает (программистское!) построение, но делает это крайне непрофессионально. В данном месте этот непрофессионализм уже начинает проявляться. У Шенфилда множества строятся (и до сих пор всё соответствует программистским представлениям), но, однажды построенные, множества у Шенфилда остаются вечными и застывшими. Для профессионала же естественно рассматривать структуры, которые могут (программой) как строиться, так и разрушаться, в общем – модифицироваться. Тогда «парадокс Рассела» заключается в том, что множество r то включается в множество x (когда r еще не является элементом x), то исключается из него (когда оно уже является его элементом). Словом, мы здесь имеем заикливание строящей программы

элементами r . Например, предположим, что $z \in y$. Тогда мы не можем образовать множество y , пока не построено z . Следовательно, при построении z у нас нет в распоряжении множества y , и поэтому y не может быть элементом z . Иными словами, элементами множества z могут быть лишь те множества, которые построены раньше¹⁰⁵ z .¹⁰⁶ Таким образом, для построенного выше множества z условие (1) выполняется только для множеств, построенных раньше r ; поэтому нельзя подставлять r вместо x .

Продолжая этот анализ, приходим к следующей схеме. Множества строятся последовательно по шагам. Для каждого шага S имеются шаги, предшествующие шагу S , т.е. осуществляющиеся раньше шага S . Каждая совокупность, которую мы строим на шаге S из множеств, построенных на шагах раньше S , является множеством.¹⁰⁷ Нет других множеств, кроме построенных на одном из шагов.

Эта схема¹⁰⁸ достаточно ясно поясняет понятие множества в терминах понятий *шаг* и *раньше*.¹⁰⁹ Что можно сказать об этих понятиях? Несомненно, отношение *раньше* должно

(явление для программистов до предела элементарное и знакомое). Именно так «парадокс Рассела» объяснялся в ВТ (см., напр., МОИ № 5, стр.72 или МОИ № 6, стр.66).

¹⁰⁵ Слово «раньше» понимается здесь скорее в логическом, чем во временном смысле, аналогично тому, что мы имеем в виду, когда говорим, что одна теорема должна быть доказана раньше другой.

¹⁰⁶ **МОИ 2016-03-16:** Здесь всё тот же узкий взгляд на вещи. Профессиональный взгляд не старается накладывать ограничения типа «раньше–позже», а рассматривает вообще динамику изменений существующих в данный момент структур, с которыми программа оперирует: какие структуры будут существовать в тот момент, когда программа выполняет какое-то определенное свое действие – при этом учитывая не только то, что «построено», но и то, что удалено, перемещено и т.д.

¹⁰⁷ Заметим, что множество, построенное на шаге S , может быть построено и на любом последующем шаге. Можно было бы организовать схему так, что каждое множество строилось бы только на одном шаге. Однако нет оснований стремиться к этому. **МОИ 2016-03-16:** Это замечание Шенфилда требует комментария, так как его непрофессионализм уже приводит к затуманиванию дела. Если множество есть структура, создаваемая некоторым процессором (программой), то она (структура) не может быть построена на разных шагах: на другом шаге будет построена уже другая структура. В терминах данной выше сноски (*1) это будут две разные номиналии. Но они могут соответствовать одной и той же реалии, и в этом смысле они тогда будут эквивалентными. Шенфилд уже теряет ясное понимание того, что же, собственно, строится его процессором: номиналия или реализация?, и что у него есть множество: номиналия или реализация? Веданская теория здесь намного точнее и яснее.

¹⁰⁸ **МОИ 2016-03-16:** Итак, Шенфилд (вслед за всей «традиционной математикой») при создании теории множеств совершенно отчетливо рассуждает о некотором абстрактном процессоре, результатами действия которого являются множества. Но у Шенфилда (и у других математиков) почему-то не возникают (естественные для профессионала) вопросы: «А что это за процессор? В какой системе он работает? Кто его программирует?» и т.д. Веданская теория как раз и есть подход к тому же предмету, что у Шенфилда, но только осуществленный на гораздо более высоком профессиональном уровне. Ответы ВТ на приведенные вопросы таковы: «Процессор этот мозговой. Работает он в человеческих головах, хотя аналогичные процессы могут быть реализованы и в промышленных компьютерах, в роботах и т.д. В этом процессоре осуществляется самопрограммирование» – и потом поясняется, что это такое и как эта вещь действует. Далее мысль профессионала уходит в такое русло: «Какими данными оперирует этот процессор? Как они кодируются? Как описать программы этого процессора?» – и в результате появляются понятия *номиналий* и *реалий*, изобретаются язык Эуклидол и система Эуклидос (см. МОИ № 34, стр.23, 32; МОИ № 35 весь сборник). Словом, при профессиональном подходе следует изучать и уточнять всё, что касается этого процессора, его программ и структур данных, которыми он оперирует. Он может оставаться процессором абстрактным, но его свойства изучаются, описываются и демонстрируются на примере некоторого гипотетического процессора, как это делал классик науки программирования Дональд Кнут со своей «машиной MIX» (Кнут Д. «Искусство программирования для ЭВМ, т.1. Основные алгоритмы». Мир, Москва, 1976; перевод с: Knuth D.E. «The art of the computer programming. Vol.1. Fundamental algorithms». California Institute of technology. Addison-Wesley Publishing Company. Reading, Massachusetts; Menlo Park, California; Don Mills, Ontario, 1968). Но ни у Шенфилда, ни у других математиков мысль в таком направлении не уходит. Они начинают действовать вокруг этого процессора так, как могут действовать только абсолютные дилетанты. Мы сейчас увидим, что они вытворяют.

¹⁰⁹ (*2) **МОИ 2016-03-17:** Присвоим обозначение тому процессору, о котором здесь говорит Шенфилд, не называя и не оговаривая его явно. Назовем этот процессор «машиной PIM» (от латинских слов «processus, interpretari, multitudo»). Допустима также русская аббревиатура ПИМ (процессор интерпретации множеств). Латинская и русская аббревиатуры для нас в дальнейшем являются синонимами. «Теория множеств», таким образом, является на самом деле теорией машины PIM. Собственно множества – это то, что PIM может построить. Именно может, а не реально построил. Для того, чтобы ПИМ что-то

частично упорядочивать шаги; и это является единственным свойством указанного отношения, необходимым для наших аксиом.

Шаги важны для нас потому, что они дают возможность строить множества. Предположим, что x есть совокупность множеств, а S есть такая совокупность шагов, что каждый элемент множества x строится на каком-нибудь шаге из S . Если существует шаг после всех шагов из S , то на этом шаге можно построить множество x . Поэтому возникает следующий фундаментальный вопрос¹¹⁰: если дана совокупность S шагов, то существует ли шаг, следующий за каждым шагом из S ?

Мы хотели бы иметь положительный ответ на этот вопрос всегда, когда это возможно. Теоретико-множественные парадоксы не разрешают каждой совокупности множеств быть множеством,¹¹¹ но мы избежали парадоксов, ограничившись множествами, которые строятся на каком-то шаге. И мы хотим иметь достаточно много шагов, чтобы не слишком ограничивать понятие множества.

Тем не менее ответ на наш вопрос не всегда может быть положительным. Например, если S есть совокупность всех шагов, то, разумеется, нет ни одного шага после всех шагов из S .

Возможный ответ на наш фундаментальный вопрос таков: если можно представить себе ситуацию, когда все шаги из S осуществлены, то существует шаг после всех шагов из S . В случае, когда S содержит все шаги, мы не можем представить себе такую ситуацию, поскольку всегда имеем в виду следующий шаг.¹¹² Но это в лучшем случае довольно неопределенный ответ, так как, вообще говоря, не всегда ясно, что мы можем, а что не можем себе представить. Тем не менее этот ответ дает полезный ключ для получения более ясных принципов, на которых основаны наши аксиомы.

В частности, существуют три случая, в которых наш неопределенный ответ приводит к выводу, что существует шаг после всех шагов из S . Первым является случай, когда S состоит из единственного шага. Вторым – когда S состоит из бесконечной последовательности $S_0, S_1 \dots$ шагов. И третьим – тот случай, когда мы имеем множество x и шаг S_y для каждого y из x , и S состоит из всех таких шагов S_y .

В первых двух случаях мы отчетливо можем представить себе ситуацию, когда все шаги из S уже осуществлены. В третьем случае можно рассуждать следующим образом. Если какое-то y из x построено, то мы считаем шаг S_y осуществленным. Когда мы дойдем до шага, на котором строится множество x , каждое y из x уже будет построено, и, следовательно, каждый шаг S_y из S будет осуществлен.

реально построил, надо сначала этот процессор реализовать в каком-то конкретном компьютере, написать для ПИМ программу и выполнить ее. Тогда будут существовать реально построенные множества (продукты ПИМа). А пока это не сделано, мы рассуждаем только о потенциальных продуктах ПИМ. Множества – это потенциальные продукты машины ПИМ.

¹¹⁰ **МОИ 2016-03-17:** Этот вопрос уже полностью дилетантский. Он свидетельствует о том, что мысль Шенфилда ушла в какие-то бессмысленные дебри, покинула те области, которые действительно здесь важны (процессор ПИМ, его программы и структуры), и Шенфилд начинает всё рассматривать в совершенно искаженной проекции. Ни для одного программиста никогда нет никакой проблемы в том, чтобы установить, может ли его программа сделать еще один шаг, или не может.

¹¹¹ **МОИ 2016-03-17:** Это плохое и опять же дилетантское решение вопроса. Проблема заключалась в том, что программа построения множеств может заикнуться («парадокс Рассела»). В данном случае достаточно просто знать, в чем состоит суть этого явления. Решение из-за этого делить «совокупности» на «множества» и «не-множества» выглядит каким-то крайне причудливым и диким. Гораздо естественнее считать по-прежнему, что наш процессор строит «множества» (они же и «совокупности»), но возможны ситуации (при определенных входных параметрах – таких, как у расселовского множества r), когда построение множества не может быть завершено (из-за заикливания программы, когда r то вносится в x , то удаляется из него). Однако и при циклирующей программе в каждый отдельный момент времени можно установить, находится ли r в x , или нет. (Нахождение r в x в процессоре ПИМ кодировано какой-то ссылкой между этими двумя номиналиями; когда программа циклит, она то устанавливает, то снимает эту ссылку, и, остановив процессор, можно видеть, есть эта ссылка сейчас, или ее нет). Вообще Шенфилд (и математики вообще) путаются в очень простых вопросах, потому что они намеренно уклоняются от рассмотрения вещей такими, какие они есть, и пытаются во что бы то ни стало уйти в разглагольствования туманные и неопределенные.

¹¹² **МОИ 2016-03-17:** Вот, типичное туманное разглагольствование. Если Шенфилд ввел понятие «совокупность всех шагов», то он уже перешел на актуальную бесконечность, когда всё, что может сделать наш процессор ПИМ, уже сделано. Этот ввод лучше вообще не делать, а если уж делать, то нужно гораздо точнее оговорить, что означает подобная умственная операция.

Мы уже продвинулись в наших рассуждениях достаточно далеко для получения обычных аксиом теории множеств. Всё же остается еще немало темных пятен, дальнейший анализ которых мог бы привести к лучшему пониманию аксиом или к новым аксиомам. По мере дальнейшего продвижения мы будем обращать внимание на некоторые из них.

Конечно, не исключено, что возможен совсем иной анализ понятия множества, и это могло бы привести к совершенно другой системе аксиом. Однако в настоящее время нет анализа понятия множества, существенно отличающегося от предложенного здесь и приводящего к удовлетворительной системе аксиом.

§3. Аксиомы

Перед тем, как обратиться к аксиомам, нужно описать язык теории множеств.¹¹³ Этот язык содержит *переменные для множеств* $x, y, z, \dots$, которые обозначают произвольные множества. Он также содержит символ $\in$ для отношения принадлежности.

Остальные обозначения являются логическими. Мы имеем символ $=$ для *тождественно*. Мы имеем пропозициональные связки: $\neg$ для *не*, $\vee$ для *или*, $\wedge$ для *и*, $\rightarrow$ для *влечет*, $\leftrightarrow$ для *если и только если*. Имеются кванторы: $\forall$ для *для всех*, $\exists$ для *для некоторого*, и $\exists!$ для *существует и*

¹¹³ **(*3) МОИ 2016-03-17:** При профессиональном подходе здесь немедленно возникает вопрос о статусе этого «языка». (Присвоим этому языку название ЯТМ – язык теории множеств). Нормально для введения некоторого языка должны быть определены 5 главных вещей: 1) предмет, который описывается языком; 2) физический носитель высказываний языка; 3) какая система кодирует высказывания; 4) какая система декодирует высказывания; 5) правила кодировки. Например, для первобытного племени при возникновении человеческого языка: 1) предметом были их бытовые ситуации; 2) носитель – звуковые волны воздуха; 3) кодировщик – один соплеменник; 4) декодировщик – другой соплеменник; 5) правила – семантика и грамматика конкретного языка. Для языков программирования: 1) предмет описания – это программа для конкретного компьютера; 2) носитель – раньше перфоленты и перфокарты, теперь монитор и диск; 3) кодировщик – это программист + клавиатура; 4) декодировщик – компьютерный транслятор; 5) правила – определенный язык программирования, например C++. И так далее. Теперь попробуем выяснить эти вопросы для ЯТМа. 1) Что является предметом, описываемым на этом языке? Видимо, множества, т.е. потенциальные продукты «машин ПИМ», и действия над ними. 2) Что является носителем? Очевидно, бумага со знаками и ее эквивалент на дисплее и т.п. 3) Кто кодировщик? В некоторых случаях, очевидно, математик, но может ли кодировщиком быть тот компьютер, на котором мы реализовали ПИМ? 4) Кто декодировщик? Иногда это – другой математик, но может ли эта запись быть предназначенной для дешифровки ее компьютером? С какой целью проводится кодирование и декодирование? Может ли быть так, что кодировка проводится человеком-математиком, а дешифровка – компьютером с работающей на нем системой ПИМ? Если так, то с какой целью компьютер должен дешифровать запись математика? Провести построение множеств? (С первого взгляда видно, что по тем записям, которые ведет Шенфилд, никакие множества ПИМ не построят). Тогда в чем цель этих записей? Даже если дешифровщиком является просто второй человек-математик, то в чем его цель при дешифровке? Словом, статус «языка теории множеств» для профессионала довольно неопределенный. В общем-то это дилетантский язык с весьма неясными целями. Реально записи на этом языке – это просто некоторый конспект, в котором один математик фиксирует узловые моменты своего рассуждения (именно узловые моменты, а не полную информацию), а другой математик по этому конспекту реконструирует ход мысли первого. 5) Правила кодировки весьма несовершенны и не пригодны для компьютерного использования. Разговор Шенфилда о ЯТМе очень неточен, как и всё здесь. Возьмем, например, его предложения: «*Этот язык содержит переменные для множеств $x, y, z, \dots$, которые обозначают произвольные множества. Он также содержит символ $\in$ для отношения принадлежности*». Эти предложения построены по образцу таких предложений как: «Английский язык содержит слово *contain*». Этот образец тоже не очень точен (лучше сказать: «В английском языке есть слово *contain*»). Такое выражение означает, что по правилам кодировки данного языка (пункт 5 выше) данное сочетание звуков (или букв в письменном варианте языка) должно сопоставляться одной определенной ситуации в мире (когда что-то находится в чем-то). Второе высказывание Шенфилда этому образцу соответствует: знак $\in$ соответствует определенной ситуации между объектами, и можно сказать: «В языке ЯТМ есть символ $\in$ » или менее точно: «ЯТМ содержит символ $\in$ ». Но первое высказывание Шенфилда этому образцу соответствовало бы только в том случае, если символы $x, y, z, \dots$ обозначали бы всегда один и тот же объект. Но очевидно, что это не так. Поэтому высказывание Шенфилда «*Этот язык содержит переменные для множеств $x, y, z, \dots$* » является некорректным. (Можно было бы сказать, например: «В этом языке используются символы $x, y, z, \dots$ для обозначения переменных» и т.д.). Это перевод, но очевидно, что в оригинале всё обстоит точно так же. Всё это показывает, что у Шенфилда (и у математиков вообще) нет четкой и ясной картины о том предмете, о котором они говорят. Ее нет нигде – ни в одном их высказывании, о чем бы они ни говорили.

единственно. Переменные, следующие за квантором, могут быть ограничены некоторым множеством; например, $\forall x \in y$ означает для всех x из y .

Конечно, одни логические обозначения могут быть выражены через другие, но мы интересуемся теорией множеств, а не логикой. По этой причине мы не будем формулировать аксиомы логики первого порядка и даже не будем давать точное определение формулы логики первого порядка. Всё это подробно обсуждается в вводной главе 1 «Теории моделей», написанной Барвайсом.

Напомним, как вводятся операции в логических системах. Унарная операция F вводится путем определения $F(x)$ как единственного y такого, что $\varphi(x, y)$ (где $\varphi(x, y)$ есть произвольная формула нашего языка, не содержащая F)¹¹⁴. Точнее, мы сперва доказываем $\forall x \exists! y \varphi(x, y)$, а затем вводим F аксиомой $\varphi(x, F(x))$.

При этом формула $\psi(F(x))$ рассматривается как сокращение для $\exists y (\varphi(x, y) \wedge \psi(y))$. Бинарные и n -арные операции рассматриваются аналогично.¹¹⁵

Замечание. Операции могут зависеть от параметров. Можно определить, например, $F(x) = x \cup y$, так что F зависит от y .¹¹⁶

Теперь обратимся к аксиомам.¹¹⁷ В самом начале нашего анализа было установлено, что любое множество полностью определяется своими элементами. Это и является содержанием нашей первой аксиомы.

Аксиома объемности. $\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y$.

Одним из наиболее важных моментов нашего анализа является утверждение, что определенные совокупности множеств будут множествами. Переводя это в наш язык, мы встречаемся с трудностью: нет возможности говорить о совокупностях в этом языке, если уже не установлено, что они являются множествами. Существуют однако совокупности, о которых мы можем говорить. Именно, если дана формула $\varphi(x)$, то можно выражать определенные суждения о совокупности всех таких множеств x , что $\varphi(x)$.¹¹⁸ В частности, мы можем следующим образом

¹¹⁴ **МОИ 2016-03-17:** Здесь уже намечается тенденция смешивать вместе ПИМ и ЯТМ. Для профессионального взгляда ПИМ – это процессор; его можно реализовать также и в промышленном компьютере; тогда он будет строить какие-то структуры в памяти, которые нами рассматриваются как множества (точнее они: номиналии множеств). ЯТМ же – это язык, в нем используются символы $x, y, z, \dots \in$ и т.д.; высказывания на этом языке кодируют некоторые ситуации в продуктах ПИМа, соответствуют определенным действиям с этими продуктами. А Шенфилд начинает говорить так, будто действия проводятся над символами ЯТМа, а ситуации наблюдаются в самих высказываниях ЯТМа. Уже нет разницы между собственно множествами и высказываниями о них; это становится как будто одно и то же – обычная математическая неточность.

¹¹⁵ **МОИ 2016-03-18:** На самом деле все операции вводятся созданием определенной программы для ПИМа. Будет ли операция унарной, бинарной или n -арной, это зависит от того, сколько у программы входных параметров (выходной параметр подразумевается единственный). То, что говорит здесь Шенфилд (продолжая смешивать вещи ПИМа с вещами ЯТМа) – это чрезвычайно неумелый разговор человека, абсолютно не понимающего тот предмет, о котором он говорит.

¹¹⁶ **МОИ 2016-03-18:** Здесь вопрос терминологии, и терминология Шенфилда неудачна. Если операция $F(x)$ состоит в объединении двух множеств $x \cup y$, то это на самом деле бинарная операция $F(x, y)$. Можно, конечно, назвать ее унарной операцией $F(x)$, зависящей от y , но только непонятно, зачем надо вводить такую путаницу в терминологии.

¹¹⁷ **(*4) МОИ 2016-03-18:** Само обращение к аксиомам является действием ненужным. Это фундаментально неправильный ход. Предметом изучения у Шенфилда являются множества – потенциальные продукты некоторого гипотетического процессора, введенного и описанного самим Шенфилдом (правда, описанного им не совсем умело, но, тем не менее, описанного им самим). Вот этот процессор, его программы и продукты и надо определять и изучать как можно более подробно. А аксиомы – это, если называть вещи своими именами, – совершенно дилетантский способ описания продуктов процессора. Ни один программист никогда так не поступает при описании своей программы. Конечно, аксиомы в какой-то степени описывают множества, т.е. потенциальные продукты ПИМа, но это описание чрезвычайно неумелое, неточное, и применение такого способа описания свидетельствует о тотальной дезориентации автора (в данном случае – Шенфилда) и о полном непонимании им сущности ситуации.

¹¹⁸ **МОИ 2016-03-18:** Здесь, видимо, на неловкое выражение в оригинальном тексте накладывается еще более неловкий перевод. В осмысленном варианте это, видимо, должно звучать так: «...можно выражать определенные суждения о совокупности y всех тех множеств x , которые служат параметром для $\varphi(x)$ ».

сказать, что указанная совокупность есть множество: $\exists y \forall x \{x \in y \leftrightarrow \varphi(x)\}$. Сокращением этого выражения является $\text{Set}\{x: \varphi(x)\}$.¹¹⁹

Нашим первым принципом существования множеств будет следующий: если каждый элемент некоторой совокупности множеств принадлежит определенному множеству y , то эта совокупность есть множество. Чтобы понять это, предположим, что y строится на шаге S . Тогда каждый элемент множества y уже построен раньше S , и, следовательно, таковым является каждый элемент рассматриваемой совокупности. Таким образом, сама совокупность может быть построена на шаге S как множество. Мы выражаем этот принцип следующей аксиомой:

Аксиома выделения. $\forall x(\varphi(x) \rightarrow x \in y) \rightarrow \text{Set}\{x: \varphi(x)\}$.

Заметим, что аксиома выделения является не одной аксиомой, а бесконечным семейством аксиом, содержащим по одной аксиоме для каждой формулы $\varphi(x)$. Название аксиомы объясняется тем, что мы выделяем такие x , которые удовлетворяют $\varphi(x)$, из всех элементов множества y .

Наш следующий принцип утверждает: объединение всех элементов любого множества x есть множество. Предположим, что x строится на шаге S . Тогда каждый элемент множества x построен раньше S , и тем самым каждый элемент элемента множества x также построен раньше S . Это означает, что каждый элемент рассматриваемого объединения уже построен раньше S , и поэтому объединение может быть построено на шаге S . Этот принцип сформулирован в следующей аксиоме:

Аксиома объединения. $\text{Set}\{z: \exists y \in x(z \in y)\}$.

Следующий принцип таков: совокупность всех подмножеств произвольного множества x является множеством. Предположим, что x строится на шаге S . Поскольку каждый элемент множества x построен раньше S , то каждое подмножество множества x строится на шаге S . Таким образом, множество всех подмножеств множества x может быть построено на любом шаге после S .

Чтобы сформулировать этот принцип в виде аксиомы, определяем

$$y \subseteq x \leftrightarrow \forall z(z \in x \rightarrow z \in y).$$

Аксиома степени. $\text{Set}\{y: y \subseteq x\}$.

Нашим следующим принципом будет: если F есть унарная операция, а x является множеством, то совокупность всех таких $F(y)$, что $y \in x$, является множеством. Чтобы проверить это, допустим, что S_y есть шаг, на котором строится множество $F(y)$. Тогда существует шаг после всех шагов S_y . На этом шаге можно построить искомое множество всех таких $F(y)$, что $y \in x$.

Аксиома подстановки. $\text{Set}\{z: \exists y \in x(z = F(y))\}$.¹²⁰

¹¹⁹ **МОИ 2016-03-18:** Выше я уже сказала о ЯТМе, что в нем «правила кодировки весьма несовершенно и не пригодны для компьютерного использования». Здесь можно это пояснить подробнее. В ЯТМе принят «китайский принцип» обозначения, т.е. морфемы языка кодируются разнообразными иероглифами ($\forall, \exists, \emptyset, \cup, \subseteq, \in, \notin, \neg, \wedge, \vee, \leftrightarrow, \rightarrow$ и т.д.), а не «европейский принцип», когда морфемы кодируются комбинацией букв какого-нибудь небольшого алфавита (например, латинского). «Китайскую» кодировку ЯТМа легко можно было бы заменить двух- или трехбуквенной латинской кодировкой. Например, первая аксиома Шенфилда $\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y$ тогда могла бы выглядеть, например, так: all z (z in x ifo z in y) ent x=y. Такой текст легко вводился бы с компьютерной клавиатуры, а по наглядности (если привыкнуть к такой кодировке в той же степени, в какой мы привыкли к ЯТМу) ничуть не уступал бы ЯТМу. Конечно, когда создавался ЯТМ, компьютеров еще не было, но в принципе те же самые проблемы существовали и для типографий: им надо было отливать специальные знаки для математических иероглифов. Поэтому мы можем сказать, что ЯТМ был создан неумело, непрофессионально. И дело не только в том, что есть трудности ввода иероглифов с клавиатуры компьютера или набора в типографии. «Китайский» способ кодировки вообще очень ограниченный. Ну сколько разных значков могут придумать и использовать математики? В любом случае это всего лишь десятки знаков. В то же время даже двухместная кодировка буквами английского алфавита дает $26 \times 26 = 676$ морфем; трехбуквенная – 17576, четырехбуквенная – 456976 морфем, и предела не существует. А данный комментарий я поместила именно в этом месте потому, что здесь Шенфилд (и его предшественники) капитулировали: сами отказались от «китайского» принципа иероглифов и ввели «европейскую» морфему «Set». Вопросами алфавита недостатков ЯТМа не исчерпываются, но о других недостатках в другом месте.

¹²⁰ Здесь снова речь идет о бесконечном семействе (иногда пишут – схеме) аксиом, поскольку аксиому подстановки можно записать в виде $\forall y \exists! z \varphi(y, z) \rightarrow \text{Set}\{z: \exists y \in x \varphi(y, z)\}$, где $\varphi(y, z)$ – произвольная формула. – *Прим. перев.*

Наша следующая аксиома гарантирует существование бесконечного множества. Это не совсем просто, поскольку в нашем языке нет прямого способа выражения бесконечности множества.

Аксиома бесконечности. $\exists x((\exists y \in x \forall z(z \notin y)) \wedge \forall y \in x \exists z \in x \forall w(w \in z \leftrightarrow w \in y \vee w = y))$ ¹²¹.

Покажем, почему аксиома бесконечности истинна. Пусть x_0 – пустое множество, и для каждого n пусть x_{n+1} есть множество, элементами которого являются только элементы множества x_n , а также само x_n . Мы можем построить x_0 ¹²² на любом шаге, и если x_n построено на некотором шаге, то x_{n+1} можно построить на следующем шаге. Предположим, что x_n строится на шаге S_n . Тогда существует шаг после всех шагов S_n . На этом шаге мы можем построить множество x , элементами которого будут $x_0, x_1, \dots$. Это x и будет множеством, существование которого утверждается аксиомой бесконечности.

Элемент y множества x называется *минимальным элементом* x , если y и x не имеют общих элементов. Наша следующая аксиома утверждает, что каждое непустое множество имеет минимальный элемент.

Аксиома регулярности.¹²³ $\exists y(y \in x) \rightarrow \exists y(y \in x \wedge \forall z(z \in y \rightarrow z \notin x))$.

Покажем, почему истинна аксиома регулярности. Скажем, что шаг S *минимален* для x , если некоторый элемент множества x строится на шаге S , но никакой элемент x не строится раньше S . Если шаг S минимален для x и y есть элемент множества x , строящийся на шаге S , то y является минимальным элементом x , поскольку каждый элемент этого множества y строится раньше S и поэтому не может быть элементом x .

Таким образом, достаточно показать, что для каждого непустого множества x существует шаг, минимальный для S . Это часто признается очевидным свойством шагов. Мы приведем однако принадлежащее Д. Скотту доказательство того, что это свойство следует из фактов, которые мы уже знаем о шагах.

Множество x называется *фундированным*, если каждое множество, содержащее x , имеет минимальный элемент. (Конечно, если аксиома регулярности истинна, то каждое множество является фундированным).

Если каждый элемент множества x является фундированным, то таково же и само x . Действительно, пусть $x \in y$. Если x и y не пересекаются, то x есть искомым минимальный элемент множества y .

В противном случае y содержит некоторый элемент множества x , который является фундированным по предположению. Следовательно, множество y снова содержит минимальный элемент.

Для каждого шага S пусть G_S есть множество всех фундированных множеств, построенных перед S . Это на самом деле будет множеством, поскольку оно может быть построено на шаге S , и G_S является фундированным, как показано выше. Если шаг T находится раньше S , то множество G_T фундировано и строится на шаге T раньше S ; поэтому $G_T \in G_S$.

Пусть теперь множество x непусто и строится на шаге S . Пусть y есть множество всех таких G_T , что шаг T находится раньше S и некоторый элемент множества x строится на шаге T . Это y будет множеством, так как каждое G_T построено перед S . Оно непусто (поскольку x непусто) и все его элементы фундированы. Следовательно, y имеет минимальный элемент G_T . Мы утверждаем, что T является минимальным шагом для x . В самом деле, иначе найдется шаг U раньше T , на котором построен какой-то элемент множества x . Как показано выше, $G_U \in G_T$, а поскольку U находится перед S , то $G_U \in y$. Это противоречит выбору G_T . Доказательство закончено.

¹²¹ Таким образом, аксиома бесконечности утверждает существование непустого множества x , одним из элементов которого является пустое множество и которое содержит вместе с каждым своим элементом $y \in x$ множество $z = \{w : w \in y \vee w = y\}$. – *Прим. ред.*

¹²² **МОИ 2016-03-20:** По-моему здесь должно стоять x_n , иначе предложение не понятно. В книге, однако, стоит x_0 . Вообще надо признать, что все эти рассуждения – жуткая, неумелая чушь (в которой сами авторы легко запутываются – не говоря уже о читателях). Речь здесь идет о процессоре, который может иметь бесконечно работающую программу. Это явление чрезвычайно просто и совершенно ясно, и ни для какого программиста здесь нет абсолютно никакой проблемы. Проблема создается только той ерундой, которой здесь начинают заниматься «специалисты по теории множеств», на ровном месте создавая непроходимые джунгли из формул неумело спроектированного языка и никому не нужных «доказательств» очевидных вещей. Это очевидная средневековая схоластика.

¹²³ Называемая также аксиомой фундирования. – *Прим. ред.*

Ниже будет добавлена еще одна аксиома – аксиома выбора. Аксиоматическая система, состоящая из всех этих аксиом, обозначается через ZFC. Она обычно рассматривается как стандартная система аксиом для теории множеств.

Марина Ипатьева. Вставка с комментариями

2016-03-21, понедельник

Теперь я на время прерву перенос сюда книги по теории множеств и сделаю к ней некоторые комментарии, более обширные, чем это возможно в подстрочных сносках, и более непосредственно адресованные Виктору Викторовичу Сухорукову, играющему, как уже было сказано в начале, для настоящего сочинения ту же роль, какую играл юный Меммий для поэмы Лукреция, Феофил для евангелия от Луки и Сир для «Альмагеста» Птолемея.

Вот, Вы, Виктор Викторович, на портале Ломоносова декларировали в качестве своих интересов логику, религиоведение и социологию. Ну, с логикой в настоящем сочинении мы дело имеем самое непосредственное (даже в форме т.н. математической логики), но и два остальных предмета здесь не остаются в стороне. Вы можете взглянуть на математику и на поведение математиков как на социальное явление, попадающее в поле зрения социологии, и я даже призываю Вас сделать в этой области самостоятельные исследования (помимо моей операции *Milliaria*, которая, конечно же, не является чистым и настоящим социологическим исследованием).

И, во-вторых – что, скорее всего, будет неожиданным и для Вас, и для всех, – я утверждаю, что современная математика не является наукой, а является религией. То есть, в ней НЕ применяются научные способы познания, НЕ применяется научный метод как таковой, а совершается мифотворчество, изобретаются всякие фантастические и несуществующие вещи, и потом эти мифы отстаиваются и защищаются их адептами при помощи методов, типичных для всех сектантов, религиозных фанатиков и лжеученых. Весь мой на сегодняшний день более чем 35-летний опыт общения с математиками свидетельствует об этом. Ярким примером этого служит и поведение академика Российской АН Юрия Григорьевича Решетняка (полностью задокументированное в моем Альманахе и на моих блогах).



Виктор Викторович Сухоруков¹²⁴

2016-03-19, суббота

Итак, Виктор Викторович, Джозеф Р. Шенфилд познакомил нас с основами теории множеств и стандартной для нее системой аксиом (кроме одной, которая еще впереди) – с системой, именуемой ZFC (собственно те аксиомы, которые приведены выше, – это система ZF – по именам авторов Zermelo и Frenkel, а добавочная аксиома – это С от слова «Choice» – выбор).

Шенфилд обрисовал для нас работу некоторого гипотетического процессора, работающего по шагам и создающего те множества, которые являются предметом излагаемой им теории множеств. Мы в сноске (*2) присвоили этому процессору название в двух вариантах: в латинском варианте РИМ и в русском варианте ПИМ. Множества, таким образом, есть потенциальные продукты этого процессора. Далее Шенфилд ввел некоторый язык для фиксации определенных вещей, связанных с продуктами ПИМа, и мы этому языку в сноске (*3) присвоили название ЯТМ (взяв просто аббревиатуру от данного самим Шенфилдом и его переводчиком Кановеем названия «язык теории множеств»). ЯТМ был спроектирован языком иероглифическим, но принцип

¹²⁴ В 2004–2009 гг. учился на специальности «Государственное и муниципальное управление» Уральской академии государственной службы (УРАГС); в 2009–2012 гг. был в аспирантуре на специальности «Социология управления» в Белгородском государственном национальном исследовательском университете (БелГУ). На странице <http://lomonosov-msu.ru/rus/user/profile/14194> в качестве своих интересов помимо политологии и государственного управления декларировал также логику, религиоведение и социологию.

иероглифов соблюдался непоследовательно: вводились наряду с иероглифами также морфемы, образованные комбинациями букв обычного латинского алфавита.

Ввод Шенфилдом этих вещей сопровождался моими подстрочными комментариями, как правило, не очень лестными для математиков, но зато справедливыми. Потом Шенфилд ввел семь аксиом (некоторые из них были т.н. «схемы аксиом»), и эти аксиомы я уже подстрочными комментариями не сопровождала, потому что намеревалась поговорить о них здесь, в отдельной вставке.

Аксиомы провозглашали некоторые общие принципы, соблюдаемые в работе процессора ПИМ при построении им тех множеств, которые являются предметом излагаемой Шенфилдом теории множеств, и таким образом аксиомы были призваны описать (и определять при отсутствии более точного определения) изучаемый «мир множеств».

Я же сказала в сноске (*4), что путь провозглашения аксиом для описания «мира множеств» является дилетантским и фундаментально неправильным, а правильным и профессиональным является путь точного определения и описания процессора ПИМ и тех его программ, при помощи которых он создает те или иные множества. В этой вставке мы (в первом приближении) осуществим этот правильный и профессиональный подход – в противоположность подходу Шенфилда, следующего за всем мировым сообществом математиков.

Сейчас мы установим систему команд (элементарных операций) для ПИМа, введем алгоритмический язык для написания программ процессора ПИМ, и напишем на этом языке две конкретные программы:

1) программу построения «множества всех множеств, не содержащих себя в качестве элемента» (т.е. программу, реализующую «парадокс Рассела»); и

2) программу построения натуральных чисел, как их определяет Шенфилд ниже в §4 (таким образом, когда мы дойдем до фактического ввода Шенфилдом этих чисел, у нас уже будет готовым точное их определение в виде программы, создающей эти числа).

2017-07-28 пятница
(через 1 год, 4 месяца и 9 дней)

Замысел изложить в дискуссии с В.В. Сухоруковым разбор положений ZFC я тогда, почти полтора года назад, не реализовала до конца. Другие дела и другие корреспонденты отвлекли меня и увели в другую сторону, а когда прошло время, то, как это часто бывает, уже не хотелось возвращаться к незаконченному.

Однако идеи, которые я намеревалась высказывать Сухорукову, были высказаны (в форме даже более хорошей) в сочинении «Математика и мракобесие»¹²⁵ для Комиссии РАН, в ответе на «Отзыв Деева»¹²⁶, в комментариях к статье Зенкина,¹²⁷ а также в других текстах.

А то, что я успела написать для Сухорукова, само по себе тоже не мало: я показала, что ZFC есть рассуждения о мозговом процессоре, только неумелые и непрофессиональные, а также привела в альманахе МОИ хрестоматийный текст таких рассуждений, на который теперь могу свободно ссылаться, не выходя за пределы Альманаха.

¹²⁵ МОИ № 107, стр.2–23, <http://moivzn.blogspot.com/2016/11/107.html>.

¹²⁶ МОИ № 107, стр.60–71, http://moialmanah.blogspot.com/p/blog-page_3.html.

¹²⁷ В этом томе выше стр.30–42.

Глава 1. Аксиомы теории множеств (продолжение)

Джозеф Р. Шенфилд

§4. Развитие теории множеств

Мы собираемся лишь показать, как различные аксиомы участвуют в построении теории множеств, но не проводить это построение в деталях. Будет использоваться обозначение $\{x: \varphi(x)\}$ для множества таких x , что $\varphi(x)$. Более строго, $\{x: \varphi(x)\}$ вводится аксиомой

$$\forall x(x \in \{x: \varphi(x)\} \leftrightarrow \varphi(x)).$$

Однако перед введением этой аксиомы нужно доказать следующую формулу:

$$\exists! y \forall x(x \in y \leftrightarrow \varphi(x)).$$

Если такое y существует, то оно единственно по аксиоме объемности, и утверждение о существовании такого y и есть $\text{Set}\{x: \varphi(x)\}$. Значит, мы можем использовать $\{x: \varphi(x)\}$ только в предположении, что уже доказано $\text{Set}\{x: \varphi(x)\}$.

Будем писать $\{F(x): \varphi(x)\}$ вместо $\{y: \exists x(\varphi(x) \wedge y = F(x))\}$. Таким образом, аксиому подстановки можно записать в виде $\text{Set}\{F(x): x \in y\}$.

Прежде всего введем обычные теоретико-множественные операции. Главной ролью аксиом при этом будет доказательство существования тех или иных множеств.¹²⁸ Покажем, как это делается.

Сначала определим пустое множество

$$\emptyset = \{x: x \neq x\}.$$

Чтобы доказать его существование, возьмем какое-нибудь множество y . (Аксиома бесконечности гарантирует существование хотя бы одного множества. Из обычных аксиом логики также можно получить существование хотя бы одного множества). Тогда $\forall x(x \neq x \rightarrow x \in y)$, и, следовательно, $\text{Set}\{x: x \neq x\}$ по аксиоме выделения.

Теперь мы определим множество

$$\begin{aligned} \cup z &= \{x: \exists y \notin z(x \in y)\}, \\ \mathcal{P}(y) &= \{x: x \subseteq y\}. \end{aligned}$$

Эти множества существуют по аксиомам объединения и степени. Множество $\cup z$ называется *объединением* z , а множество $\mathcal{P}(y)$ называется *степенью* y .

Далее, определяем множество, состоящее из x и y :

$$\{x, y\} = \{z: z = x \vee z = y\}.$$

Доказательство существования этого множества требует небольших усилий. Введем операцию F условиями $F(\emptyset) = x$ и $F(w) = y$ при $w \neq \emptyset$. Каково бы ни было множество y , совокупность $\{F(w): w \notin v\}$ будет множеством по аксиоме подстановки. Следовательно, в силу аксиомы выделения достаточно построить v так, чтобы x и y принадлежали $\{F(w): w \notin v\}$. Это означает, что v должно содержать как $\emptyset$, так и множество, отличное от $\emptyset$. Легко видеть, что такому свойству удовлетворяет множество $v = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$.

Теперь можно определить булевы операции:

$$\begin{aligned} x \cup y &= \cup \{x, y\}, \\ x \cap y &= \{z: z \notin x \wedge z \notin y\}, \\ x - y &= \{z: z \notin x \wedge z \in y\}. \end{aligned}$$

Последние два множества существуют по аксиоме выделения.

Далее, можно определить множество, элементами которого являются множества $x_1, \dots, x_n$ (и только они), индукцией по n :

$$\begin{aligned} \{x_1\} &= \{x_1, x_1\}, \\ \{x_1, \dots, x_{n+1}\} &= \{x_1, \dots, x_n\} \cup \{x_{n+1}\}. \end{aligned}$$

¹²⁸ **МОИ 2016-03-20:** Существование тех или иных множеств гарантируется наличием программы, строящей эти множества (а не какими-то там аксиомами). Если программист, написавший программу, которая, скажем, записывает какой-то файл на диск, после этого стал бы вводить аксиомы и потом из них на многих страницах доказывать «существование» этого файла, то он не смог бы уйти сколь-нибудь далеко в своей работе, и не было бы тогда у нас ни операционных систем, ни Интернета, ни вообще сколь-нибудь больших программных разработок. Ерунда, которой здесь занимаются «математики», просто несусветна.

После этого без труда определяются и другие операции над множествами.

Теория множеств имеет дело не только с множествами, но также и с отношениями и функциями, которые являются множествами упорядоченных пар.¹²⁹ Обычно упорядоченную пару не рассматривают как множество, однако мы можем отождествить ее с множеством, если это множество обладает всеми желаемыми свойствами упорядоченной пары. К этим свойствам относится лишь способность полностью определяться своими первым и вторым членами. Иными словами, единственным существенным свойством упорядоченной пары является

$$\langle x, y \rangle = \langle z, w \rangle \rightarrow x = z \wedge y = w. \quad (2)$$

Известно несколько определений $\langle x, y \rangle$, обеспечивающих выполнение записанной формулы; простейшим является

$$\langle x, y \rangle = \{ \{x\}, \{x, y\} \}.$$

Мы оставляем читателю проверку (2).

Теперь можно определить декартово произведение:

$$x \times y = \{ \langle z, w \rangle : z \in x \wedge w \in y \}.$$

Чтобы показать его существование (как множества), заметим, что

$$z \in x \wedge w \notin y \rightarrow \langle z, w \rangle \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(x \cup y)),$$

а затем используем аксиому выделения.

Можно обобщить аксиому подстановки на случай двух (или большего числа) аргументов:

$$\text{Set}\{F(z, w) : z \in x \wedge w \in y\}. \quad (3)$$

В самом деле, введем новую операцию G условием $G(\langle z, w \rangle) = F(z, w)$ и $G(v) = \emptyset$ в случае, когда v не является упорядоченной парой. (В силу (2) это определение корректно). Тогда

$$\{F(z, w) : z \in x \wedge w \in y\} = \{G(v) : v \in x \times y\},$$

и поэтому (3) следует из аксиомы подстановки.

Теперь мы собираемся показать, что в нашей теории можно работать с обычными математическими объектами. Такие объекты строятся из чисел с помощью теоретико-множественных операций. Однако хорошо известно, что все числа (действительные, комплексные, рациональные) могут быть построены из натуральных чисел с помощью теоретико-множественных операций. Мы покажем, как определяются натуральные числа в ZFC.

Очевидно, что каждое натуральное число n должно быть отождествлено с каким-нибудь множеством; какое же множество целесообразнее выбрать? Естественным является выбор n -элементного множества, а из таких множеств напрашивается выбор множества всех натуральных чисел, меньших чем n . Таким образом, 0 отождествляется с пустым множеством $\emptyset$, 1 отождествляется с $\{0\}$, 2 с $\{0, 1\}$ и т.д. При этом операция перехода к следующему натуральному числу должна быть определена так:

$$\text{Sc}(x) = x \cup \{x\}.$$

Будем говорить, что множество является *индуктивным*, если оно содержит 0 и замкнуто относительно операции Sc .

Натуральным числом назовем каждое множество, принадлежащее любому индуктивному множеству.

Нужно доказать аксиомы Пеано для так определенных натуральных чисел. Единственной аксиомой, проверка которой нетривиальна, является

$$\text{Sc}(x) = \text{Sc}(y) \rightarrow x = y. \quad (4)$$

Пусть $\text{Sc}(x) = \text{Sc}(y)$. По аксиоме регулярности множество $\{x, y\}$ содержит минимальный элемент, а в силу симметричности можно считать, что этим элементом является y . Тогда $x \notin y$. Но $x \in \text{Sc}(x) = \text{Sc}(y) = y \cup \{y\}$, и поэтому либо $x \in y$, либо $x = y$. Следовательно, $x = y$. (В случае, когда x и y являются натуральными числами, мы можем доказать (4) без использования аксиомы регулярности. Однако (4) иногда используется для произвольных множеств x и y).

Аксиома бесконечности утверждает, что индуктивные множества существуют. Отсюда и из аксиомы выделения следует существование множества всех натуральных чисел.

Теперь видно, почему праэлементы не являются необходимыми: все объекты, которые мы хотели бы изучать, являются множествами или по крайней мере могут быть отождествлены с множествами. На самом деле лишь небольшое дополнительное усилие требуется для переформу-

¹²⁹ Мы отождествляем функцию f с множеством упорядоченных пар $\langle x, f(x) \rangle$, а не с множеством упорядоченных пар $\langle f(x), x \rangle$.

лировки нашей аксиоматической системы с тем, чтобы она допускала праэлементы, и это иногда бывает полезным.

Довольно удивительным является то, что мы можем определить все обычные математические объекты и доказать их свойства в ZFC. Несомненно, это показывает, что ZFC является очень сильной аксиоматической системой. Тем не менее мы не склонны преувеличивать это. Было бы ошибочным и бесполезным отождествить математику с ZFC или рассматривать ZFC как основание математики. Такой взгляд привел бы к тому, что объекты, неопределимые в ZFC, не считались бы математическими объектами, а факты, недоказуемые в ZFC, – математическими фактами. Это было бы бесплодным ограничением математики.

§5. Ординалы

Хотя понятие шага и фигурировало в нашем описании множеств, но оно не вошло в формулировки аксиом. Чтобы показать, что при этом ничего не потеряно, мы в ZFC определим шаги и докажем, что они имеют соответствующие свойства.

Мы собираемся отождествить шаги с определенными множествами, которые называются ординалами. Грубо говоря, ординалы получаются продолжением последовательности натуральных чисел.

Множество x называем *транзитивным*, если каждый элемент множества x является подмножеством x . Множество x называется *ординалом*, если x транзитивно и каждый элемент множества x также транзитивен. Для обозначения ординалов будем использовать греческие буквы.

5.1. Теорема. Множество 0 есть ординал. Если α – ординал, то $Sc(\alpha)$ также будет ординалом.

Доказательство. Доказательство тривиально и оставляется читателю. $\square$

Следствие. Каждое натуральное число является ординалом.

5.2. Теорема. Каждый элемент ординала есть ординал.

Доказательство. Пусть $x \in \alpha$. Тогда x транзитивно, и поэтому остается проверить, что каждый элемент y множества x является транзитивным множеством. Поскольку α транзитивно, то $x \subseteq \alpha$; следовательно, $y \in \alpha$, и поэтому y транзитивно, что и требовалось. $\square$

Определим теперь для ординалов α и β :

$$\alpha < \beta \leftrightarrow \alpha \in \beta,$$

$$\alpha \leq \beta \leftrightarrow \alpha < \beta \vee \alpha = \beta.$$

Докажем сначала, что $<$ частично упорядочивает ординалы, т.е.

$$\neg(\alpha < \alpha), \quad (5)$$

$$\alpha < \beta \wedge \beta < \gamma \rightarrow \alpha < \gamma. \quad (6)$$

По аксиоме регулярности α является минимальным элементом множества $\{\alpha\}$. Это означает, что $\alpha \notin \alpha$, т.е. (5). А (6) есть следствие транзитивности γ . $\square$

5.3. Теорема. Если $\forall \alpha((\forall \beta < \alpha \varphi(\beta)) \rightarrow \varphi(\alpha))$, то $\forall \alpha \varphi(\alpha)$.

Доказательство. Предположим, что посылка верна, но $\neg \varphi(\alpha_0)$, и получим противоречие. Пусть

$$x = \{\alpha : \alpha < \alpha_0 \wedge \neg \varphi(\alpha)\};$$

это множество существует потому, что каждое такое α принадлежит α_0 . Более того, $x \neq \emptyset$, так как иначе посылка дала бы $\varphi(\alpha_0)$. Таким образом, x имеет минимальный элемент α . Если $\beta < \alpha$, то $\beta < \alpha_0$ по (6) и $\beta \notin x$ по выбору α . Значит, при $\beta < \alpha$ будет $\varphi(\beta)$. Теперь посылка дает $\varphi(\alpha)$, что противоречит выбору α . $\square$

Теорема 5.3 говорит нам, что если мы хотим доказать $\varphi(\alpha)$ для произвольного ординала α , то можно предполагать, что $\varphi(\beta)$ выполняется при любом $\beta < \alpha$. Такой метод доказательства называется доказательством $\varphi(\alpha)$ *индукцией по α* ; предположение о том, что $\varphi(\beta)$ выполняется для всех $\beta < \alpha$, называется *индуктивным предположением*.

Докажем теперь, что $<$ линейно упорядочивает ординалы, т.е.

$$\alpha < \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta < \alpha. \quad (7)$$

Обозначим (7) через $C(\alpha, \beta)$ и докажем $\forall \beta C(\alpha, \beta)$ индукцией по α . Для этого докажем $C(\alpha, \beta)$ индукцией по β (при фиксированном α). Таким образом, мы доказываем $C(\alpha, \beta)$ с помощью двух индуктивных предположений:

$$\forall \gamma < \alpha C(\gamma, \beta), \quad (8)$$

$$\forall \gamma < \beta C(\alpha, \gamma), \quad (9)$$

Ясно, что либо $\alpha = \beta$, либо $\alpha - \beta \neq \emptyset$, либо $\beta - \alpha \neq \emptyset$. Если $\alpha = \beta$, то $C(\alpha, \beta)$ очевидно. Предположим теперь, что $\alpha - \beta \neq \emptyset$. По теореме 5.2 и определению $<$ найдется такое γ , что $\gamma < \alpha$ и $\neg(\gamma < \beta)$. Согласно (8) будет $C(\gamma, \beta)$, т.е. либо $\gamma < \beta$, либо $\beta \leq \gamma$. Так как первое ложно, то выполняется $\beta \leq \gamma$. Теперь, поскольку $\gamma < \alpha$, то из (6) следует $\beta < \alpha$, т.е. $C(\alpha, \beta)$. Аналогичное доказательство (с использованием (9) вместо (8)) проходит и в случае $\beta - \alpha \neq \emptyset$.

Итак, (7) доказано. С помощью этого утверждения докажем

$$\alpha \leq \beta \leftrightarrow \alpha \subseteq \beta \quad (10)$$

В самом деле, если $\alpha \leq \beta$, то из $\gamma < \alpha$ следует $\gamma < \beta$ по (6), и $\alpha \subseteq \beta$ вытекает из теоремы 5.2. Если же $\neg(\alpha \leq \beta)$, то $\beta < \alpha$ согласно (7) и $\neg(\beta < \beta)$ согласно (5). Таким образом, $\beta \in \alpha - \beta$, т.е. $\neg(\alpha \subseteq \beta)$.

Будем говорить, что α есть *наименьший ординал такой, что $\varphi(\alpha)$* , если имеет место $\varphi(\alpha)$, но для любого ординала $\beta < \alpha$ выполняется $\neg\varphi(\beta)$. В силу утверждения (7) существует не более одного такого ординала α .

5.4. Теорема. Если $\exists \alpha \varphi(\alpha)$, то существует наименьший ординал α такой, что $\varphi(\alpha)$.

Доказательство. Предположим, что таких α нет, и докажем $\neg\varphi(\alpha)$ индукцией по α . Если $\varphi(\beta)$, то из индуктивного предположения следует $\neg(\beta < \alpha)$, т.е. $\alpha \leq \beta$. Таким образом, $\neg\varphi(\alpha)$, так как иначе α было бы наименьшим ординалом таким, что $\varphi(\alpha)$. $\square$

Существуют два тривиальных примера наименьших ординалов: 0 есть наименьший ординал, а $Sc(\alpha)$ есть наименьший ординал β такой, что $\alpha < \beta$.

5.5. Теорема. Если x есть множество ординалов, то $\cup x$ является наименьшим ординалом α таким, что $\forall \beta \in x (\beta \leq \alpha)$.

Доказательство. Объединение множества, состоящего из транзитивных множеств, транзитивно; поэтому $\cup x$ транзитивно. Каждый элемент множества $\cup x$ принадлежит некоторому ординалу из x и, следовательно, является транзитивным. Таким образом, $\cup x$ есть ординал. Теперь теорема следует из (10). $\square$

Следствие. Если x есть множество ординалов, то существует ординал, превосходящий все ординалы из x .

Доказательство. Нужно взять $\alpha = Sc(\cup x)$. $\square$

Согласно этому следствию существует ординал, не являющийся натуральным числом.¹³⁰ Наименьший такой ординал обозначается через ω . Поскольку $\omega \neq 0$ и 0 есть наименьший ординал, то

$$0 < \omega \quad (11)$$

Также имеет место

$$\alpha < \omega \rightarrow Sc(\alpha) < \omega. \quad (12)$$

В самом деле, если $\alpha < \omega$, то $Sc(\alpha) \leq \omega$, так как $Sc(\alpha)$ есть наименьший ординал, больший, чем α . Но поскольку $\alpha < \omega$, то α – натуральное число. Тем самым $Sc(\alpha)$ – также натуральное число, и, следовательно, $Sc(\alpha) \neq \omega$.

Из (11) и (12) следует, что каждое натуральное число принадлежит ω . Но каждый элемент ω является ординалом, меньшим, чем ω , и тем самым является натуральным числом. Таким образом, ω есть множество всех натуральных чисел.

¹³⁰ **МОИ 2016-03-20:** Для профессионального взгляда сразу очевидно, что процессор ПИМ не может создать «ординал ω » тем же способом, каким он создавал предыдущие «ординалы». Ординал ω может быть в ПИМе построен (на таких же правах, как предыдущие ординалы, т.е. в виде номиналии) только некоторой специальной, особой операцией (которую мы здесь обозначаем символом $ActInf$) и которая принадлежит к группе операций, называемых в Веданской теории «бокоанализом». Эта особая операция $ActInf$ в традиционных терминах означает ввод актуальной бесконечности или, иными словами, постулирование существования объекта, построенного законченным бесконечным процессом. Повторяю: для профессионала необходимость такой особой операции ясна с первого взгляда. Поэтому особый интерес и особое любопытство вызывает у меня тот способ, каким математики начинают считать существование объекта ω доказанным. Они, конечно, тут сильно затуманили дело всякими наукообразными «теоремами» (так что не только запутывают читателя, но и сами, видимо, запутались), но, похоже, их «доказательство» до предела наивно и тривиально, и разгадка заключается в формулировке: «**Следствие.** Если x есть множество ординалов, то существует ординал, превосходящий все ординалы из x ». Это аналогично формулировке: «Если x есть множество натуральных чисел, то существует натуральное число, превосходящее все натуральные числа из x ». Ну правильно, и естественно, и тривиально! Только где тут доказательство существования ω ? Это «доказательство» заключается просто в том, что множества ординалов можно строить (через $Sc(\cup x)$) всё дальше и дальше, и дальше.

Теперь обратимся к определениям по индукции. Идея состоит в том, что мы хотим определить $F(\alpha)$ через α и $F(\beta)$ для $\beta < \alpha$. Все эти $F(\beta)$ можно собрать в одно множество $F\uparrow\alpha$,¹³¹ определяемое равенством

$$F\uparrow\alpha = \{\langle\beta, F(\beta)\rangle : \beta < \alpha\}.$$

5.6. Теорема. Если G есть бинарная операция, то существует такая унарная операция F , что $F(\alpha) = G(\alpha, F\uparrow\alpha)$ для всех ординалов α .

Доказательство. Под α -функцией будем понимать функцию f , определенную на α и удовлетворяющую равенству $f(\beta) = G(\beta, f\uparrow\beta)$ для всех $\beta < \alpha$. Легко видеть, что если f есть α -функция и $\beta < \alpha$, то $f\uparrow\beta$ будет β -функцией.

Покажем, что для каждого α существует не более одной α -функции. Действительно, предположим, что f и g являются α -функциями, и докажем

$$\beta < \alpha \rightarrow f(\beta) = g(\beta)$$

индукцией по β . Если $\gamma < \beta$, то $f(\gamma) = g(\gamma)$ по индуктивному предположению. Таким образом, $f\uparrow\beta = g\uparrow\beta$, и поэтому

$$f(\beta) = G(\beta, f\uparrow\beta) = G(\beta, g\uparrow\beta) = g(\beta).$$

Если существует α -функция f , то полагаем $F(\alpha) = G(\alpha, f)$; в противном случае полагаем $F(\alpha) = 0$. (Этот второй случай на самом деле не имеет места ни при каком α).

Докажем для начала, что если α -функция существует, то выполняется $F(\alpha) = G(\alpha, F\uparrow\alpha)$. Достаточно показать, что если f есть α -функция, то $F\uparrow\alpha = f$. Если $\beta < \alpha$, то $f\uparrow\beta$ является β -функцией; поэтому $F(\beta) = G(\beta, f\uparrow\beta) = f(\beta)$, так как f есть α -функция. Таким образом, $F\uparrow\alpha = f$, что и требовалось.

Осталось проверить, что для каждого α существует α -функция. Докажем, что $F\uparrow\alpha$ будет α -функцией, индукцией по α .

Пусть $f = F\uparrow\alpha$. Если $\beta < \alpha$, то из индуктивного предположения и результата предыдущего абзаца следует $F(\beta) = G(\beta, F\uparrow\beta)$. Но это равенство эквивалентно равенству $f(\beta) = G(\beta, f\uparrow\beta)$, которое и требовалось установить. $\square$

На практике теорема 5.6 обосновывает любое определение, в котором $F(\alpha)$ выражается через α и $F(\beta)$ для $\beta < \alpha$. Например, пусть x – произвольное множество. Положим $F(\alpha)$ равным $\{x\}$ при $\alpha = 0$, равным $\cup(F(\beta))$ при $\alpha = \text{Sc}(\beta)$ и равным $\cup\{F(\beta) : \beta < \alpha\}$ в остальных случаях. Нетрудно подобрать G так, что теорема 5.6 дает эту операцию F . Важность рассмотренного примера заключается в том, что $F(\omega)$ есть транзитивное множество, содержащее x как элемент. В самом деле, по (11) и (12) $F(\omega)$ будет объединением всех $F(\alpha)$ для $\alpha < \omega$. В частности, $F(0) \subseteq F(\omega)$, и поэтому $x \in F(\omega)$. Далее, если $y \in F(\omega)$, то $y \in F(\alpha)$ для некоторого $\alpha < \omega$. Это означает, что $y \subseteq \cup(F(\alpha)) = F(\text{Sc}(\alpha)) \subseteq F(\omega)$ по (12). Таким образом, $F(\omega)$ является транзитивным множеством.

5.7. Теорема. Если $\forall x((\forall y \in x \varphi(y)) \rightarrow \varphi(x))$, то $\forall x \varphi(x)$.

Доказательство. Предположим, что посылка выполняется, но $\neg\varphi(z)$, и получим отсюда противоречие. Как показано выше, существует транзитивное множество w , содержащее x . Полагаем $v = \{x : x \in w \wedge \neg\varphi(x)\}$. Поскольку $z \in v$, то v имеет минимальный элемент $x \in v$. Если теперь $y \in x$, то $y \in w$ (так как w транзитивно) и $y \notin v$, т.е. $\varphi(y)$. В этой ситуации посылка теоремы дает $\varphi(x)$, что противоречит выбору $x \in v$. $\square$

Теорема 5.7 говорит нам, что если мы хотим доказать $\varphi(x)$ для произвольного множества x , то можно предполагать, что $\varphi(y)$ выполняется для всех $y \in x$. Такой метод доказательства называется доказательством $\varphi(x)$ с помощью $\in$ -индукции по x ; предположение о том, что $\varphi(y)$ справедливо для всех $y \in x$, называется *индуктивным предположением*.

Теперь мы отождествляем шаги с ординалами, а отношение *раньше* – с порядком $<$ на ординалах. Скажем, что множество ?¹³² строится на шаге α , если $x \subseteq R(\alpha)$, где операция R определена индукцией по α следующим образом:

$$R(\alpha) = \cup\{\mathcal{P}(R(\beta)) : \beta < \alpha\}^{133}.$$

¹³¹ **МОИ 2016-03-20:** В оригинальном тексте в этом месте стоит знак $\uparrow$, который здесь я показала как картинку, но в дальнейшем заменяю знаком $\uparrow$ (пусть они в своем ЯТМе не пользуются иероглифами, которых нет в фонтах системы Windows!).

¹³² **МОИ 2016-03-11:** В оригинальном тексте нечитабельно.

¹³³ При $\alpha = 0$ это определение дает $R(\alpha) = \emptyset$, так как множество в фигурных скобках оказывается пустым при $\alpha = 0$. – Прим. перев.

Таким образом, мы определили понятия §2 в ZFC. Теперь уже можно доказать соответствующие свойства этих понятий. По определению R , выполняется

$$y \in R(\alpha) \leftrightarrow \exists \beta < \alpha (y \in R(\beta)); \quad (13)$$

таким образом, y принадлежит $R(\alpha)$, если и только если y строится раньше α . Следовательно, x строится на шаге α , если и только если каждый элемент множества x построен раньше α . Это и есть первое основное свойство процесса построения множеств.

Далее, мы должны доказать, что если каждый элемент некоторой совокупности построен раньше α , то эта совокупность является множеством. Согласно (13) сказанное записывается следующей формулой:

$$\forall x (\varphi(x) \rightarrow x \in R(\alpha)) \rightarrow \text{Set}\{x: \varphi(x)\}.$$

Но записанная формула есть следствие аксиомы выделения.

Наконец, нужно доказать, что каждое множество строится на каком-нибудь шаге, т.е.

$$\exists \alpha (x \subseteq R(\alpha)). \quad (14)$$

Доказываем это утверждение ϵ -индукцией по x . Пусть $F(y)$ есть наименьший ординал β такой, что $y \subseteq R(\beta)$, или 0, если таких β нет. Используя следствие к теореме 5.5, выбираем ординал α , превосходящий все ординалы из $\{F(y): y \in x\}$. Если $y \in x$ и $\beta = F(y)$, то $y \subseteq R(\beta)$ по индуктивному предположению, и в силу $\beta < \alpha$. Из (13) следует, что $y \in R(\alpha)$. Таким образом, $x \subseteq R(\alpha)$, что и требовалось.

Если мы заменим x на $\{x\}$ в утверждении (14), то получим: каждое множество принадлежит какому-нибудь $R(\alpha)$. Этот факт часто используется. Например, можно вводить операцию F на всех множествах путем определения ее на всех множествах из $R(\alpha)$ индукцией по α . Другое применение будет указано в следующем параграфе. Итак, мы видим, что шаги полезны не только при проверке аксиом, но и в доказательстве теорем.

§6. Аксиома выбора

Функцией выбора на множестве x называется функция f с областью определения $x - \{\emptyset\}$ такая, что $f(y) \in y$ для всех y из области определения f . *Аксиома выбора* утверждает, что для каждого множества x существует функция выбора на x . (Строго говоря, аксиомой выбора является перевод этого предложения на язык теории множеств)¹³⁴.

Почему аксиома выбора истинна? Мы уже знаем, что $x \times \cup x$ есть множество, и, следовательно, оно строится на некотором шаге S . Тогда каждая пара $\langle y, z \rangle$, где $z \in y \cup x$ построена раньше S . На шаге S мы можем взять одну такую пару $\langle y, z \rangle$ для каждого y из $x - \{\emptyset\}$ и построить множество всех таких $\langle y, z \rangle$. Это множество и будет искомой функцией выбора на x .

В этом рассуждении есть одно слабое место: что мы имеем в виду, когда говорим, что можно выбрать *одну* пару $\langle y, z \rangle$ для каждого y ? Конечно, мы не имеем в виду, что человек фактически в состоянии выбрать эти пары, так как возможен случай бесконечного числа таких пар. Мы также не имеем в виду, что есть какой-то закон для выбора таких пар, поскольку независимо от нашего понимания слова *закон* мы не видим причин, почему такой закон должен быть для каждого множества x . Таким образом, мы имеем в виду лишь существование совокупности множеств, содержащей ровно по одной паре $\langle y, z \rangle$ для каждого y из $x - \{\emptyset\}$. Если совокупность понимать как произвольное разбиение рассматриваемых объектов на принадлежащие и не принадлежащие к этой совокупности, то разумно было бы утверждать, что такая совокупность существует.

Аксиома выбора имеет много приложений в математике; некоторые из них рассматриваются в гл. 2. В теории множеств наиболее интересными являются приложения к теории кардиналов. Сделаем краткое введение в эту теорию.

Будем говорить, что множества x и y *равномощны*, и писать $x \sim y$, если существует взаимно однозначное отображение x на y . Тривиально проверяется, что $\sim$ есть отношение эквивалентности. Мы хотим сопоставить каждому множеству x другое множество $|x|$ называемое *кардиналом* или *мощностью* x , так, чтобы

$$|x| = |y| \leftrightarrow x \sim y. \quad (15)$$

Напрашивается использование классов эквивалентности, т.е. $|x| = \{y: y \sim x\}$. Но это не проходит, поскольку $\{y: y \sim x\}$ не является множеством при $x \neq \emptyset$. Предыдущий параграф подсказывает такое

¹³⁴ **МОИ 2016-03-20:** Поставленная в скобки оговорка Шенфилда показывает, что для него аксиома есть текст, закодированный на ЯТМе (а не какие-то соотношения между объектами Мира).

определение: $|x| = \{y: y \notin R(\alpha) \wedge y \sim x\}$, где α есть наименьший ординал такой, что $\exists y \in R(\alpha) \wedge y \sim x$. (Такой ординал существует, так как $x \sim x$ и x принадлежит некоторому $R(\alpha)$). Хотя такое определение достаточно приемлемо, существует еще более удобное определение. Именно, определим $|x|$ как наименьший ординал, равномогущий с x . Прежде всего, нужно доказать, что такой ординал существует.

6.1. Теорема. Если f является функцией выбора на $\mathcal{P}(x)$, то существует взаимно однозначное отображение g некоторого ординала α на множество x , удовлетворяющее равенству $g(\beta) = f(x - \{g(\gamma): \gamma < \beta\})$ для всех $\beta < \alpha$.

Доказательство. Определяем F индукцией следующим образом:

$$F(\alpha) = f(x - \{F(\beta): \beta < \alpha\}).$$

(Здесь в качестве $f(0)$ можно взять любое множество, например $\emptyset$). Тогда

$$x - \{F(\beta): \beta < \alpha\} \neq \emptyset \rightarrow F(\alpha) \in x \wedge \forall \beta < \alpha (F(\beta) \neq F(\alpha)). \quad (16)$$

Докажем сначала, что $x \subseteq \{F(\beta): \beta < \alpha\}$ для некоторого ординала α . Если это не так, то (16) показывает, что F взаимно однозначно отображает совокупность всех ординалов в множество x . Тогда обратная к F операция отображает некоторое подмножество множества x на совокупность всех ординалов, ввиду чего эта совокупность является множеством по аксиоме подстановки. Получилось противоречие со следствием к теореме 5.5.

Пусть α – наименьший ординал такой, что $x \subseteq \{F(\beta): \beta < \alpha\}$. Согласно (16) $F \upharpoonright \alpha$ будет отображать α взаимно однозначно на x и, следовательно, $g = F \upharpoonright \alpha$ и есть искомое отображение. $\square$

Итак, мы обосновали возможность определить $|x|$ как наименьший ординал, равномогущий множеству x . Как отмечено выше, $|x|$ называется *кардиналом* x . Множество называется *кардиналом*, если оно есть кардинал некоторого множества. Каждый кардинал является ординалом, и ординал α будет кардиналом, если и только если $\alpha = |\alpha|$.

Теперь мы собираемся исследовать отношение $<$ на кардиналах. Во-первых, докажем

$$x \subseteq \delta \rightarrow |x| \leq \delta. \quad (17)$$

Определим функцию выбора f на $\mathcal{P}(x)$ следующим образом: если $y \notin \mathcal{P}(x) - \{\emptyset\}$, то $f(y)$ есть наименьший ординал в множестве y . Пусть g и α таковы, как в теореме 6.1. Легко проверяется, что

$$\beta < \gamma \rightarrow g(\beta) < g(\gamma). \quad (18)$$

Теперь докажем

$$\beta < \alpha \rightarrow \beta \leq g(\beta) \quad (19)$$

индукцией по β . Предположим, что $\beta < \alpha$, но $g(\beta) < \beta$. Из (18) следует $g(g(\beta)) < g(\beta)$. Но так как $g(\beta) < \beta$, то индуктивное предположение дает $g(\beta) \leq g(g(\beta))$. Полученное противоречие доказывает (19).

Теперь завершим доказательство утверждения (17). Предположим, что $\delta < |x|$. Поскольку $|x| \leq \alpha$, то $\delta < \alpha$, и, следовательно, $\delta \leq g(\delta)$ по (19). Но $g(\delta) \in x$. Значит, $g(\delta) \in \delta$, т.е. $g(\delta) < \delta$. Это дает противоречие, завершающее доказательство (17).

6.2. Теорема. Пусть α и β – кардиналы. Тогда $\alpha \leq \beta$, если и только если найдется множество, имеющее кардинал β , некоторое подмножество которого имеет кардинал α .

Доказательство. Если $\alpha \leq \beta$, то $\alpha \subseteq \beta$ по (10). Так как $|\alpha| = \alpha$ и $|\beta| = \beta$, то β будет искомым множеством. Пусть теперь $|x| = \alpha$, $|y| = \beta$, $x \subseteq y$. Тогда существует взаимно однозначное отображение u на β ; оно отображает x на некоторое множество $z \subseteq \beta$. Таким образом, $\alpha = |x| = |z| \leq \beta$ по (17).

Довольно легко можно показать, что каждое натуральное, число есть кардинал и ω – также кардинал. Большие кардиналы могут быть получены благодаря следующей теореме:

6.3. Теорема. Для любого множества x выполняется неравенство $|x| < |\mathcal{P}(x)|$.

Доказательство. Существует взаимно однозначное отображение x в $\mathcal{P}(x)$. По теореме 6.2 имеем $|x| \leq |\mathcal{P}(x)|$. Предположим теперь, что $|x| = |\mathcal{P}(x)|$, и получим противоречие. Согласно (15) существует взаимно однозначное отображение f множества x на $\mathcal{P}(x)$. Пусть $y = \{z: z \in x \wedge z \notin f(z)\}$. Тогда $y = f(w)$ для некоторого $w \in x$. Теперь получаем противоречие

$$w \in y \leftrightarrow w \notin f(w) \leftrightarrow w \notin y. \quad \square$$

Это краткое введение в теорию кардиналов дает некоторое представление о ней, но, возможно, не раскрывает ключевой роли аксиомы выбора. Без использования этой аксиомы мы можем определить кардиналы первым из упомянутых выше способов. При этом можно определить, что $\alpha \leq \beta$ (для кардиналов α и β), если существует множество, имеющее кардинал β ,

некоторое подмножество которого имеет кардинал α . При таком определении без помощи аксиомы выбора невозможно доказать, что для произвольных кардиналов α и β выполняется $\alpha \leq \beta \vee \beta \leq \alpha$.

В заключение этого параграфа покажем, как лемма Цорна следует из аксиомы выбора. Частично упорядоченное множество называется *индуктивно упорядоченным*, если каждое линейно упорядоченное подмножество этого множества имеет верхнюю грань. Лемма Цорна утверждает, что каждое индуктивно упорядоченное множество x имеет максимальный элемент.

Для доказательства возьмем какую-нибудь функцию выбора f на $\mathcal{P}(x)$. Определим индукцией операцию F следующим образом. Пусть x_α есть совокупность всех таких $y \notin x$, что $F(\beta) < y$ для любого $\beta < \alpha$. Положим $F(\alpha) = f(x_\alpha)$ при $x_\alpha \neq \emptyset$ и $F(\alpha) = 0$ при $x_\alpha = \emptyset$. Аналогично доказательству теоремы 6.1 можно показать, что $x_\alpha = \emptyset$ для некоторого α . Выберем наименьшее такое α . Тогда по выбору $F(\beta)$ при $\gamma < \beta < \alpha$ будет $F(\gamma) < F(\beta)$. Следовательно, множество $\{F(\beta) : \beta < \alpha\}$ линейно упорядочено. Значит, оно имеет верхнюю грань y ; это y и будет искомым максимальным элементом, так как любой больший элемент множества x должен был бы принадлежать множеству x_α .

§7. Классы

Мы уже отмечали, что в языке теории множеств можно говорить и о некоторых совокупностях множеств, не являющихся множествами. Остановимся на этом более подробно.

Впредь $\{x: \varphi(x)\}$ обозначает совокупность таких множеств x , что имеет место $\varphi(x)$, даже если эта совокупность не является множеством. Такие совокупности называются *классами*. Точнее, если каждая свободная переменная формулы $\varphi(x)$, отличная от x , замещена каким-нибудь множеством, то $\{x: \varphi(x)\}$ является определимой совокупностью, и каждую такую совокупность мы называем *классом*.

Каждое множество x есть класс, потому что $x = \{y: y \in x\}$. Но не каждый класс является множеством. Например, парадокс Рассела показывает, что $\{x: x \notin x\}$ не является множеством, а следствие к теореме 5.5 показывает, что совокупность всех ординалов (очевидно, являющаяся классом) также не является множеством. Класс, который не является множеством, мы называем *собственным классом*.

Мы хотим, чтобы $\{x: \varphi(x)\}$ было определяемым символом, т.е. чтобы каждое предложение, содержащее такие символы, было сокращением некоторого предложения в языке теории множеств. Но мы не можем этого сделать методом §4 ввиду того, что символ $\{x: \varphi(x)\}$ получил новое значение. Поэтому рассмотрим способы вхождения $\{x: \varphi(x)\}$ в предложения.

Желательно разрешить выражению $\{x: \varphi(x)\}$ входить как перед, так и после знаков $=$ и $\in$. В случае, когда оно встречается сразу после $\in$, положим

$$y \in \{x: \varphi(x)\} \leftrightarrow \varphi(y).$$

Перед тем как продвигаться дальше, введем следующее определение. *Термом* называется выражение, которое является либо переменной, либо записью вида $\{x: \varphi(x)\}$. Для обозначения термов используем буквы A, B, C .

Если $\{x: \varphi(x)\}$ встречается перед или после знака $=$, то

$$A = B \leftrightarrow \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B). \quad (20)$$

Вхождения $x \in A$ и $x \in B$ в правой части эквивалентности раскрываются с помощью предыдущего определения.

Строго говоря, (20) является определением, только когда по крайней мере один из термов A, B не является переменной; если же оба этих термина являются переменными, то $A = B$ уже будет выражением языка теории множеств. Тем не менее (20) будет истинно и в этом случае благодаря аксиоме объемности.

Наконец, если $\{x: \varphi(x)\}$ непосредственно предшествует знаку $\in$, то

$$\{x: \varphi(x)\} \in B \leftrightarrow \exists y(y = \{x: \varphi(x)\} \wedge y \in B).$$

Таким образом, $\{x: \varphi(x)\} \in B$ не может быть истинным, если $\{x: \varphi(x)\}$ не является множеством. Следовательно, как мы и ожидали, каждый элемент класса является множеством.

Теперь нужно позаботиться об одной технической детали. Поскольку отношение $=$ между термами является теперь определяемым, а не логическим понятием, то свойства этого отношения должны доказываться, а не извлекаться из аксиом логики. Это доказательство немного скучно, но несложно; из всех аксиом теории множеств оно использует лишь аксиому объемности.

Полезным классом является класс всех множеств, определяемый следующим образом:

$$V = \{x: x=x\}.$$

Отметим, что $A \in V$ есть один из способов выражения того обстоятельства, что A является множеством. В частности, наше предыдущее обозначение $\text{Set}\{x: \varphi(x)\}$ можно заменить на $\{x: \varphi(x)\} \in V$.

В обращении с классами необходима определенная осторожность. Мы теперь можем использовать $\{x: \varphi(x)\}$, не доказав предварительно, что эта совокупность есть множество. Однако это не означает, что можно утверждать $\psi(\{x: \varphi(x)\})$, если уже доказано $\forall y \psi(y)$. Поскольку $\forall y$ означает «для всех *множеств* y », то сначала необходимо доказать, что $\{x: \varphi(x)\}$ является множеством.

Теоретико-множественные операции и понятия естественным образом продолжаются на классы. Так, можно определить

$$A \cap B = \{x: x \in A \wedge x \in B\}.$$

Однако снова необходима некоторая осторожность. Мы можем определить $\{A\} = \{x: x=A\}$, но нужно иметь в виду, что если A есть собственный класс, то $\{A\}$ будет пустым множеством (так как ни одно множество не равно A).

Если мы имеем дело с классами, то естественно разрешить отношениям и функциям быть классами (а не только множествами) упорядоченных пар. При таком подходе теоретико-множественные операции (над множествами) могут рассматриваться как функции. Например, операция $\cup$ становится классом всех таких троек $\langle\langle y, z \rangle, x\rangle$, что $x = y \cup z$. (Легко видеть, что этот класс является собственным).

Теперь мы без труда можем выразить всё, что хотим сказать о каком-то одном классе. Однако ни одна формула теории множеств ничего не может сказать обо всех классах. Покажем на двух примерах, как эту трудность можно устранить.

Первым примером будет доказательство простейшего свойства классов; каждый класс равен самому себе. Чтобы показать это, нужно доказать равенство $A = A$ для любого терма A . Для этого заметим, что, согласно (20), $A = A$ означает $\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in A)$, а последнее утверждение следует из аксиом логики.

Этот простой пример иллюстрирует общую процедуру. Мы доказываем истинность какого-нибудь утверждения для всех классов тем, что докажем $\varphi(A)$ для произвольного терма A . Для этого надо доказать не одну формулу языка теории множеств, а бесконечно много формул, по одной для каждого терма A . Но обычно это несущественно, так как за редкими исключениями доказательство одно и то же для всех A .

Всё оказывается несколько более сложным, когда мы хотим утверждать существование класса с определенными свойствами. Проиллюстрируем ситуацию, переформулировав теорему 5.6 с тем, чтобы в ней речь шла о классах, а не об операциях. Пусть $\varphi(A, B)$ есть результат перевода на язык теории множеств следующего выражения: если A есть функция с областью определения $V \times V$, то B есть функция, определенная на классе всех ординалов, удовлетворяющая равенству $B(\alpha) = A(\alpha, B \upharpoonright \alpha)$ для всех α . Тогда теорема, о которой идет речь, интуитивно выражается посредством $\forall A \exists B \varphi(A, B)$. Но эта запись не является формулой языка теории множеств даже в смысле введенных выше правил обращения с термами, поскольку термы, не являющиеся переменными, не могут стоять после кванторов.

Что значит доказать $\forall A \exists B \varphi(A, B)$ в ZFC? Анализ нашего доказательства теоремы 5.6 дает ответ. Это значит, что мы должны показать, как по данному произвольному терму A можно построить другой терм B так, чтобы затем можно было доказать $\varphi(A, B)$ в ZFC.

Эти процедуры делают возможным обращение с любыми предложениями о классах. Имеется и еще один путь, состоящий в расширении языка введением специальных переменных для классов и разрешении таким переменным появляться после кванторов. Этот путь дает более простое и непосредственное решение проблем, обсуждавшихся выше. Однако существует и недостаток: дополнительная символика приносит и дополнительные хлопоты при проведении доказательств непротиворечивости. В целом в настоящее время существует тенденция придерживаться языка теории множеств и использовать методы, изложенные в этом параграфе.

§8. Новые аксиомы

Наиболее значительным открытием в теории множеств за последние годы является открытие невозможности решения средствами ZFC многих важных нерешенных проблем теории

множеств. Среди них – гипотеза континуума и проблема Сусмينا¹³⁵. Было бы интересно найти новые аксиомы, которые решали бы эти проблемы. Попробуем познакомить читателя с тем, что сделано в этой области и что еще предстоит сделать.

Как можно искать новые аксиомы? Одна идея вытекает из материала §4. Там сформулированы два принципа следующего вида: каждая *совокупность* множеств, удовлетворяющая определенным условиям, является множеством. Когда мы переходим к формулировке этих принципов в виде аксиом в языке теории множеств, мы можем сказать только, что каждый *класс*, удовлетворяющий этим условиям, является множеством. Нетривиальность этого момента обнаруживается некоторыми моделями теории множеств, используемыми в доказательствах непротиворечивости. Эти модели всегда имеют множество, принадлежащее рассматриваемой модели, некоторое подмножество которого этой модели не принадлежит.

К несчастью, затруднительно иметь дело с совокупностями, которые не являются классами. Рассмотрим, например, подход, связанный с добавлением новых переменных, обозначающих произвольные совокупности. Нетрудно написать аксиомы, которые говорят, что каждая совокупность, имеющая определенные свойства, является множеством. Однако этими аксиомами нельзя пользоваться, пока нет аксиом, утверждающих существование совокупностей. Очевидными аксиомами такого вида являются аксиомы, утверждающие, что каждый класс есть совокупность. Когда такие аксиомы введены, мы приходим к тому, с чего начали.

Лучшей была бы идея ввести в язык символы для новых операций над множествами так, чтобы было больше совокупностей вида $\{x: \varphi(x)\}$. Конечно, такие операции должны в самом деле быть новыми, т.е. они не должны быть определяемыми в языке теории множеств. В настоящее время известно очень мало таких операций; к тому же их введение в язык не решает ни одной из открытых проблем теории множеств. Таким образом, мы ничего не достигаем, используя этот подход.

Использование произвольных совокупностей может происходить другим путем. Если $\varphi(x)$ есть формула некоторого разумного языка, то мы можем думать о ней как о формуле, дающей закон для определения, какие множества принадлежат совокупности $\{x: \varphi(x)\}$. Как было отмечено при обсуждении аксиомы выбора, нет оснований считать, что каждая совокупность должна иметь такой закон. Если бы мы смогли глубже проанализировать понятие совокупности, построенной не в соответствии с каким-нибудь законом, то мы могли бы получить другие аксиомы, помимо аксиомы выбора, использующие такие совокупности, или по крайней мере найти более приемлемые аргументы для принятия самой аксиомы выбора.

Существует другой, более успешный подход к поиску новых аксиом. Напомним, что в §2 был сформулирован неопределенный принцип существования шагов, из которого следуют три более определенных принципа. Если бы мы могли получить другие более определенные принципы, то можно было бы надеяться на получение новых аксиом.

Упомянутый неопределенный принцип утверждает существование шагов, находящихся после многих других шагов. Таким образом, в свете отождествления шагов и ординалов в §5 можно ожидать, что новые аксиомы будут утверждать существование очень больших ординалов. Так как эти ординалы обычно оказываются кардиналами, то новые аксиомы называются *аксиомами больших кардиналов*. Такие аксиомы интенсивно исследуются; мы собираемся только указать направления этих исследований. По этому вопросу см. также §7 гл. 3 и добавление после указанного параграфа.

Пусть S есть совокупность всех шагов, которые могут быть получены с помощью трех более ясных принципов §2. Очевидно, что самым слабым следующим принципом такого рода было бы утверждение: существует шаг после всех шагов из S . Чтобы проверить это с помощью нашего неопределенного принципа, мы должны быть в состоянии представить себе такую ситуацию, когда все шаги из S полностью осуществлены, т.е. когда три принципа §2 не приводят к новым шагам. Без некоторых дополнительных рассуждений неясно, можем ли мы в самом деле представить себе такую ситуацию. (Здесь начинает проявляться слабость нашего неопределенного принципа). Предположим тем не менее, что наше воображение достаточно развито для выполнения этой задачи, и посмотрим, какая при этом получится новая аксиома.

Наша аксиома должна утверждать, что существует такой большой ординал α , что три принципа §2, применяемые к ординалам до α и множествам, строящимся раньше α , дают в ре-

¹³⁵ **МОИ 2016-03-11:** Так это название расшифровали программы OCR. Вообще оно нечитабельно, и проверить невозможно.

зультате снова ординалы, меньшие чем α . Что касается третьего принципа, то это означает, что если $x \in R(\alpha)$ и f есть функция из x в α , то $\cup$ (область значений f) $< \alpha$ (см. теорему 5.5). Если мы теперь предположим $\omega < \alpha$, то будет $\omega \in R(\alpha)$. Отсюда следует, что если u является счетным множеством ординалов, меньших чем α , то $\cup u < \alpha$. Таким образом, справедливы и первые два принципа §2, применяемые только к ординалам, меньшим чем α .

Итак, мы пришли к следующему определению: ординал α называется *недостижимым*, если $\omega < \alpha$, и всякий раз, когда f есть отображение некоторого множества, принадлежащего $R(\alpha)$, в α , то $\cup$ (область значений f) $< \alpha$. Нетрудно проверить, что каждый недостижимый ординал является кардиналом и что данное определение недостижимого кардинала эквивалентно стандартному.¹³⁶

Наша первая аксиома больших кардиналов утверждает, что существует недостижимый кардинал. Необходимо проверить, что это будет в самом деле новая аксиома, т.е. она недоказуема в ZFC. Сделаем набросок такой проверки.

Всё, что нам нужно, — это построить модель теории ZFC, в которой эта новая аксиома ложна. Если недостижимых кардиналов нет в классе всех множеств, то этот класс и образует такую модель. В противном случае предположим, что α есть наименьший недостижимый кардинал. Поскольку α и $R(\alpha)$ удовлетворяют трем принципам §2, то можно ожидать, что $R(\alpha)$ является моделью ZFC. Это и в самом деле так; доказательство очень похоже на наш вывод аксиом ZFC из принципов §2. То, что новая аксиома (существования недостижимого кардинала) не выполняется в $R(\alpha)$, выводится из отсутствия недостижимых кардиналов в $R(\alpha)$.

Влечет ли новая аксиома какие-нибудь интересные следствия? Известно по крайней мере одно из них. Знаменитая теорема Гёделя утверждает, что непротиворечивость ZFC не может быть доказана в ZFC. Но эта непротиворечивость может быть доказана с помощью нашей новой аксиомы. Ключевой факт уже сформулирован: если ординал α недостижим, то $R(\alpha)$ есть модель теории ZFC. Поскольку мы имеем множество, являющееся моделью ZFC, то нетрудно доказать, что ZFC непротиворечива.

В то же время эта аксиома не дает ничего нового для решения проблем, упомянутых в начале этого параграфа; известные доказательства независимости сохраняют силу при добавлении аксиомы недостижимого кардинала. Это означает, что нужно искать более сильные аксиомы больших кардиналов.

Рассмотрим одну такую аксиому, которая утверждает существование измеримого кардинала. Мы не приводим точного определения измеримого кардинала (см. §7 гл. 3). Достаточно сказать, что в этом определении нет ничего, указывающего на то, что измеримый кардинал должен быть большим. Тем не менее можно доказать, что измеримые кардиналы являются недостижимыми и, более того, в определенном смысле они превосходят по величине недостижимые кардиналы. Например, если α является измеримым кардиналом, то существует α недостижимых кардиналов, меньших, чем α .

Что мы хотели бы на самом деле сделать (но в настоящей момент не можем), так это переформулировать определение измеримого кардинала следующим образом: α является измеримым, если и только если α и $R(\alpha)$ замкнуты относительно некоторых операций. Тогда мы смогли бы обосновать существование измеримого кардинала, представив себе ситуацию, в которой эти операции не дают новых ординалов.

Мы видим, таким образом, что имеется меньше причин верить в существование измеримого кардинала, чем в существование недостижимого. С другой стороны, первое предположение решает различные интересные проблемы теории множеств. Упомянем один результат, который, вероятно, интересует математиков. Если существует измеримый кардинал, то каждое множество действительных чисел, являющееся непрерывным образом дополнения непрерывного образа борелевского множества, измеримо в смысле меры Лебега. Удивительно, что существование большого кардинала влечет измеримость определенных множеств действительных чисел.

Упомянем здесь еще одну аксиому (не относящуюся к аксиомам больших кардиналов): аксиому проективной детерминированности. Эта аксиома (о ней пойдет речь в §10 гл. 2) решает значительно больше проблем, чем аксиома существования измеримого кардинала. С другой стороны, нет оснований верить в истинность этой аксиомы, за исключением того, что она является красивой аксиомой с интересными следствиями.

Итак, мы видим, что чем больше проблем решается новой аксиомой, тем меньше оснований имеется для того, чтобы поверить в ее истинность. Более того, вообще нет ни одной

¹³⁶ См. гл. 3. — Прим. перев.

приемлемой аксиомы, которая решала бы самую важную из нерешенных проблем – гипотезу континуума. Поэтому мы находимся очень далеко от цели решить наши проблемы с помощью новых аксиом. Однако нет оснований огорчаться. Если очень простые рассуждения §2 привели нас так далеко, то есть надежда на то, что более глубокий анализ приведет нас к новым аксиомам с далеко идущими следствиями.

Глава 2. Об аксиоме выбора

Томас Дж. Йех

§1. Введение

Будем предполагать знакомство читателя с аксиомой выбора и с доказательствами некоторых теорем, использующими аксиому выбора.

Формулировка аксиомы выбора очень проста и часто фигурирует в дискуссиях по проблемам оснований математики.

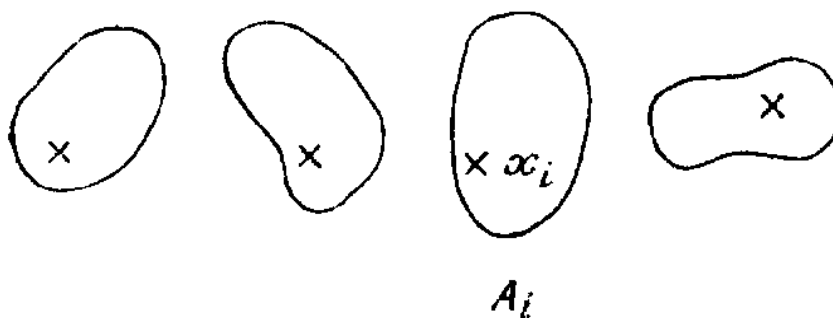


Рис. 1.

1.1. Аксиома (рис. 1). Пусть $\mathcal{F} = \{A_i: i \in I\}$ есть совокупность попарно непересекающихся непустых множеств. Тогда найдется множество $C = \{x_i: i \in I\}$, содержащее ровно по одному элементу x из каждого множества $A_i \in \mathcal{F}$.

Почему же эта простая (если не самоочевидная) аксиома привела к столь многочисленным обсуждениям? Ни одна из аксиом после пятого постулата Евклида о параллельных прямых не вызвала такого волнения в математических кругах и не возбудила так много споров по проблемам оснований математики.

Ответ состоит в неконструктивной природе аксиомы выбора. Эта аксиома утверждает существование множества C с определенными свойствами (именно, выбирающего ровно по одному элементу из каждого A_i), но не дает ни малейшего намека, как такое множество построить. Напротив, все остальные аксиомы теории множеств утверждают, что определенные конструкции, отправляясь от множеств, снова дают множества, и построенные определенным образом совокупности множеств также являются множествами. Например, аксиома степени утверждает, что для любого множества X совокупность $\mathcal{P}(X)$ всех его подмножеств является множеством.

Если читатель не считает это различие очень существенным, то я напомним, что вплоть до конца девятнадцатого века существование в математике по традиции считалось синонимом возможности построения. Сделанное Кантором альтернативное доказательство существования трансцендентных чисел и предложенное Гильбертом решение проблемы Гордана встретили скептическую реакцию и даже непризнание ведущих математиков своего времени. (В широких математических кругах упор на построение был даже еще сильнее: профессор Гермес потратил десять лет своей жизни на построение правильного 65 537-угольника, существование которого было доказано Гауссом столетием раньше).

Явная формулировка аксиомы выбора обычно приписывается Цермело. Согласно Френкелю, Бар-Хиллелу и Леви [1] (дающим прекрасный обзор не только аксиомы выбора, но и проблем аксиоматических оснований теории множеств вообще) первая ясная ссылка на аксиому выбора

сделана Пеано в работе по дифференциальным уравнениям, хотя Кантор еще раньше применял эту аксиому без явного упоминания.

В 1904 г. Цермело доказал, что каждое множество может быть вполне упорядочено (линейный порядок $<$ на множестве S называется *полным порядком*, если каждое непустое подмножество множества S имеет наименьший элемент). Ранее, построив теорию кардинальных чисел, Кантор поставил проблему определения величины континуума (*континуум-гипотезу*) и выдвинул предположение, что множество всех действительных чисел (континуум) может быть вполне упорядочено, или, что то же самое, это множество можно расположить в трансфинитную последовательность. Излишне говорить, что это предположение было встречено в штыки, так как никакого полного упорядочения континуума не было построено.

Для доказательства того, что каждое множество может быть вполне упорядочено, Цермело сформулировал аксиому выбора примерно в той же форме, в какой она используется теперь. В современной терминологии эта аксиома формулируется следующим образом.

1.2. Аксиома выбора. Для каждого семейства $\mathcal{F}$ непустых множеств найдется такая функция f , что $f(X) \in X$ для каждого множества X из семейства $\mathcal{F}$.

Такая функция называется *функцией выбора* на $\mathcal{F}$. Перед тем, как взглянуть на доказательство Цермело, убедимся, что формулировка 1.2 эквивалентна первой формулировке 1.1. Конечно, 1.1 есть частный случай 1.2, так как если семейство $\mathcal{F}$ состоит из попарно непересекающихся множеств, то 1.1 и 1.2, очевидно, выражают одно и то же. Теперь покажем, что если предположить принцип выбора для семейств непересекающихся множеств, то можно доказать общую формулировку 1.2.

Пусть $\mathcal{F}$ есть семейство непустых множеств: $\mathcal{F} = \{X: X \in \mathcal{F}\}$. Чтобы применить 1.1, используем следующий прием, «делающий множества из $\mathcal{F}$ непересекающимися». Для каждого $X \in \mathcal{F}$, пусть A_X есть совокупность всех таких упорядоченных пар $\langle X, a \rangle$, что $a \in X$:

$$A_X = \{X\} \times X.$$

Теперь совокупность $\{A_X: X \in \mathcal{F}\}$ состоит из попарно непересекающихся непустых множеств, и с помощью 1.1 мы можем выбрать по одному элементу z_X из каждого множества A_X . Но каждое множество z_X имеет вид $\langle X, a_X \rangle$, где $a_X \in X$. Следовательно, мы можем легко получить искомую функцию выбора на $\mathcal{F}$, определив $f(X) = a_X$ для каждого $X \in \mathcal{F}$.

Снова вернемся к Цермело. Доказательство теоремы о полном упорядочении проходит примерно так. Пусть S – произвольное множество; мы хотим построить полное упорядочение этого множества. Используя аксиому выбора, заключаем, что существует функция выбора f на семействе $\mathcal{F}$ всех непустых подмножеств множества S . С помощью трансфинитной индукции можно построить трансфинитную последовательность $\langle a_\alpha: \alpha < \theta \rangle$ элементов множества S следующим образом: если уже построены первые α членов $a_0, a_1, \dots, a_\xi, \dots$ ($\xi < \alpha$) этой последовательности, то проверяем, существуют ли элементы множества S , не фигурирующие среди этих членов, т.е. является ли непустым множество $X = S - \{a_\xi: \xi < \alpha\}$. Если это множество непусто, то выбираем a_α с помощью нашей функции выбора f : $a_\alpha = f(X)$. Эта процедура продолжается до тех пор, пока для некоторого ординала θ множество $S - \{a_\xi: \xi < \theta\}$ не станет пустым; иными словами, пока не будет $S = \{a_\xi: \xi < \theta\}$. Такое перечисление множества S ординалами и дает полное упорядочение S .

Теперь видно, что хотя мы и доказали предположение Кантора о возможности полного упорядочения континуума, мы, однако, не построили никакого «осязаемого» полного упорядочения. В сущности, одно сомнительное предположение мы лишь заменили другим столь же сомнительным предположением, именно аксиомой выбора.

Фактически аксиома выбора и теорема Цермело о полном упорядочении являются логически эквивалентными. Покажем, как аксиома выбора выводится из предположения о том, что каждое множество можно вполне упорядочить. Возьмем произвольное семейство $\mathcal{F}$ непустых множеств и через S обозначим объединение всех множеств этого семейства: $S = \cup \{X: X \in \mathcal{F}\}$. С помощью какого-нибудь полного упорядочения $<$ множества S мы можем определить функцию выбора f на семействе $\mathcal{F}$ следующим образом: если $X \in \mathcal{F}$, то $f(X)$ есть наименьший элемент множества X в смысле порядка $<$.

§2. Нужна ли нам аксиома выбора?

Ответ, конечно, зависит от того, в какой области математики мы работаем. Если речь идет о решении дифференциальных уравнений, о расслоенных многообразиях или об исследовании групп большого, но конечного порядка, то мы никогда не столкнемся с проблемой, имеющей отношение к аксиоме выбора. Однако значительная часть современной математики имеет дело с абстрактными бесконечными структурами, и во многих областях математической науки всё больше и больше интересуются вопросами оснований теории множеств. Без аксиомы выбора нельзя обойтись не только в логике (теории множеств и теории моделей), но и в других современных областях: теоретико-множественной топологии, алгебре, функциональном анализе, теории меры.

Чтобы проиллюстрировать использование аксиомы выбора, давайте рассмотрим следующий общеизвестный факт: объединение счетного семейства счетных множеств является счетным. Это утверждение широко используется в математическом анализе, и большинство математиков даже не подозревают, что его доказательство использует аксиому выбора. Обычно доказательство проходит примерно так:

[illegible]

поставить вопрос о ее формальной *непротиворечивости*: не приведет ли к противоречию добавление этой аксиомы к остальным аксиомам теории множеств? К счастью, Гёделем было установлено в 1939 г., что аксиома выбора не противоречит теории множеств (если эта теория сама непротиворечива). Кроме того, нельзя удовлетворяться формальной непротиворечивостью аксиомы. Если мы собираемся принять ее, то мы должны поверить в ее *правдоподобность*. Мы должны быть уверены, что доказательства, использующие аксиому выбора, и результаты, получаемые с ее помощью, не противоречат нашим представлениям о математическом мире. (Впрочем, я бы не слишком настаивал на этом. В конце концов, математика изобилует «противоестественными» примерами. Достаточно вспомнить построение Вейерштрассом непрерывной недифференцируемой функции). Наконец, снова в силу неконструктивного характера этой аксиомы было бы интересно выяснить, действительно ли необходимо использование аксиомы выбора в доказательствах некоторых теорем, и в какой степени: это поднимает вопрос об *относительной силе* различных ослабленных форм и следствий аксиомы выбора.

Сначала займемся вопросом правдоподобности. На первый взгляд аксиома выглядит почти очевидной: мы должны выбрать по одному элементу $f(X)$ из каждого множества X , принадлежащего данному семейству $\mathcal{F}$.

В популярных изложениях аксиому выбора часто сравнивают с выборами кандидатов на должность: на каждое множество X нужно смотреть как на список кандидатов на данную должность, и процесс голосования дает функцию выбора, определяющую избранного кандидата $f(X)$ для каждого списка X .

Конечно, эта аналогия дает обоснование аксиомы выбора в ее конечном случае, когда как семейство $\mathcal{F}$, так и все множества $X \in \mathcal{F}$ являются конечными. Однако, как известно, нельзя опрометчиво переносить на бесконечные множества наши представления, основанные на мире конечных множеств. Всё же, аксиома выбора доказуемо истинна в случае, когда семейство $\mathcal{F}$ конечно, независимо от того, являются ли конечными множества $X \in \mathcal{F}$.

Это доказывается индукцией по количеству множеств в $\mathcal{F}$. Если $\mathcal{F}$ состоит из одного непустого множества X , то любая функция f , единственным аргументом которой является X и значение которой на X является (произвольным) элементом a множества X , будет функцией выбора на X . А существование такой функции легко следует из того, что множество X непусто: последнее означает, что существует некоторое $a \in X$.

Предполагая, что аксиома выбора выполняется для всех n -элементных семейств $\mathcal{F}$, мы без труда докажем, что она выполняется и для всех $n+1$ -элементных семейств. Пусть $\mathcal{F} = \{X_1, \dots, X_n, X_{n+1}\}$ есть семейство, состоящее из $n+1$ непустых множеств. По индуктивному предположению семейство $\{X_1, \dots, X_n\}$ имеет функцию выбора g . Но поскольку X_{n+1} не пусто, то существует продолжение f функции g на всё семейство $\mathcal{F}$, значение которого на множестве X_{n+1} есть некоторое $a \in X_{n+1}$. Такая функция, очевидно, и будет функцией выбора на $\mathcal{F}$.

Другим случаем, когда аксиома выбора доказуемо истинна, является случай, при котором каждое $X \in \mathcal{F}$ состоит всего из одного элемента. Тогда $\mathcal{F}$ имеет функцию выбора, причем такая функция единственна.

Мы уже видели, что каждое конечное семейство $\mathcal{F}$ имеет функцию выбора. Напротив, конечность элементов семейства $\mathcal{F}$, вообще говоря, не обеспечивает существования функции выбора. В некоторых случаях конечность всё же помогает: в особенности если множества $X \in \mathcal{F}$ связаны с некоторой внешней структурой. Например, если $\mathcal{F}$ есть семейство конечных множеств действительных чисел, то функция выбора на $\mathcal{F}$ существует. Именно, для каждого $X \in \mathcal{F}$ можно определить $f(X)$ как наименьший элемент множества X . С другой стороны, если $\mathcal{F}$ состоит из конечных множеств множеств действительных чисел, то не видно способа найти функцию выбора на $\mathcal{F}$ (на самом деле в этом случае нельзя доказать существование функции выбора).

В классической иллюстрации, сделанной на эту тему Расселом, случай бесконечного множества пар ботинок сопоставляется со случаем бесконечного множества пар шнурков. В то время как множество пар обуви, очевидно, имеет функцию выбора (именно, берем правый ботинок из каждой пары), нет видимого пути для выбора (без обращения к аксиоме выбора) одного шнурка из каждой пары одновременно для всех пар шнурков.

§3. «Парадоксальное» разбиение шара

Некоторые возражения против аксиомы выбора основывались на том, что эта аксиома имеет парадоксальные следствия. С ее помощью можно получить результаты, противоречащие нашей интуиции. Наиболее известным примером такого рода является следующий парадокс.

3.1. Парадокс Банаха–Тарского. Используя аксиому выбора, можно разбить шар на конечное число частей, которые можно переставить так, что получится два шара такого же размера, как и исходный шар.

Дадим набросок доказательства этого «парадокса» с тем, чтобы показать, как используется аксиома выбора, и для того, чтобы выяснить, что в теореме в сущности нет ничего парадоксального, так как части шара, о которых идет речь, окажутся неизмеримыми множествами, конструкция которых по существу мало чем отличается от хорошо известной конструкции неизмеримого множества действительных чисел.

Конечно, части, на которые указанным образом разбивается шар, не могут быть измеримыми множествами, так как иначе получилось бы противоречие со свойством аддитивности меры. Напомним принадлежащую Витали известную конструкцию неизмеримого множества действительных чисел. Рассмотрим следующее отношение эквивалентности на действительных числах интервала $[0, 1]$:

$x \sim y$, если и только если $x - y$ рационально.

Это отношение эквивалентности порождает разбиение единичного интервала на классы эквивалентности. Используя аксиому выбора, мы выбираем по одному элементу из каждого класса эквивалентности и собираем эти элементы в множество M . Это множество $M \subseteq [0, 1]$ не может быть измеримым. Действительно, определим для каждого рационального r множество $M_r = \{x+r: x \in M\}$. По построению M множества M_r попарно дизъюнктны, и каждое действительное число принадлежит некоторому (единственному) M_r . Если бы M было измеримо, то каждое M_r имело бы ту же меру, что и M . Если M имеет меру 0, то каждое M_r имеет также меру 0, и действительная прямая оказывается объединением счетного числа множеств, имеющих меру 0, чего не может быть. Если, напротив, M имеет положительную меру, то объединение $\cup \{M_r: r \text{ рационально и } 0 \leq r \leq 1\}$ бесконечного числа непересекающихся множеств одинаковой положительной меры должно иметь бесконечную меру. Но этого также не может быть, поскольку указанное объединение включено в интервал $[0, 2]$.

Парадокс Банаха–Тарского базируется на более ранней теореме Хаусдорфа, дающей парадоксальное разбиение сферы.

3.2. Теорема Хаусдорфа. Сфера S может быть разбита на непересекающиеся множества $S = A \cup B \cup C \cup Q$ так, что:

- (i) множества A, B, C конгруэнтны между собой;
- (ii) множество $B \cup C$ конгруэнтно каждому из множеств A, B и C ;
- (iii) множество Q счетно.

Дадим очень краткий набросок доказательства. Более подробное доказательство содержится в книге Йеа [1].

Рассмотрим две оси a_φ и a_ψ вращения сферы и рассмотрим группу всех вращений, порожденных поворотом φ на 180° вокруг оси a_φ и поворотом ψ на 120° вокруг a_ψ . Каждое вращение из этой группы может быть описано формальным произведением («словом»), составленным из φ , ψ и ψ^2 , с учетом того, что $\varphi^2 = 1$ и $\psi^3 = 1$ (получилось, если угодно, свободное произведение групп $\{1, \varphi\}$ и $\{1, \psi, \psi^2\}$).

Во-первых, мы утверждаем, что оси a_φ и a_ψ можно выбрать таким образом, что разные «слова» описывают разные вращения, порожденные поворотами φ и ψ . Чтобы доказать это, достаточно определить угол θ между a_φ и a_ψ так, чтобы никакое нетривиальное слово не описывало тождественного вращения. Если некоторое слово описывает тождественное вращение, то θ будет решением определенного уравнения. При этом оказывается, что это уравнение имеет только конечное число решений, и, следовательно, существует лишь счетное множество таких углов θ , что некоторое нетривиальное слово описывает тождественное вращение. Значит, любой угол, не принадлежащий этому счетному множеству, будет искомым.

Пусть G есть группа всех слов (или вращений, порожденных поворотами φ и ψ). Решающим моментом доказательства является разбиение множества G на три непересекающихся множества $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ таких, что

$$\mathcal{A} \cdot \varphi = \mathcal{B} \cup \mathcal{C}, \quad \mathcal{A} \cdot \psi = \mathcal{B}, \quad \mathcal{A} \cdot \psi^2 = \mathcal{C}.$$

Построение такого разбиения несложно, и читатель, вероятно, сумеет самостоятельно его осуществить.

Теперь используем аксиому выбора аналогично тому, как это сделано в построении Витали. Каждое вращение $a \in G$ имеет две неподвижные точки на сфере. Значит, совокупность Q всех точек сферы, остающихся неподвижными при каком-нибудь отличном от тождественного вращения из G , является счетной, а множество $S-Q$ есть объединение непересекающихся классов эквивалентности («орбит»), соответствующих отношению эквивалентности: $x \sim y$, если и только если $y = xa$ для некоторого $a \in G$. Согласно аксиоме выбора существует множество M , содержащее ровно по одному элементу из каждой орбиты. Если мы теперь положим

$$A = M \cdot \mathcal{A}, B = M \cdot \mathcal{B}, C = M \cdot \mathcal{C},$$

то множества A, B, C и Q будут удовлетворять требованиям теоремы Хаусдорфа.

Теперь, чтобы получить парадокс Банаха–Тарского, рассмотрим следующее отношение эквивалентности между множествами в трехмерном евклидовом пространстве: $X \approx Y$, если и только если существует такое разбиение $X = X_1 \cup \dots \cup X_m$ множества X на конечное число непересекающихся множеств и такое разбиение $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_m$ на то же самое число непересекающихся множеств, что X_i конгруэнтно Y_i для каждого $i = 1, \dots, m$.

Нетрудно проверить, что $\approx$ действительно будет отношением эквивалентности, причем, если X не пересекается с X' , Y не пересекается с Y' , $X \approx Y$ и $X' \approx Y'$, то $X \cup X' \approx Y \cup Y'$. Более важным свойством является следующее: если $X \subseteq Y \subseteq Z$ и $X \approx Z$, то $X \approx Y$. (Доказательство этого свойства похоже на доказательство теоремы Кантора–Бернштейна: если $X \subseteq Y \subseteq Z$ и $|X| = |Z|$, то $|X| = |Y|$).

Имея в нашем распоряжении разбиение сферы, даваемое теоремой Хаусдорфа, можно без особого труда с помощью упомянутых свойств отношения $\approx$ доказать следующую теорему:

3.3. Теорема (Банах–Тарский, 1924). Замкнутый шар U может быть разбит на два непересекающихся множества $U = X \cup Y$ так, что $U \approx X$ и $U \approx Y$.

§4. Некоторые применения аксиомы выбора

В этом параграфе рассмотрим некоторые типичные приложения аксиомы выбора в математике. Уже была упомянута теорема Тихонова, утверждающая, что топологическое произведение любого семейства компактных пространств является компактным. Не удивительно, что эта теорема использует аксиому выбора; утверждение о том, что декартово произведение любого семейства непустых множеств непусто, само является переформулировкой аксиомы выбора. (Элементы декартова произведения являются функциями выбора).

Связь между теоремой Тихонова и аксиомой выбора действительно очень близкая: Келли показал, что аксиому выбора можно вывести из предположения о том, что теорема Тихонова справедлива. Таким образом, эти два утверждения логически эквивалентны (в теории множеств без аксиомы выбора).

Большое число доказательств, использующих аксиому выбора (в частности, в алгебре), проходит примерно одинаковым путем. Рассматриваемая теорема сводится к утверждению, говорящему о существовании *максимального* объекта в определенном классе объектов. Например, рассмотрим теорему, утверждающую, что каждое векторное пространство имеет базис. Очевидно, что множество векторов образует базис, если и только если оно линейно независимо и, кроме того, максимально среди всех линейно независимых множеств (т.е. нет строго большего линейно независимого множества). Таким образом, для доказательства этой теоремы достаточно показать, что существует максимальное линейно независимое множество векторов.

Другим примером такого рода является теорема Хана–Банаха в функциональном анализе. Один из вариантов этой теоремы утверждает, что каждый линейный функционал, определенный на подпространстве данного векторного пространства, может быть продолжен на всё пространство. Если снова рассмотреть семейство $\mathcal{F}$ всех продолжений данного функционала (не обязательно всюду определенных), то искомые всюду определенные продолжения этого функционала будут в точности максимальными элементами семейства $\mathcal{F}$.

Когда это явление было осознано, оно привело к формулировке некоторого общего принципа, на который часто ссылаются как на лемму Цорна (этот принцип был впервые доказан Куратовским и через двадцать лет после этого передеказан Цорном).

Пусть $\langle P, < \rangle$ есть частично упорядоченное множество.

Множество $C \subseteq P$ называется *цепью*, если оно линейно упорядочено отношением $<$. Элемент $a \in P$ называется *верхней гранью* C , если для каждого $c \in C$ выполняется $c \leq a$. Элемент $a \in P$ называется *максимальным*, если нет таких $x \in P$, что $a < x$.

4.1. Лемма Цорна. Пусть $\langle P, < \rangle$ есть непустое частично упорядоченное множество, удовлетворяющее следующему условию: каждая цепь в P имеет верхнюю грань. Тогда в P найдется максимальный элемент.

Давайте посмотрим, как лемма Цорна может быть использована в примерах, о которых шла речь выше. В первом примере пусть P есть совокупность всех линейно независимых подмножеств данного векторного пространства, и $X < Y$ означает $X \subset Y$. Цепью в P будет каждое семейство $C \subseteq P$ линейно независимых множеств, удовлетворяющее такому условию: если $X, Y \in C$, то либо $X \subseteq Y$, либо $Y \subseteq X$. Для каждой такой цепи C множество $\cup \{X: X \in C\}$ будет линейно независимым и будет верхней гранью для C . Следовательно, $\langle P, < \rangle$ удовлетворяетсылке леммы Цорна и поэтому имеет максимальный элемент $B \in P$. Это B и будет базисом рассматриваемого векторного пространства.

Аналогично проходит доказательство теоремы Хана–Банаха. В качестве P возьмем совокупность всех линейных функционалов, продолжающих данный функционал, и определим $f < g$ в случае, когда g продолжает f . Легко проверяется, что лемма Цорна применима к нашему множеству $\langle P, < \rangle$, а соответствующий максимальный элемент будет искомым продолжением.

Лемма Цорна без труда доказывается в предположении аксиомы выбора. Действительно, пусть $\langle P, < \rangle$ есть такое частично упорядоченное множество, каждая цепь в котором имеет верхнюю грань. Строим возрастающую трансфинитную последовательность элементов множества P : $a_0 < a_1 < \dots < a_n < \dots$. Пока мы не достигаем максимального элемента, всё время можно находить еще больший элемент (и достраивать им последовательность), так как каждая цепь имеет верхнюю грань. В конце концов будет получен максимальный элемент.

Стоит отметить, что и наоборот, из леммы Цорна вытекает аксиома выбора. Давайте посмотрим, как получить функцию выбора для произвольного семейства $\mathcal{F}$ непустых множеств с помощью леммы Цорна. Пусть P есть совокупность всех функций выбора на различных подсемействах семейства $\mathcal{F}$, упорядоченная следующим образом: $f < g$, если и только если g продолжает f . Применяя лемму Цорна, получаем функцию выбора на $\mathcal{F}$.

Рассмотрим теперь одно следствие аксиомы выбора, обладающее тем замечательным свойством, что ряд казалось бы не имеющих к нему никакого отношения теорем оказываются эквивалентными этому следствию.

Предполагается знакомство читателя с понятием булевой алгебры. Подмножество I булевой алгебры B называется *идеалом*, если имеют место следующие три условия:

- (i) $0 \in I$, $1 \notin I$,
- (ii) если $a \in I$ и $b \leq a$, то $b \in I$,
- (iii) если $a \in I$ и $b \in I$, то $a + b \in I$.

Идеал I в алгебре B называется *простым идеалом*, если для каждого $a \in B$ выполняется либо $a \in I$, либо $-a \in I$.

4.2. Теорема о простом идеале (Тарский). Каждая булева алгебра имеет простой идеал.

Доказательство теоремы о простом идеале снова является типичным приложением леммы Цорна. Так как идеал в алгебре B будет простым, если и только если он является максимальным в совокупности всех идеалов, мы просто применяем лемму Цорна к совокупности всех идеалов алгебры B .

Отметим, что теорема о простом идеале влечет свой более сильный вариант: *в любой булевой алгебре каждый идеал можно вложить в простой идеал*.

В самом деле, пусть I – идеал в алгебре B . Рассмотрим фактор-алгебру B/I . В ней существует простой идеал. Возьмем прообраз этого простого идеала относительно естественного гомоморфизма $h: B \rightarrow B/I$.

В частном случае, когда B является алгеброй всех подмножеств некоторого множества S , указанный более сильный вариант означает, что каждый идеал над S можно вложить в главный идеал над S . Соответственно, используя двойственное понятие фильтра и ультрафильтра, можно доказать, что каждый фильтр над любым множеством S может быть вложен в ультрафильтр. (На самом деле это утверждение эквивалентно теореме о простом идеале).

В свете формулировки теоремы о простом идеале в терминах ультрафильтров становится ясным, насколько важна эта теорема в теоретико-множественной топологии. Это подчеркивается

еще и тем, что теорема о простом идеале эквивалентна теореме Тихонова для произведений компактных хаусдорфовых пространств.

Теорема о простом идеале является важным инструментом и в логике. Например, одним из основных принципов теории моделей является *теорема компактности*: *если каждое конечное подмножество некоторого множества предложений Σ имеет модель, то Σ само имеет модель*. (См. «Теорию моделей»). Оказывается, что теорема компактности эквивалентна теореме о простом идеале.

Посмотрим теперь, как теорема компактности может быть использована в некоторых доказательствах вместо аксиомы выбора. Докажем, что каждое множество можно линейно упорядочить. (Так как теорема о простом идеале слабее, чем аксиома выбора, то мы не будем пытаться доказать, что каждое множество можно вполне упорядочить). Пусть множество S произвольно. Рассмотрим язык, содержащий имя x° для каждого элемента x множества S и имеющий бинарный предикат $<$. Пусть Σ есть следующее множество предложений:

$$\left. \begin{aligned} &\neg(x^\circ < x^\circ), \\ &(x^\circ < y^\circ \wedge y^\circ < z^\circ) \rightarrow x^\circ < z^\circ, \\ &x^\circ < y^\circ \vee y^\circ < x^\circ \vee x^\circ = y^\circ \end{aligned} \right\} \text{ для всех } x, y, z \in S.$$

Поскольку каждое конечное подмножество множества S можно линейно упорядочить, то, следовательно, каждое конечное подмножество множества Σ имеет модель. По теореме компактности само Σ также будет иметь модель, и эта модель дает линейное упорядочение множества S .

Для тех читателей, которым больше нравятся аргументы топологического характера, приведем пример доказательства, использующего топологический вариант теоремы о простом идеале. Следующий принцип довольно часто встречается в различных ситуациях и в разных видах (одна из версий называется *леммой Радо о селекции*):

4.3. Лемма. Пусть S – произвольное множество, E – конечное множество, а $\mathcal{F}$ является таким семейством функций t , что:

- (i) $\text{dom}(t)$ есть конечное подмножество множества S , а $\text{ran}(t) \subseteq E$, где $\text{dom}(t) = \{x: \exists y(\langle x, y \rangle \in t)\}$ – область определения функции t , а $\text{ran}(t) = \{y: \exists x(\langle x, y \rangle \in t)\}$ – область всех значений t ,
- (ii) если $t \in \mathcal{F}$ и $t' \subseteq t$, то $t' \in \mathcal{F}$,
- (iii) для каждого конечного $X \subseteq S$ найдется такое $t \in \mathcal{F}$, что $X \subseteq \text{dom}(t)$.

Тогда найдется такая функция $f: S \rightarrow E$, что для каждого конечного множества $X \subseteq S$ сужение $f \upharpoonright X$ принадлежит $\mathcal{F}$.

Доказательство. Чтобы доказать эту теорему, рассмотрим топологическую степень E^S (топология на E считается дискретной). Согласно теореме Тихонова для хаусдорфовых пространств E^S будет компактным пространством. Для каждого конечного $X \subseteq S$ положим $\mathcal{F}_X = \{f \in E^S: f \upharpoonright X \in \mathcal{F}\}$. Каждое множество $\mathcal{F}_X$ замкнуто, а семейство $\mathcal{C} = \{\mathcal{F}_X: X \subseteq S \text{ конечно}\}$ удовлетворяет требованию непустоты конечных пересечений. Следовательно, пересечение всех множеств $\mathcal{F}_X$ из $\mathcal{C}$ непусто и дает искомую функцию f . $\square$

Поскольку теорема Радо о селекции может быть использована для доказательства теоремы компактности, то она эквивалентна теореме о простом идеале.

Заметим, что теорема Хана–Банаха является на самом деле следствием теоремы о простом идеале; поэтому для ее доказательства полная аксиома выбора не является необходимой. Еще одно замечательное следствие теоремы о простом идеале – это теорема Стоуна–Чеха о компактификации.

В различных приложениях аксиомы выбора не всегда обязательно использовать ее самый общий вариант, утверждающий существование функции выбора на любом семействе непустых множеств. Во многих доказательствах, в частности в анализе, достаточно использовать утверждение о том, что каждое счетное семейство непустых множеств имеет функцию выбора. Довольно странно, что этот вариант аксиомы выбора более приемлем для критиков этой аксиомы, ведь он имеет такой же неконструктивный характер, как и общая формулировка, и лично мне не ясно, почему он должен быть более правдоподобным.

Одним из очевидных следствий счетной аксиомы выбора является утверждение о том, что объединение счетного числа счетных множеств счетно (см. доказательство в §2). Этот факт часто

используется в классическом анализе и теории меры, в частности для доказательства основных свойств борелевских множеств и меры Лебега или утверждения о том, что множества первой категории (т.е. объединения счетного числа нигде не плотных множеств) замкнуты относительно счетных объединений.

Счетная аксиома выбора также необходима в дескриптивной теории множеств (гл. 8); без нее, например, может случиться так, что континуум будет объединением счетного числа счетных множеств. Она используется и в некоторых других теоремах дескриптивной теории множеств. Однако специалисты по дескриптивной теории множеств больше любят следующий более сильный принцип (*принцип зависимого выбора*):

Если ρ есть бинарное отношение на непустом множестве A , причем для каждого же A найдется такое $x \in A$, что $x\rho x$, то существует такая последовательность $\langle x_m: m \in \omega \rangle$ элементов множества A , что

$$x_0\rho x_1, x_1\rho x_2, \dots, x_m\rho x_{m+1}, \dots$$

Принцип зависимого выбора влечет счетную аксиому выбора. Действительно, пусть дана счетная последовательность непустых множеств $S_0, S_1, S_2, \dots$. Определим A как совокупность всех функций выбора на первых n множествах $S_0, \dots, S_{n-1}$ для всех натуральных n . Определим также $f\rho g$ в случае, когда g продолжает f . Последовательность $f_0, f_1, f_2, \dots$, удовлетворяющая $f_0\rho f_1, f_1\rho f_2$ и т.д., порождает функцию выбора на всём семействе $\{S_n: n \in \omega\}$.

Принцип зависимого выбора влечет и некоторые другие замечательные следствия. Например, если линейный порядок $<$ не является полным порядком, то существует бесконечная убывающая последовательность $a_0 > a_1 > a_2 > \dots$

§5. Непротиворечивость аксиомы выбора

В отличие от вопроса правдоподобия, непротиворечивость аксиомы выбора является чисто формальной проблемой аксиоматической теории множеств.

Система аксиом Σ для какой-то математической теории называется *непротиворечивой*, если нельзя получить противоречие, опираясь на аксиомы из Σ . Теорема Гёделя о неполноте утверждает, что непротиворечивость достаточно сильной теории (как, например, теория множеств) не может быть установлена методами, формализуемыми в рассматриваемой теории. Иными словами, нельзя формально доказать непротиворечивость аксиоматической арифметики, теории множеств и тому подобных теорий в рассматриваемой теории.

Однако можно всё же поставить вопрос, является ли определенная аксиома A *непротиворечивой относительно* некоторой аксиоматической системы Σ , т.е. будет ли система Σ с добавленной аксиомой A непротиворечивой в предположении, что сама Σ непротиворечива. Иными словами, это означает, что отрицание аксиомы A нельзя доказать в теории Σ (в указанном предположении). В случае аксиомы выбора вопрос состоит в том, чтобы доказать, что она непротиворечива относительно остальных аксиом теории множеств, т.е. ее нельзя опровергнуть, используя остальные аксиомы (если эти аксиомы сами образуют непротиворечивую теорию).

Непротиворечивость аксиомы выбора в этом смысле была доказана Гёделем в 1939 г. (вместе с непротиворечивостью континуум-гипотезы). Перед тем как наметить основную идею доказательства Гёделя (подробное доказательство — в гл. 5), скажем несколько слов о доказательствах непротиворечивости вообще.

Читатель, вероятно, знаком с проблемой постулата Евклида о параллельных прямых и с различными моделями неевклидовой геометрии. Эти модели устанавливают недоказуемость постулата о параллельных в геометрии тем, что они удовлетворяют всем остальным аксиомам геометрии, кроме постулата о параллельных. Вообще, для того чтобы доказать непротиворечивость некоторой аксиомы относительно какой-то теории Σ (или, что то же самое, недоказуемость отрицания), обычно строят модель теории Σ , в которой эта аксиома истинна, отправляясь от некоторой данной модели теории Σ .

Укажем два метода получения моделей теории множеств, которые удовлетворяют аксиоме выбора. Оба метода принадлежат Гёделю.

Первая модель состоит из *конструктивных множеств*. В основе конструктивных множеств лежит следующая идея. Так как аксиомы теории множеств постулируют возможность различных построений, то должна существовать минимальная совокупность множеств, замкнутых относительно всех возможных теоретико-множественных конструкций. Таким образом, *конструктивную модель* L (универсум всех конструктивных множеств) строят трансфинитной индукцией, отправляясь от пустого множества и производя замыкания относительно теоретико-

множественных операций. (Детали этого построения содержатся в главе 5 о конструктивных множествах). Конструктивная модель удовлетворяет всем аксиомам теории множеств, а также аксиоме выбора. Аксиома выбора оказывается истинной в этой модели по той причине, что все множества в конструктивной модели можно расположить в трансфинитную последовательность: конструктивное множество X предшествует конструктивному множеству Y , если X строится раньше Y .

Иными словами, в модели L мы имеем полное упорядочение универсума, и поэтому аксиома выбора выполняется в L .

Другая модель (модель HOD) использует *определимые множества*. Она состоит из всех множеств, которые являются *наследственно ординально определимыми*. Это означает, что берутся множества, определимые формулой, содержащей только ординалы в качестве параметров, причем таким же образом определимы элементы этих множеств, элементы их элементов и т.д. Модель HOD замкнута относительно теоретико-множественных операций и в основном по этой причине удовлетворяет всем аксиомам теории множеств. Снова существует полное упорядочение универсума HOD: мы можем перенумеровать все возможные способы определения множеств, и с помощью этой нумерации и естественного полного упорядочения ординальных параметров устроить полное упорядочение HOD множеств.

§6. Невыводимость аксиомы выбора

В 1963 г. Коэн построил модель теории множеств, в которой аксиома выбора оказалась ложной, доказав таким образом, что аксиому выбора нельзя вывести из остальных аксиом теории множеств. Коэн ввел новый мощный метод построения моделей, метод *вынуждения* (форсинга), и использовал этот метод для доказательств невыводимости аксиомы выбора и континуум-гипотезы.

Поскольку метод вынуждения подробно изложен в гл. 4, то мы здесь лишь наметим основные идеи этого метода и главные свойства генерических моделей. Построение генерической модели начинают с некоторой данной модели теории множеств, которая называется *исходной моделью*, и пробуют расширить эту модель до большей модели, в которой те же ординалы, что и в исходной модели, однако есть новые множества, которых в исходной модели нет. Поскольку всё делается в исходной модели, то новые множества являются только гипотетическими, или воображаемыми, и не могут быть полностью описаны внутри исходной модели. Вместо этого выделяются некоторые условия, вынуждающие частичную информацию о новых множествах. Основной концепцией понятия *вынуждения* является отношение « p вынуждает σ », где p есть вынуждающее условие, а σ – предложение, содержащее имена для новых множеств. Для каждого такого предложения σ некоторые условия могут вынуждать его истинность, некоторые другие – его ложность, а могут быть и такие, которые не вынуждают ни того, ни другого. Однако всегда существует такое условие p , которое *решает* σ , т.е. либо p вынуждает σ , либо p вынуждает $\neg\sigma$.

Для построения генерических моделей постулируют существование *генерического* множества G условий, т.е. такого непротиворечивого множества вынуждающих условий, что для каждого предложения σ в G найдется условие, решающее σ . Генерическое множество, вообще говоря, не принадлежит исходной модели. С помощью такого множества G каждое предложение рассматриваемого языка объявляется либо истинным, либо ложным, а каждому имени приписывается вполне определенное множество (возможно принадлежащее, а возможно и не принадлежащее исходной модели). Совокупность множеств, которые получаются таким способом, включает все множества из исходной модели и множество G и является замкнутой относительно всех теоретико-множественных построений. Эта совокупность является моделью теории множеств и называется *генерическим расширением* исходной модели. Важным свойством генерического расширения является то, что его можно изучать, не выходя из исходной модели, так как любое предложение будет истинным в расширении, если и только если оно вынуждается некоторым условием из G .

Если в исходной модели M истинна аксиома выбора, то она остается истинной и в любом ее генерическом расширении. Таким образом, если мы хотим построить модель, в которой аксиома выбора ложна, то мы должны провести дополнительное построение. Идея этого построения состоит в том, что новые множества в некоторых типах расширений $M[G]$ очень похожи друг на друга, и поэтому не существует *определимых* полных упорядочений в $M[G]$. Мы берем бесконечное семейство $A \in M[G]$, состоящее, скажем, из новых множеств натуральных чисел, $A = \{a: a \in A\}$, и рассматриваем модель $N = M(\{a: a \in A\})$, полученную добавлением всех

множеств $a \in A$ к исходной модели. При этом получится $M \subset N \subset M[G]$, и поскольку мы не добавили к M полного упорядочения множества A , то можно ожидать, что в N не окажется полных упорядочений этого множества.

Такое построение модели N , называемой *симметрическим расширением* M , использует идею, восходящую еще к Френкелю, который в двадцатых годах предложил метод установления недоказуемости аксиомы выбора. Его идеи были разработаны Мостовским в тридцатых годах. Мостовский ввел метод построения моделей, известных как модели Френкеля–Мостовского, или *пермутационные модели*.

Хотя метод Френкеля–Мостовского и привел к моделям, в которых аксиома выбора ложна, но он не решил полностью проблему недоказуемости аксиомы выбора в теории множеств, так как полученные модели оказались не совсем моделями теории множеств. Универсум Френкеля–Мостовского (рис. 2) отличается от обычной теории множеств тем, что в нем есть *атомы*, или *праэлементы* – объекты, не содержащие элементов (но и не совпадающие с пустым множеством, которое также не содержит элементов). Универсум Френкеля–Мостовского состоит из всех множеств, которые строятся из атомов, в то время как настоящий универсум теории множеств строится только из пустого множества. (См. обсуждение в гл. 1).

Как показано на рис. 2, настоящий универсум представляет собой часть универсума Френкеля–Мостовского; будем называть его ядром последнего.

Полезным свойством атомов является то, что они очень похожи друг на друга. Этот факт используется как главный инструмент в методе Френкеля–Мостовского.

Рассмотрим простейший пример пермутационной модели. Пусть множество A всех атомов бесконечно.

Каждая перестановка π множества A естественным образом продолжается на универсум FM (Френкеля–Мостовского). Именно, если множество X таково, что $\pi(x)$ уже определено для всех $x \in X$, то полагаем $\pi(X) = \{\pi(x) : x \in X\}$. Перестановка π может сдвигать лишь множества, не входящие в ядро, так как $\pi(\emptyset) = \emptyset$, и поэтому $\pi(X) = X$ для каждого множества X , входящего в ядро.

Назовем множество X *симметрическим*, если найдется такое конечное множество атомов $\{a_1, \dots, a_n\}$ (*основание* X), что $\pi(X) = X$ для каждой перестановки π , оставляющей все a_i , $1 \leq i \leq n$, неподвижными: $\pi(a_1) = a_1, \dots, \pi(a_n) = a_n$. Пусть $\mathcal{U}$ есть класс всех наследственно симметрических множеств X (т.е. симметрическим является само X , все элементы X , все элементы элементов X и т.д.). Этот класс $\mathcal{U}$ замкнут относительно всех операций, и тем самым $\mathcal{U}$ является моделью теории множеств с атомами. Ясно, что все элементы ядра симметрические, и поэтому $\mathcal{U}$ содержит ядро; $\mathcal{U}$ содержит и все атомы, поскольку каждый атом образует свое основание. Заметим также, что если некоторая совокупность S атомов принадлежит универсуму $\mathcal{U}$, то либо S конечно, либо $A - S$ конечно: нетрудно проверить, что бесконечное множество атомов с бесконечным дополнением не может иметь конечное основание!

Теперь понятно, почему аксиома выбора не верна в $\mathcal{U}$. Множество A нельзя вполне упорядочить в $\mathcal{U}$, так [как] в противном случае его можно было бы разбить на два бесконечных множества.

Метод Френкеля–Мостовского очень прост и был использован для получения многих результатов о независимости. Однако эти результаты ничего не давали для настоящих множеств, поскольку ядро не затрагивается построением пермутационной модели. В нашем примере есть множество, которое не может быть вполне упорядочено, но оно является множеством атомов, а не множеством действительных чисел или каких-нибудь других истинно математических объектов.

Идею пермутационных моделей можно использовать в методе вынуждения и построить модели настоящей теории множеств, в которых не выполняется аксиома выбора. Как сказано выше, строится *симметрическая модель* N такая, что $M \subset N \subset M[G]$. Идея пермутаций используется следующим образом. Рассмотрим перестановки множества вынуждающих условий

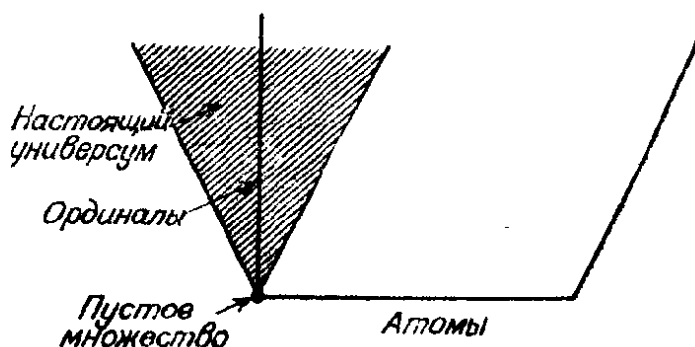


Рис. 2.

(или автоморфизмы соответствующей булевой алгебры) и применим эти перестановки для построения перестановок *имен* (или для построения автоморфизмов булевозначной модели). Затем расширим исходную модель M добавлением только тех новых множеств, которые имеют *симметрические имена* (и такие же имена имеют их элементы, элементы их элементов и т.д.). Таким образом, получится совокупность $N \subseteq M[G]$, которая включает M , так как никакая перестановка не изменяет канонические имена для множеств из исходной модели. N будет моделью теории множеств, называемой *симметрическим расширением модели M* .

Этот метод использует аргументы, очень похожие на те, которые участвуют в построении пермутационных моделей. С его помощью получены модели, в которых ложна аксиома выбора. Самым простым примером симметрической модели является расширение с помощью бесконечного множества A имен для генерических множеств натуральных чисел. При этом аналогично случаю универсума U нужно использовать перестановки множества A и конечные основания. Получается модель $N = M(\{a: a \in A\})$, в которой множество A является бесконечным множеством множеств натуральных чисел и не может быть вполне упорядочено. На самом деле, никакое бесконечное подмножество множества A не может быть вполне упорядочено, и, таким образом, A будет примером *дедекиндова множества*, т.е. бесконечного множества, не имеющего счетных подмножеств. Поскольку множества натуральных чисел можно отождествить с действительными числами, то мы имеем пример дедекиндова множества действительных чисел.

Сходство между пермутационными моделями и симметрическими моделями лежит в основе многих построений, и в следующем параграфе мы обсудим, как результаты для теории множеств с атомами можно некоторым единым методом преобразовать в соответствующие результаты для теории множеств без атомов.

§7. Теоремы о переносе

Как уже упоминалось выше, метод симметрических моделей теории множеств использует идеи, которые были ранее разработаны для моделей Френкеля–Мостовского. Например, модель $M(\{a: a \in A\})$, построенная Коэном для доказательства независимости аксиомы выбора, аналогична рассмотренной выше простейшей пермутационной модели. Вместо атомов в модели Коэна фигурируют генерические множества натуральных чисел. Всё же аналогия между пермутационной моделью и моделью Коэна не совсем полная. Мы видели, что в пермутационной модели множество A нельзя разбить на два непересекающихся бесконечных множества. С другой стороны, в модели Коэна A есть множество действительных чисел, а каждое бесконечное множество действительных чисел можно разбить на два непересекающихся бесконечных подмножества (в действительности это можно сделать с каждым бесконечным линейно упорядоченным множеством). Различие объясняется тем, что в модели Коэна множество A имеет внешнюю структуру (наличие линейного порядка), которая и препятствует его элементам быть совершенно похожими, как это получается в случае атомов.

В другой модели Френкеля–Мостовского множество A является объединением счетной совокупности пар $\{a_n, b_n\}$ атомов, и при этом счетное семейство пар $\{\{a_n, b_n\}: n \in \omega\}$ не обладает функцией выбора. (Здесь атомы играют роль шнурков в примере Рассела). Поскольку каждое семейство конечных множеств действительных чисел имеет функцию выбора, то нельзя надеяться на построение симметрической модели, которая была бы аналогична этой FM модели с заменой атомов действительными числами. Однако другая модель Коэна дает как раз такой результат; в ней множества a_n и b_n являются *множествами действительных чисел*. Иными словами, более точной будет такая аналогия между пермутационными моделями и симметрическими расширениями, когда вместо атомов берутся более абстрактные, менее различимые множества. Оказывается, что если роль атомов будет поручена *множествам множеств ординалов*, то мы получим достаточно удовлетворительную аналогию между пермутационными моделями и симметрическими моделями. Следующая теорема показывает, что любую пермутационную модель можно вложить в симметрическую модель теории множеств «с достаточной степенью точности».

Для каждого множества S и каждого ординала α вводим α -ю итерацию $\mathcal{P}^\alpha(S)$ операции степени (множества всех подмножеств):

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^1(S) &= \mathcal{P}(S) = \{X: X \subseteq S\}, \\ \mathcal{P}^{\alpha+1}(S) &= \mathcal{P}^\alpha(S) \cup \mathcal{P}(\mathcal{P}^\alpha(S)). \\ \mathcal{P}^\alpha(S) &= \bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{P}^\beta(S), \text{ если ординал } \alpha \text{ предельный.}\end{aligned}$$

7.1. Теорема о вложении (Йех – Сохор, см. рис. 3). Пусть A является множеством всех атомов некоторой пермутационной модели $\mathcal{U}$, а α – некоторый ординал в $\mathcal{U}$. Тогда существует симметрическая модель N теории множеств и вложение $e: \mathcal{U} \rightarrow N$ такие, что множество $\mathcal{P}^\alpha(A)$ в $\mathcal{U}$ и множество $\mathcal{P}^\alpha(e(A))$ в N окажутся при этом $\in$ -изоморфными.

Модель N строится как симметрическое расширение ядра M модели $\mathcal{U}$, а множество $e(A)$ состоит из множеств множеств ординалов в N .

Эта теорема о вложении играет большую роль потому, что многие результаты о независимости, полученные для теории множеств с атомами методом Френкеля–Мостовского, могут быть автоматически перенесены на обычную теорию множеств. Этот метод переноса годится для довольно широкого класса утверждений (который здесь не будет описан); речь идет об экзистенциальных утверждениях определенного вида.

Типичным примером является утверждение «существует множество, которое нельзя линейно упорядочить». Пусть $\mathcal{U}$ есть пермутационная модель, содержащая множество, которое невозможно упорядочить. Для простоты предположим, что само A нельзя упорядочить в $\mathcal{U}$. В этой ситуации мы строим модель теории множеств, в которую можно так вложить $\mathcal{U}$, что $\mathcal{P}^\omega(A)$ окажется изоморфным множеству $\mathcal{P}^\omega(e(A))$. Отсюда следует, что $e(A)$ нельзя упорядочить в N , поскольку каждое упорядочение множества A , будучи бинарным отношением на A , обязано принадлежать множеству $\mathcal{P}^\omega(A)$.

Известны многочисленные приложения этого метода переноса, причем рассматриваемые утверждения всегда оказываются экзистенциальными. Однако описанный метод неприменим, когда мы хотим доказать невыводимость одного утверждения из другого. Рассмотрим следующий пример: мы хотим доказать, что аксиома выбора сильнее, чем теорема об упорядочении; для этого нужна модель, в которой аксиома выбора не выполняется, но каждое множество может быть линейно упорядочено. Такая модель существует (результат Леви).

Мы строим пермутационную модель методом Френкеля–Мостовского и пытаемся перенести этот результат о невыводимости с теории множеств с атомами на обычную теорию множеств. Отрицание аксиомы выбора легко переносится указанным методом, но утверждение «каждое множество можно линейно упорядочить» не переносится. Всё же оказалось возможным, исследовав структуру пермутационной модели, «наложить» затем эту структуру на соответствующую симметрическую модель. Для случая теоремы об упорядочении можно использовать технику конечных оснований, упомянутую в §6, и ввести аналогичную структуру в модель N . Этого оказывается достаточно для того, чтобы перенести утверждение «каждое множество можно линейно упорядочить».

Метод переноса усовершенствован в последние годы Д. Пинкусом, и теперь теоремам о переносе поддается большинство результатов о невыводимости, полученных методом Френкеля–Мостовского, несмотря на то, что эти теоремы имеют дело со слишком специфическими на первый взгляд формулами.

Поскольку присутствие атомов отличает модели Френкеля–Мостовского от моделей теории множеств, то нужно иметь в виду, что не всякий результат о невыводимости может быть, перенесен. Закончим этот параграф примером утверждения, которое эквивалентно аксиоме выбора в обычной теории множеств, но имеет пермутационную модель, в которой не выполняется аксиома выбора.

(Аксиома кратного выбора). Для каждого семейства $\mathcal{F}$ непустых множеств найдется такая функция f , определенная на $\mathcal{F}$, что $f(X)$ будет непустым конечным подмножеством множества X при любом $X \in \mathcal{F}$.

§8. Математика без аксиомы выбора

Так как аксиома выбора не противоречит остальным аксиомам теории множеств, то не видно причин, почему ее нельзя было бы применять в математических доказательствах. Тем не

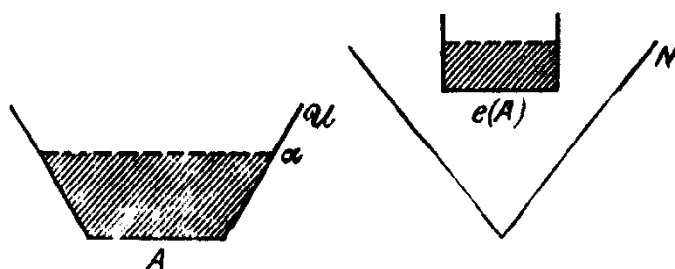


Рис. 3.

менее в силу того, что характер этой аксиомы отличает ее от остальных аксиом, имеет смысл исследовать модели теории множеств, которые не удовлетворяют аксиоме выбора. Ситуация аналогична неевклидовым геометриям: изучая такие модели, мы узнаем, какие теоремы в действительности опираются на аксиому выбора и каковы связи между следствиями и различными ослабленными формами этой аксиомы.

Наиболее интересными из большого числа известных результатов являются те, которые относятся к действительным числам. Особенно интересен результат Соловея, построившего модель теории множеств, где каждое множество действительных чисел измеримо по Лебегу. В модели Соловея также выполняется принцип зависимого выбора, и поэтому могут быть доказаны все стандартные теоремы из теории меры Лебега и дескриптивной теории множеств. Кроме того, универсум модели Соловея привлекает специалистов по анализу тем, что в нем нет таких искусственных контрпримеров, как неизмеримое множество Витали, множество, не имеющее свойства Бэра, разрывная аддитивная функция и т.д.

Как мы уже указывали, в построенной Коэном модели имеется *дедекиндово* множество действительных чисел, т.е. бесконечное множество, не содержащее счетных подмножеств. Такое множество A порождает ряд интересных примеров. Нетрудно показать существование предельной точки у множества A . Однако эта предельная точка a не может быть пределом никакой последовательности элементов множества $A - \{a\}$, так как A дедекиндово. Это показывает, что два стандартных определения предельной точки (одно через окрестности, а другое через последовательности) не будут эквивалентными, если нет аксиомы выбора.

Непрерывность функции действительной переменной также определяется двумя способами: один через ε - δ -определение, а другой говорит, что из $\lim x_n = x$ следует $\lim f(x_n) = f(x)$. С помощью дедекиндова множества действительных чисел можно построить функцию, которая непрерывна в смысле определения через пределы, но разрывна в смысле ε - δ -определения.

Другая интересная модель построена Феферманом и Леви; в ней множество всех действительных чисел является объединением счетного числа счетных множеств.

Пермутационные модели вместе с теоремами о переносе являются источником некоторых других интересных контрпримеров. Следующие примеры были построены Лёйхли в пермутационных моделях, а затем перенесены на теорию множеств с помощью теоремы о вложении (за исключением примера поля без алгебраического замыкания, перенос которого сделал Пинкус):

- (а) векторное пространство, не имеющее базиса;
- (б) векторное пространство, у которого есть два базиса различной мощности;
- (с) свободная группа, коммутант которой не является свободной группой;
- (д) поле, не имеющее алгебраического замыкания.

В §4 подробно обсуждалась теорема о простом идеале. Поскольку она влечет теорему об упорядочении, а эта последняя недоказуема в теории множеств (без аксиомы выбора), то, следовательно, и теорема о простом идеале будет недоказуема. Она следует из аксиомы выбора, но не эквивалентна ей: Халперн и Леви показали, что аксиома выбора не следует из теоремы о простом идеале.

Несколько слов об ультрафильтрах. Феферман построил модель, в которой нет нетривиальных ультрафильтров над множеством всех натуральных чисел; этот результат был усилен Блассом, который построил модель, где вообще нет нетривиальных ультрафильтров.

Теория кардинальных чисел становится весьма интересной, если убрать аксиому выбора. К примеру, без аксиомы выбора нельзя доказать, что любые два кардинала сравнимы; справедливо только то, что отношение $|X| < |Y|$ является частичным порядком на совокупности всех кардиналов. Не слишком много фактов можно установить об этом порядке, поскольку, согласно результату автора этой главы, для любого частично упорядоченного множества существует модель теории множеств, в которой есть множество кардиналов, изоморфное данному частично упорядоченному множеству.

Известно много результатов, относящихся к *дедекиндовым кардиналам* (кардиналам дедекиндовых множеств). Например, можно построить модель с таким бесконечным кардиналом κ , что 2^κ является в этой модели дедекиндовым кардиналом. (В то же время нетрудно показать, что для каждого бесконечного кардинала κ будет $2^{2^\kappa} \geq \aleph_0$.)

Один старый результат Тарского утверждает, что если для каждого бесконечного кардинала κ выполняется $\kappa \cdot \kappa = \kappa$, то аксиома выбора имеет место. Недавняя конструкция Сагеева показывает, что для равенства $\kappa + \kappa = \kappa$ ситуация иная. В модели Сагеева это равенство истинно для всех бесконечных κ , но аксиома выбора не верна.

Если аксиома выбора имеет место, то каждый непредельный кардинал $\aleph_{\alpha+1}$ регулярен. В упомянутой выше модели Леви–Феффермана кардинал $\aleph_1$ оказывается сингулярным, так как в ней существует возрастающая счетная последовательность ординалов $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n < \dots$, предел которой равен ω_1 . Вот одна открытая проблема: построить модель теории множеств, в которой *каждый* кардинал является пределом счетной последовательности.¹³⁷ Известно только, что для такого построения требуется предположение о существовании некоторого большого кардинала.

Закончим этот параграф формулировкой одной интересной проблемы комбинаторного характера, ставшей предметом большого числа статей и решение которой может включать не только описанные выше теоретико-множественные методы, но и некоторые фрагменты теории чисел и теории конечных групп. Для каждого натурального n рассматривается утверждение:

C_n : Если $\mathcal{F}$ есть семейство множеств, каждое из которых имеет ровно n элементов, то существует функция выбора на семействе $\mathcal{F}$.

Изучение этих утверждений было начато Тарским: он, в частности, заметил, что из C_2 следует C_4 .

Пусть множество A четырехэлементно, и предположим, что существует функция f , осуществляющая выбор на двухэлементных множествах. Используем f для выбора некоторого элемента из множества A . (Предлагаемая процедура выбора окажется вполне определенной и одинаковой для всех четырехэлементных множеств A). Имеется шесть двухэлементных подмножеств множества A . Для каждого $x \in A$ пусть $q(x)$ есть количество таких пар $\{x, y\} \subseteq A$, что $f(\{x, y\}) = x$. Пусть q есть наименьшее из всех $q(x)$, и $B = \{x \in A: q(x) = q\}$. Нетрудно проверить, что $B \neq A$, и, следовательно, B имеет один, два или три элемента. Если B имеет один элемент, то мы и выбираем этот элемент; если B имеет три элемента, то выбирается оставшийся элемент из A . Наконец, если B имеет два элемента, то выбираем элемент $f(B)$.

Это тонкое рассуждение поднимает ряд вопросов. Общая проблема состоит в том, чтобы установить, какие комбинации утверждений C_n выводятся из остальных комбинаций этих утверждений. Разные теоремы в литературе дают необходимые и достаточные условия (носящие теоретико-числовой или теоретико-групповой характер) для такой выводимости. Одним из примеров таких теорем является теорема о том, что импликация $C_2 \rightarrow C_n$ доказуема, если и только если $n = 1, 2$ или 4 . Часть «только если» в этой теореме была доказана Мостовским для теории множеств с атомами, а затем перенесена на теорию множеств методом Йеха–Сохора и Пинкуса. Читателю, может быть, будет интересно узнать, что доказательство Мостовского использует идеи теории чисел, в частности постулат Бертрана.

§9. Определимый выбор

В этом параграфе рассматривается вопрос, когда можно явно определить функцию выбора. В §5 были упомянуты две модели теории множеств: конструктивный универсум L и модель HOD всех наследственно ординально определимых множеств. В обеих этих моделях универсум имеет определимое полное упорядочение. (Модель L является наименьшей моделью, содержащей все ординалы, а модель HOD есть наибольшая модель, в которой существует определимое полное упорядочение универсума).

Генерические модели дают различные примеры определимого выбора. С одной стороны, известны модели, содержащие неконструктивные множества и имеющие определимое полное упорядочение универсума. С другой стороны, есть модели, удовлетворяющие аксиоме выбора, но не имеющие определимых функций выбора для некоторых семейств множеств. Например, в модели Козна $M(G)$, упомянутой в §6, множество всех действительных чисел не имеет определимого полного упорядочения. В некоторой другой модели каждое определимое полное упорядочение множества всех действительных чисел счетно (а аксиома выбора верна).

Следующий вопрос относится скорее к дескриптивной теории множеств. Пусть A есть множество действительных чисел, а $\mathcal{F} = \{S_x: x \in A\}$ является семейством непустых множеств действительных чисел, причем каждое S_x определимо относительно x некоторым равномерным образом (например, каждое S_x есть Π_1^1 -множество с кодом x). Можно ли определить функцию выбора $\{a_x: x \in A\}$ на семействе $\mathcal{F}$?

¹³⁷ Эта проблема решена в работе: Гитик (Gitik M.) All uncountable cardinals can be singular. – Israel J. Math., 1980, 35, № 1–2, p. 61–88. *Прим. перев.*

Вопросы такого типа часто возникают в дескриптивной теории множеств (см. гл. 8). В частности, *теорема униформизации* Новикова–Кондо–Аддисона утверждает, что для каждого бинарного Π_1^1 -отношения P на множестве всех действительных чисел найдется такая Π_1^1 -функция f , которая является подмножеством множества P и имеет ту же проекцию, что и P (рис.4). Этот рисунок объясняет, как теорема униформизации связана с поставленным выше вопросом.

Никакой теоремы такого рода нельзя доказать для Π_2^1 -множеств, так как множество всех неконструктивных действительных чисел принадлежит Π_2^1 , а в упоминавшейся выше модели Коэна нет определимых неконструктивных действительных чисел. Это дает пример непустого Π_2^1 -множества действительных чисел, не содержащего определимых элементов.

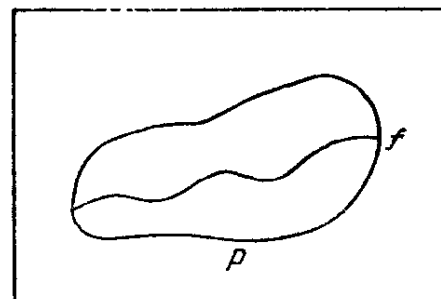


Рис.4.

§10. Аксиома детерминированности – альтернатива к аксиоме выбора

Аксиома выбора имеет ряд следствий, являющихся до определенной степени нежелательными (таких, как существование неизмеримого множества действительных чисел). В связи с этим было сделано несколько попыток формулировать аксиомы, противоречащие аксиоме выбора, из которых вытекают более привлекательные следствия. (Здесь снова проявляется аналогия с неевклидовой геометрией). Наиболее интересной известной альтернативой к аксиоме выбора является *аксиома детерминированности*.

Каждое множество A бесконечных последовательностей натуральных чисел определяет следующую бесконечную игру G_A двух игроков. Игрок I пишет натуральное число n_0 , игрок II отвечает тем, что пишет натуральное число n_1 , затем игрок I пишет n_2 , игрок II пишет n_3 и т.д. Если получающаяся в результате игры последовательность $n_0, n_1, n_2, \dots$ принадлежит множеству A , то выигравшим считается игрок I, в противном случае выигрывает игрок II. Игра G_A называется *детерминированной*, если либо игрок I имеет выигрывающую стратегию, либо игрок II имеет выигрывающую стратегию. *Аксиома детерминированности* утверждает, что для каждого такого множества последовательностей A игра G_A является детерминированной.

Используя полное упорядочение множества всех последовательностей натуральных чисел, можно построить игру, которая не будет детерминированной. Следовательно, аксиома детерминированности противоречит аксиоме выбора.

Специалисты в области дескриптивной теории множеств особенно оценили аксиому детерминированности. Эта аксиома влечет счетную аксиому выбора, и вследствие этого основные теоремы теории действительных чисел не страдают от отсутствия аксиомы выбора. Из этой аксиомы также следует, что каждое множество действительных чисел измеримо по Лебегу, имеет свойство Бэра и либо счетно, либо имеет мощность континуума. Кроме того, аксиома детерминированности разрешает различные проблемы дескриптивной теории множеств вроде теорем униформизации и редукции, см. гл. 8.

Помимо тех желательных следствий, которые аксиома детерминированности имеет в дескриптивной теории множеств, мало что можно было бы сказать в пользу этой аксиомы как альтернативы к аксиоме выбора. Можно отметить, например, что из нее вытекает, что кардиналы $\aleph_1$ и $\aleph_2$ измеримы, кардиналы $\aleph_3, \aleph_4, \aleph_5, \dots$ сингулярны, а кардиналы $\aleph_{\omega+1}$ и $\aleph_{\omega+2}$ опять измеримы.¹³⁸ Всё же эта аксиома чрезвычайно интересна. Поскольку она влечет выполнение различных свойств типа больших кардиналов, то нужно отправляться от больших кардиналов, если мы хотим доказать непротиворечивость аксиомы детерминированности. Это выглядит очень трудной проблемой, так как мы до сих пор не знаем даже, являются ли непротиворечивыми некоторые следствия детерминированности. Одним из следствий этой аксиомы является, к примеру, такое утверждение:

(*) Каждое подмножество кардинала $\aleph_1$ либо содержит некоторое замкнутое неограниченное в $\aleph_1$ множество, либо не пересекается с некоторым таким множеством.¹³⁹

¹³⁸ См. книгу Клейнберга, добавленную к библиографии гл. 3 при переводе. – *Прим. перев.*

¹³⁹ См. Bull E.L., Kleinberg E.M. *A consistent consequence of AD*. – Trans. Amer. Math. Soc., 1979, 247, p. 211–216, где доказана непротиворечивость аналогичного утверждения для χ_2 . – *Прим. перев.*

Это утверждение влечет измеримость кардинала $\aleph_1$. Но даже если считать установленной непротиворечивость предложения об измеримости $\aleph_1$, утверждение (*) выглядит значительно более сильным. Недавно Мартин и Митчелл¹⁴⁰ подтвердили это, построив модель теории множеств, в которой есть много измеримых кардиналов, отправляясь от утверждения (*).

Мы считаем, что доказательство непротиворечивости (*) или других утверждений такого же рода должно быть первым шагом на пути решения проблемы непротиворечивости аксиомы детерминированности, которая определенно является наиболее интересной проблемой, относящейся к аксиоме выбора.

Литература

Йех (Jech T.)

1. The Axiom of Choice. – Amsterdam: North-Holland, 1973.

Френкель, Бар-Хиллел, Леви (Fraenkel A., Bar-Hillel Y., Levy A.)

1. Foundations of Set Theory. – Amsterdam: North-Holland, 1973.

Если читатель хотел бы получить ссылки на оригинальные работы, в которых доказаны обсуждавшиеся в этой статье результаты, то он может найти исчерпывающую библиографию в книгах Френкеля, Бар-Хиллела и Леви [1] и Йеха [1].

¹⁴⁰ Martin D.A., Mitchell W. *On the ultrafilter of closed unbounded sets.* – J. Symbolic Logic, 1979, 44, № 4, p. 503–506. – *Прим. перев.*

Виктор Викторович Сухоруков. Анти-Дворкин

Какой маразм! И эти люди писали и пишут учебники для наших университетов... Они выплеснули только ребёнка, а грязной водой продолжают промывать мозги студентам.

Сергей Кара-Мурза, «Потерянный разум»

Необходимое пояснение¹⁴¹

После отказа от здравомыслящего государственного атеизма в обществе обострилась потребность в религии. Она удовлетворялась как уже давно существовавшими религиозными организациями,¹⁴² так и возникающими. И вполне естественно, что уже признанные игроки религиозного рынка стремятся ограничить доступ новых игроков.¹⁴³ Поскольку существуют небольшое число крупных конфессий (православие, ислам, буддизм, иудаизм), то этот рынок имеет смысл характеризовать как олигополистический. И олигополисты стремятся не допустить превращения этого рынка в рынок монополистической конкуренции (т.е. появления большого количества религиозных организаций с минимальными барьерами входа и выхода с рынка), поскольку в этом случае они потеряют свои прибыли. Однако для потребителя лучше второй вариант, поскольку в этом случае монополистические конкуренты зависят от потребителя в области цен (люди могут «голосовать ногами»), а олигополисты назначают цену сами.¹⁴⁴



В.В. Сухоруков

Но поскольку массы не примут концепцию наподобие ООО «Русская Православная Церковь», то для маскировки используются несколько механизмов: замена на ценниках надписи «цена» словом «пожертвование», деление религий на традиционные и нетрадиционные (причём не в научно-познавательных, а именно в юридически-ограничительных целях нетрадиционных религий), а в связке с этим делением – и жупел «секта» (разумеется, перечень маскировочных трюков неполный). Конечно, ситуация подаётся так, что невинные аки агнцы небесные традиционщики отчаянно борются со злыми и коварными сектантами. Разрозненные отряды борцов объединяются в армию Российской ассоциации центров изучения религий и сект (РАЦИРС), главнокомандующим которой является Александр Леонидович Дворкин.

И воевал бы с сектами себе на здоровье, но ведь одним из инструментов борьбы Дворкин представляет их научное изучение. То, что сектоведение как науки не существует,

¹⁴¹ **МОИ 2017-07-28:** Когда в конце 2015 и в начале 2016 года В.В. Сухоруков переписывался со мной (выражая намерение защищать канторовскую теорию множеств, несмотря на то, что сам он не математик) и когда он намечался мной на роль Меммия–Феофила–Сира при разборе ZFC, тогда я поискала в Интернете, какие там есть собственные сочинения моего оппонента. Нашлось одно, которое здесь и приводится.

¹⁴² На сегодняшний день существует определённая путаница с религиозными организациями и объединениями, в которую углубляться здесь не имеет смысла. [Практическое решение государственных проблем в работах студентов: Материалы Всероссийской студенческой научно-практической конференции. – Екатеринбург, УрАГС, 2008; стр.70].

¹⁴³ Имеет смысл говорить именно о рынке, поскольку между религиозными организациями идёт борьба за паству, которая приносит деньги, за государственные льготы, за возможность лоббирования своих интересов и т.п. Кстати, подход к религии как к рынку разделяется и самим Дворкиным. [Секта Дворкина // Русский Вестник. URL: <http://www.rv.ru/content.php3?id=810>].

¹⁴⁴ Макконнел К.Р., Брю С.Л. *Экономикс: принципы, проблемы и политика*: Пер. с 14-го англ. изд. – М.: ИНФРА-М, 2004. Стр. 584.

псевдопрофессора¹⁴⁵ не смущает – он выпустил огромный опус под названием «Сектоведение. Тоталитарные секты. Опыт систематического исследования»¹⁴⁶. Рассмотрение этой книги я и предлагаю вашему вниманию.

Красивая обёртка?

В данной части я рассмотрю то, что в первую очередь всего бросается в глаза при знакомстве с любой книгой: заголовок, содержание, эпиграфы, предисловия, благодарности, библиографическую справку и приложения. Но причиной такого внимания служит не только и не столько их внешняя привлекательность, сколько их определяющее влияние на всё дальнейшее.

Заголовок. Как видно, ложь начинается уже в заголовке книги: сектоведения не существует. Это важный момент, потому что Дворкин одним из главных признаков сект считает обман: когда при вступлении в секту человеку говорят одно, а в реальности имеет место совершенно другое (позднее для этого вводится даже специальный термин – «эзотерический разрыв»). В данном случае такая же ситуация с сектоведением (это какой-то «научный разрыв»), т.е. Дворкин явно использует двойную мораль.

Содержание. Что же касается структуры работы, представляемой содержанием книги, то необходимо отметить три обстоятельства. *Во-первых*, «исследование» открывается шестью страшилками о некоторых сектах, что сразу подчиняет читателя власти сектоборца, который может спасти от грозящего ужаса. Это манипулятивные технологии (запугивание, эффект ореола), в применении которой сам Дворкин обличает других. *Во-вторых*, общие понятия о сектах делятся на две части, причём параграфы разных частей сходны (например, «Обман при вербовке» и «Методы вербовки», «Что такое промывание мозгов и контролирование сознания, и как с этим бороться» и «Методы контролирования сознания»). Это даёт возможность удвоить поток негативной информации о сектах и в то же время придать большую солидность «теоретической» части работы, чтобы поддерживать имидж Дворкина как учёного. *В-третьих*, материал о сектах организован вопреки всем правилам классификации. Разделы следующие: «Секты-долгожители», «Поствоенная эклектика: сайентология и мунизм», «Псевдоиндуистские секты», «Псевдобиблейские (псевдоевангельские) секты», «Секты отечественного происхождения (постсоветская эклектика)», «Культы «Новой Эры»». Как видно, нарушены правила:

А) *деления по одному основанию* (их несколько: длительность существования, время появления, эклектичность учения, конкретные религиозные системы с приставкой «псевдо-», место происхождения, смешанное со временем и эклектичностью, да плюс еще и «Новая Эра»),

Б) *совпадения объёмов родового и видовых понятий* (некоторые секты – при всей неопределённости этого понятия, уже дающего повод задуматься о принципиальной возможности определить его объём, – не включены в книгу, значит, сумма видовых понятий меньше родового),

В) *отсутствия скачка в делении* (это требование в принципе невозможно выполнить пока различны критерии классификации, поскольку скачок предполагает указание вместо видового понятия подвида, а у Дворкина даже виды определены неправильно),

Г) *непересечения видовых понятий* (тоже невыполнимо вследствие различности критериев; конкретный пример – включение «Псевдохристианства – Евангелия Эры Водолея» в раздел «Культы «Новой Эры»», хотя существует специальный раздел псевдоевангельских сект).

Итак, структура работы противоречит принципам научности, это даёт дополнительный аргумент в пользу того, что обман начинается уже со слова «Сектоведение» в заголовке книги. Кроме того, систематичность невозможна без соблюдения правил логики (а они, как видно, грубо нарушены), следовательно, декларирование систематичности опыта исследования – также обман.

Эпиграфы. Дворкин использует целых 5 эпиграфов! Причём в трёх из них допущена одинаковая логическая ошибка: использование второй фигуры простого категорического силлогизма при отсутствии отрицательной посылки. Например, цитата из Библии: «Дети! последнее время. И как вы слышали, что придёт антихрист, и теперь появилось много антихристов, то мы и познаем из того, что последнее время» (1 Ин. 2, 18). Силлогизм получается следующий (субъект

¹⁴⁵ Документ. Справка Федеральной службы по надзору в сфере образования и науки по поводу отсутствия учёных степеней и званий у А.Л. Дворкина // Славянский правовой центр. URL: http://www.sclj.ru/news/detail.php?SECTION_ID=&ELEMENT_ID=1241&sphrase_id=50655.

¹⁴⁶ Сектоведение. Тоталитарные секты // URL: <http://lib.eparhia-saratov.ru/books/05d/dvorkin/sects/contents.html>.

написан курсивом, предикат – жирным шрифтом, средний термин – обычным шрифтом; буква А – это обозначение общеутвердительного суждения):

Последнее время есть время прихода антихриста А

Теперешнее время есть время прихода антихриста А

Теперешнее время есть **последнее время** А

С двумя другими эпиграфами ситуация аналогичная с той лишь разницей, что меньшие посылки (характеризующие теперешнее время) в тексте Библии отсутствуют, однако, они с лихвой восполняются дворкинским опусом и на их доказательство направлен весь текст книги (конкретно – что отвращён слух от истины и что будут внимать учениям бесовским).

Предисловия. Напечатано три предисловия: к третьему изданию (авторы: архиепископ Викентий и протоиерей Димитрий Смирнов) и два авторских предисловия (к третьему и второму изданиям). Рассмотрим их по порядку.

Викентий:

«Для любого православного христианина «методологический агностицизм» и «бесценностный» подход просто невозможны, так как все мы имеем высшей ценностью опыт жизни в Духе Святом, дарованный нам Спасителем и Господом нашим Иисусом Христом».

Методология – это учение о научных методах познания или их совокупность. Агностицизм же – это позиция, отрицающая знание. Так что методологический агностицизм невозможен в принципе, так же как Колобку невозможно повеситься, разумеется, если мы желаем оставаться в рамках научности (впрочем, Дворкин за них уже вышел, так что удивляться упоминанию «методологического агностицизма» – пусть даже в негативном плане – не приходится). Что же касается высшей ценности, то для науки это истина (а вовсе не опыт жизни в святом духе), и это также доказывает антинаучность работы Дворкина.

Смирнов:

«Пожелаем же книге, увеличившейся от первого к третьему изданию более чем в два с половиной раза, возражать и в дальнейшем».

Ведь если книга будет возражать, то это означает *рост сект*: либо количественный, либо качественный, либо и тот, и другой. Можно возразить: как же так, с одной стороны, я утверждаю, что секты отнимают доходы у традиционных религиозных организаций (и, следовательно, они обязаны с ними бороться и сокращать их численность), а сейчас утверждаю, что они хотят роста сект? Никакого противоречия здесь нет, поскольку рассматриваемые утверждения находятся на разных уровнях (можно сказать, что в различные моменты времени): тактическом (о росте сект) и стратегическом (о сокращении их числа). В тактическом плане духовным олигополистам выгодно увеличение сект, т.к. это: 1) позволит в процессе борьбы с ними выгодно распылить себя; 2) даст возможность давить на государство вплоть до введения элементов теократии; 3) подготовит почву для обращения бывших сектантов в православные (ибо секта уже проделала над человеком всю черновую работу – отключила рациональное мышление, а православные заберут «готовенькое»). В стратегическом же плане, несомненно, традиционным религиозным организациям выгодно доминировать в религиозной жизни страны, а для этого (после получения тактических выгод) секты надо сократить.

Дворкин:

«Объект сектоведения изменяется столь стремительно, что каждое новое издание должно подвергаться значительной переработке».

Но если бы эта книга имела хоть какой-то оттенок научности, то тогда, во-первых, объект был бы чётко определён (пусть даже меняющийся, в определение объекта можно заложить качество быстроты трансформации), во-вторых, был бы определён не только объект, но и предмет (это делается даже студентами в курсовых работах, не говоря уже о титулованных учёных и диссертациях с монографиями). Ни того, ни другого мы не наблюдаем. Следовательно, и научной дворкинскую работу считать никак нельзя.

Благодарности. Из 16 упоминаемых персон 9 являются священно- и церковнослужителями РПЦ МП, 1 – работница дворкинского Центра им. священномученика Ирины, 2 –

западные сектоведы, 1 – жена, характеристики 4 оставшихся не могут быть установлены с достаточной степенью достоверности. Разумеется, в данном случае говорить о соблюдении правил классификации не приходится, но я вынужден использовать тот материал, который предоставляет в моё распоряжение Дворкин. Если же соблюсти правила, то можно сказать, что 11 из 16 человек точно являются православными (т.е. почти 70%). Это дополнительно подтверждает, что научным «исследование» Дворкина не является.

Библиографическая справка. Целесообразно рассмотреть распределение источников в агрегированном виде по разделам (поскольку сам Дворкин перечисляет источники по главам, но вторая и третья даны совместно). Однако по утверждению автора (которому нет оснований не доверять, оно подтверждается текстом книги), этот перечень неполный, в справке даны только основные (композиционные для глав) источники. Соответственно, список является неполным. Но даже такие скудные данные позволяют сделать определённые выводы о работе (как минимум, о её фундаментальных качествах, коль скоро источники основные).

Таблица 1. Краткая количественная характеристика источниковедческой базы

Структурная единица	Всего источников	На русском языке	На иностранном языке	Доля иностранных
Раздел первый. Введение в сектоведение	28	9	19	68%
Раздел второй. Секты-долгожители	17	8	9	53%
Раздел третий. Поствоенная эклектика: сайентология и мунизм	28	10	18	64%
Раздел четвёртый. Псевдоиндуистские секты	33	18	15	45%
Раздел пятый. Псевдобиблейские (псевдоевангельские) секты	26	14	12	46%
Раздел шестой. Секты отечественного происхождения (постсоветская эклектика)	16	15	1	6%
Раздел седьмой. Культи «Новой Эры»	21	15	6	29%

Данные таблицы свидетельствуют, что наиболее научно-теоретический раздел (первый) в большей степени заимствован у западных авторов. Такая же ситуация с сайентологами, мунитами, иеговистами и мормонами. И это вполне естественно, потому что, во-первых, секты появились сначала на Западе, а затем уже в России, во-вторых, Дворкин провёл много времени, сотрудничая с западными спецслужбами¹⁴⁷ и ведя там якобы научную деятельность (поскольку степень Дворкина, напомним, не признана в России).

Дать общую характеристику структуры источниковой базы по всей книге, к сожалению, невозможно, поскольку в разных разделах нередко используются одни и те же источники (поэтому суммирование данных по русским и по иностранным источникам приведёт к двойному учёту). Наконец, следует отметить то, что в список источников включены такие труднопроверяемые, как «Записи публичных выступлений проф. Йоханнеса Огорда», «Диссертация на соискание учёной степени кандидата богословия» и материалы различных антисектантских центров.

Приложения. В отличие от предыдущих элементов книги, приложения находятся не в начале, а в конце, но, не входя в текст непосредственно (также, как и заголовок, предисловия и т.д.), привлекают к себе внимание, создают определённый настрой восприятия (скорее даже, последующей оценки) текста, поэтому вполне естественно рассмотреть приложения именно сейчас.

В 4-х приложениях приведены 2 определения архиерейского собора РПЦ МП и 2 итоговых документа международных научно-практических конференций (одна из которых характеризуется

¹⁴⁷ Портрет. А. Дворкин. // URL: <http://portal-credo.ru/site/?act=rating&id=29>.

как «православная»). Что же касается содержания приложений, то определения соборов дышат нетерпимостью, пренебрежительным отношением к духовным конкурентам (конечно, это ожидаемо, если знать, что религия – рынок, но неожиданно, если придавать главное значение принципу толерантности). Кстати, неадекватной реакцией на критику грешит и одно из определений (отметьте такой же характер итогового «научного» документа, как и у церковного) второй конференции:

«Эта безграмотная рецензия написана для подрыва значимости и необходимости книги Дворкина, несмотря на то, что книга имеет официальное благословение и является плановой в учебно-просветительской работе Свято-Тихоновского Богословского института».

Оказывается, для участников «научной» конференции главными критериями ценности исследования являются не истинность, а официальное благословение и использование в православном учебном заведении!¹⁴⁸

Какие выводы можно сделать из этих фактов? Во-первых, РПЦ МП хочет приобрести статус главного борца с сектами. Во-вторых, наука является лишь прикрытием для её сектоборческих устремлений (как по сходству содержания, так и по составу участников этих конференций). В-третьих, РПЦ МП стремится использовать государство в своих целях (воздействуя как изнутри, ведь в конференциях принимали участие представители власти, так и извне – придавая конференциям международный характер).

А что внутри?

Прежде, чем перейти непосредственно к основному тексту работы, хотелось бы отметить два обстоятельства. *Во-первых*, в разных местах встречается дословно одни и те же даже не предложения – целые абзацы! Как это толковать: недостаток творческого таланта автора или манипулятивный приём повторения одного и того же, чтобы вдолбить в сознание нужную информацию? *Во-вторых*, довольно часто встречаются серьёзные обвинения, не подкреплённые ссылками на источники, например: «Воспользовавшись своими связями с российскими высшими политическими кругами, Асахара, уже готовивший в то время своих боевиков на базе российского спецназа, нашёл способ приобрести рецепт изготовления зарина и боевой вертолёт, предназначенный для распыления газа над Токио», или другой пример: «...речь идёт о массовом уничтожении церковью, убийствах миссионеров и священников, в том числе сожжённых заживо, об изнасилованиях католических монахинь и даже о нападении на миссию почитаемой в Индии матери Терезы Калькуттской».

Целесообразно будет построить исследование не по каждому разделу, а разделить на теоретическую (представленную первым разделом) и практическую части (остальные), поскольку последняя представляет из себя, в основном, просто изложение (причём неизвестно, насколько достоверное) учения и практики сект, обильно приправленное продуктами очернительных технологий.

Раздел первый. Введение в сектоведение.

«...Мир воочию увидел, что секты убивают. Кадры жертв Джонстауна стоят в одном ряду с фотографиями из ГУЛАГа или Освенцима и со снимками «полей смерти» камбоджийского диктатора-убийцы Пол Пота».

Эта аналогия призвана демонизировать религиозное объединение «Народный храм». Она, безусловно, является манипуляцией, поскольку не выполняются фундаментальные критерии подобия (о чём автор аналогии не мог не знать), что отражено в таблице ниже. Общим является только один параметр (да и то чисто внешний) – массовость гибели людей.

Таблица 2. Анализ визуальной аналогии между «Народным храмом» и ГУЛАГом и др.

Объект / Критерий	«Народный храм»	ГУЛАГ, Освенцим, «поля смерти» Пол Пота
Уход из жизни	добровольный	насильственный
Характер смерти	религиозный	уголовный, политический,

¹⁴⁸ Наверняка, если кто-нибудь из этих участников конференции прочтёт мою статью, то тоже назовет её безграмотной, подрывающей значимость и необходимость и т.д. ... Пусть!

		расовый...
Легитимность системы для умерших	да	нет

«...О религиозно-сектантском характере марксизма-ленинизма писалось уже достаточно много».

Солидаризируясь с этими писаниями, Дворкин забывает, что марксизм-ленинизм не соответствует его определению секты («это закрытая религиозная группа, *противопоставляющая* себя основной культуuroобразующей религиозной общине (или основным общинам) страны или региона») вообще ни в одном пункте! Он не закрыт, не религиозен, не противопоставляет себя основной культуuroобразующей общине страны (ибо сам был этой общиной).

«Собственно, и Джим Джонс, использовавший в построении своей «истинно христианской» религиозной системы многие элементы марксизма вкупе с оккультными практиками и обрывками восточных религий и обещавший боготворившим его последователям своей секты рай на земле и вечное блаженство на небесах, не смог придумать ничего лучшего, чем тот же самый ГУЛАГ с хорошо знакомыми нам приметами».

Опять неправомерная демонизационная аналогия и опять полное противоречие фактам в каждом пункте аналогии. Ведь в ГУЛАГе не было ни оккультных практик, ни обрывков восточных религий (да и сам ГУЛАГ не строился как «истинно христианская система»). Заключённые не боготворили начальников ГУЛАГа. Эта система не обещала людям ни рая на земле, ни блаженства на небесах.

«...Сотрудничество с инославными деноминациями бывает очень полезным, как и для разговора с журналистами или с представителями власти. Они часто прибегают к доводу: вы, православные, боретесь против иеговистов (к примеру), потому что они – ваши конкуренты, они отбивают у вас паству. И тут очень важно показать, что не только православные, но и представители других традиционных (если хотите, культуuroобразующих) конфессий также выступают против деструктивных сект».

Но ведь секты являются конкурентами и традиционных религий тоже – вот они и борются. Можно возразить: православные и другие традиционные конфессии – тоже конкуренты, но между ними яркого конфликта нет. Во-первых, всё-таки борются (вспомним хотя бы инициативы по основам православной культуры и появлению военных священников), во-вторых, естественно, что традиционным религиям выгоднее сначала объединиться и уничтожить мелких конкурентов (их проще задавить), а потом уже или начать войну друг с другом на истребление, или установить духовную олигополию. В противном случае (если традиционные религии будут сначала бороться друг с другом, а потом с сектами), то ослабят себя, а секты не дремлют, и ситуация будет уже – монополистическая конкуренция, а это означает, что потребитель духовной продукции будет диктовать условия, а не РПЦ или другие традиционные религии.

«Если раскрыть человеку содержание строго секретных сайентологических курсов для посвящённых высших уровней, он просто придёт в ужас и не захочет иметь с сайентологами ничего общего. В Православной Церкви всё обстоит ровно наоборот: прежде человек исповедует, во что и как верует, и только потом делается членом Церкви».

Это наглая ложь! Ведь в православие попадают и младенцы через крещение – тем самым человек входит в церковь, но вряд ли младенец исповедует православие. Кроме того, чуть ранее Дворкин пишет о человеке, желающем стать православным: «Его просто не окрестят до тех пор, покуда он сознательно и свободно не примет догматы православной веры». Но с младенцами это правило как-то забывается. Ведь есть крёстные, которые отвечают за то, что РПЦ получит нового адепта, так что ни о какой сознательности и свободе в принятии догматов православия речи не идёт. Крёстные ему просто вдолбят то, что нужно.

«В 1996 г. в популярном журнале приводились такие цифры: в России от 400 до 500 тысяч всяческих магов, целителей и экстрасенсов, 100 тысяч из них – в Москве. Думаю, что число это сильно завышено, но зато в него не входят руководители и управляющее звено сект – с ними число,

возможно, было бы ближе к достоверности. Представьте себе, какой силе приходится противостоять нашей Церкви».

Этот абзац – прекрасный образчик манипуляции сознанием при помощи чисел.

Во-первых, не указан источник – что это за популярный журнал? Число невозможно проверить. И это не говоря уж о том, что достоверность количественных сведений популярного журнала может вызвать определённые сомнения. *Во-вторых*, оценка масштаба противоречит известным числам. Даже если взять наиболее благоприятный для адекватности оценки Дворкина вариант (т.е. сектантов побольше, православных поменьше), то 500 тысяч составляют примерно 0,3% от численности населения всей страны в 1996 году (148,3 млн. чел. по данным Госкомстата¹⁴⁹). В то же время православных 70 млн. чел.¹⁵⁰, или примерно 47% населения России (в том же 1996 году. В источнике приводится вилка – от 70 до 80 млн. чел., но мы уже договорились, что православных берём по минимуму). Получается, что православных примерно в 140 раз (!) больше, чем сектантов. Возникает вопрос: ну и кому же приходится противостоять превосходящей силе? *В-третьих*, если приведённое число в полмиллиона сектантов сильно завышено (а потому недостоверно), то при включении в него руководства и управляющего звена сект оно может только возрасти, т.е. стать ещё более завышенным, ещё более недостоверным, чего, собственно, Дворкин и желает.

«...Секты, возникающие на основании видений и откровений того или другого человека, стали восприниматься как нормальное, закономерное, терпимое, а то и положительное явление».

Но ведь именно так – из откровений одного человека (разумеется, при уже существующей культурной почве, но она есть и у современных сект) – и возникли христианство, ислам и буддизм (кстати, именно они и привили приемлемость возникновения религии из откровения одного человека). Так что метод формирования ещё не является поводом для негативной оценки того или иного религиозного объединения. Иначе под удар попадает защищаемое Дворкиным православие.

«...Есть секты, в которых нет собственно религиозного учения, учения о Боге. Даже пользуясь понятием религии в самом широком смысле, в новом определении, сформулированном диаконом Андреем Кураевым, определившим религию как попытку преодоления смерти и установления связи с духовным миром, – даже в этом смысле ряд сект мы не сможем назвать религией. В них есть лишь культ благополучия и богатства и громкие, навязчивые обещания успеха, которые принесёт вступление в организацию, компанию, клуб. Такие секты религиоведы называют коммерческими (или индустриальными) культами. Типичные примеры подобных сект – «Гербалайф», «Эм-Уэй» («Am-way»), «Ипсум» («Ipsum») Фабриса Керерве и другие подобные им организации, функционирующие по принципу пирамиды, или, как они сами это называют, «многоуровневого маркетинга».

Но ведь ранее Дворкиным было дано совершенно чёткое определение секты – «это закрытая религиозная группа, *противопоставляющая* себя основной культуuroобразующей религиозной общине (или основным общинам) страны или региона». А «Гербалайф» и т.п., как признает сам Дворкин, общего с религией ничего не имеет. Следовательно, включение его в число сект является грубейшей ошибкой, подтверждающей, что научностью в работе Дворкина и не пахнет.

«Французская телевизионная группа, посетившая одну из московских школ, сняла репортаж о мунитской учительнице, с наивной гордостью сообщившей, что из 60 учеников после года работы с ними 20 стали регулярно ходить на молитвенные собрания «Церкви объединения».

Интересно, а сколько школьников стали членами РПЦ после уроков «Основ православной культуры»? Это была бы очень отрезвляющая статистика. Тем более, что потом Дворкин объясняет: главные вербовочные усилия мунитов направлены на молодёжь, поэтому они интересуются образованием. В таком случае, и РПЦ пытается вербовать новых адептов именно в образовательной системе при помощи ОПК.

¹⁴⁹ Численность населения // Государственный комитет статистики РФ. URL: http://www.gks.ru/bgd/regl/b08_11/IssWWW.exe/Stg/d01/05-01.htm.

¹⁵⁰ Рецензии // URL: http://www.rubricon.com/about_nir_6.asp.

Кратко об остальных разделах.

«В этой главе речь пойдёт о мормонах – самой «старой» из новых сект. С богословской точки зрения, её можно охарактеризовать как синкретическую неоязыческую оккультную секту с милленистским (хилиастическим) уклоном, активно занимающуюся политической деятельностью».

Но ведь политическая деятельность не является предметом богословского взгляда на вещи, следовательно, Дворкин вводит читателя в заблуждение, обещая богословскую характеристику секты, а на деле занимаясь политической.

«Мормоны занимаются прозелитизмом среди христианских (зачастую православных), часто гонимых и преследуемых меньшинств в исламских странах, стремясь отнять у них последнее и самое драгоценное сокровище, которое у них осталось, – веру их отцов! Любые комментарии о нравственной оценке такой деятельности излишни».

Но ведь и православная церковь должна заниматься прозелитизмом, потому что Христос заповедовал научить этой вере все народы. Получается, что её деятельность по смене «веры отцов» у неправославного населения в любой стране тоже безнравственна.

«По статистике самих иеговистов (кстати сказать, они боготворят статистику), ещё в 1994 г. только в странах СНГ по иеговистским методикам изучали Библию 72 492 человека. На это изучение потрачено 12 млн. 495 тыс. часов. Было крещено 16 686 человек. На территории этих стран в том же году состоялось 521 собрание верующих. На декабрь 1999 г. в России было 107111 «возвещателей царства» (то есть активных членов, серьёзно занимающихся вербовкой), а к декабрю 2000 г. это число составило 114 284 человека. На Украине число возвещателей также перевалило за 110 тысяч, а по всем странам бывшего СССР превысило 300 тысяч человек. В 1997 г. во всех странах СНГ всего на Вечере Воспоминания (это их единственный праздник – день распятия Иисуса Христа) присутствовало более 600 тысяч человек, а в конце 2000 г. это число уже составило 665 тысяч человек. На московском судебном процессе в феврале 1999 г. сами «Свидетели» распространяли сведения, что их московская община состоит из 10 тыс. человек, а всего по стране их более 250 тысяч, что, как заявляли они, делает их 5-й по численности «христианской» организацией России».

В отличие от других приводимых чисел, на эти у Дворкина сноски есть, причём на иеговистскую литературу. Однако необходимо отметить, что системы в этих числах нет (ни во временных интервалах, ни в географических границах – невозможно провести сравнение), это бессвязный набор значений, имеющий собой только одну цель – поразить воображение читателя якобы существующей мощью секты. Особенно потрясает количество часов, потраченных на изучение библии (12495000). Но на самом деле это не часы, а человеко-часы (поскольку если бы это время было потрачено одним человеком, то он изучал бы библию более 1400 лет – не учитывая, что часть годов високосные). Если же затраченные на изучение 520625 человеко-суток разделить на количество изучавших, то выйдет всего неделя! Всего неделю иеговисты работали с каждым человеком. Разве это навязчивость, которую Дворкин им приписывает: «Они чаще, чем члены многих других сект, ходят по домам, пристают к людям на улицах, раздают свои листовки и журналы, навязчиво предлагают изучать вместе Библию и приглашают на свои собрания»? Конечно, нет, навязчивостью тут и не пахнет (по крайней мере, если сравнивать с описываемой им вербовкой у мунитов – несколько семинаров с возрастающей длительностью, например, двухнедельной).

«Сайентологию практически невозможно – даже условно – классифицировать».

Разумеется, ведь Дворкин так и не придумал никакой толковой классификации. Да она и вряд ли возможна в его псевдоисследовании по квазинауке.

«Путешествовал мальчик в Китай лишь один раз со своей матерью, чтобы посетить отца, который находился по делам службы на острове Гуам. Рон всё время поездки находился при маме и с китайцами никаких контактов не имел. Существуют дневники Хаббарда, в которых говорится об этом путешествии. Там имеются такие «глубокомысленные» высказывания автора: «Главная проблема с Китаем в том, что в нём слишком много косоглазых».

Не соглашаясь с действительно оскорбительной для китайцев формулировкой «косоглазые», следует, тем не менее, заметить, что по содержанию Хаббард прав. Ведь большая численность населения Китая – это и есть главная проблема. Причём не только самого Китая (трудности с обеспечением работой, жильём, пенсиями и проч.), но и других государств (чайна тауны), особенно России (китайская колонизация Дальнего Востока).

«...Негативными для человека считаются те переживания, которые он испытал от общения с другими людьми или же от жизненных неприятностей, но не те события, в которых сам этот человек стал виновником переживаний и несчастий других людей».

Но ведь это логично, ибо события рассматриваются именно в отношении человека, занимающегося аудитингом, а не в отношении тех, кто от этого человека пострадал. Дворкин же пытается поставить всё с ног на голову.

«Происхождение этого термина сам Хаббард объясняет так: слово происходит от латинского scio («знаю») и греческого λόγος («слово») – слово о знании. Возникает вопрос: зачем было создавать такого уродца, если существует слово гносеология, которое означает то же самое? Известный сектовед Джон Атак высказал предположение: есть греческое слово οκία – «тень, призрак», так что, возможно, слово сайентология означает «слово о призраках».

Но ведь гносеология – это философская наука! А новое учение является религиозным. Разумеется, что для него необходим новый термин. Тут даже умножения сущностей нет.

«На улицах можно увидеть юношей и девушек, собирающих пожертвования «на бедных студентов» или торгующих мелочёвкой. Если вы спросите у них, что за организацию они представляют, они назовут её вам: «Вузовская ассоциация по изучению Принципа» (или CARP – английская аббревиатура). Но на самом деле муниты придают этому слову второе, внутреннее значение: КАРП – это крупная, жирная рыба, а наша организация – это сети, через которые мелкая рыбёшка уплывает, а большие карпы остаются у нас».

Такой же домysel, как и происхождение слова «саентология». Разумеется, это очень эффективный манипулятивный приём – уничтожить главное, системообразующее понятие религиозного объединения, без которого остальные идеи (да и реальные оргструктуры) рассыплются и тогда их будет значительно легче уничтожить.

«Это и есть тайное ядро хатхайоги; магические отношения с богами, которые суть бесы и мистический тлетворный блуд».

Вновь мы встречаем такой приём, как создание негативного ореола для представителей иного религиозного объединения, в данном случае это достигается при помощи искажённой аналогии между центральными понятиями одной религии и негативными понятиями другой.

«...Вся жизнь основателя секты, приобретшей за 35 лет своего существования одну из самых криминальных репутаций, является иллюстрацией одной всеобъемлющей, поглощающей его страсти – неуёмного честолюбия, вытекающего из необузданной, воистину дьявольской гордыни. Достаточно взглянуть на его фотографию (её можно найти в любом кришнаитском издании), чтобы это стало очевидным».

Здесь виден дичайший для православного (как себя позиционирует Дворкин) человека предрассудок физиогномики. Кстати, а если посмотреть на фотографию самого автора «Сектоведения»? Он похож на Ивана Грозного, по которому писал свою научную работу.

«Воцарившись в своих удельных княжествах, гуру стали воевать между собой: они выгоняли агентов друг друга из своих пределов и без конца выясняли отношения на тему, кто у кого украл «преданных» и кто заехал со своей санкиртановой командой на чужую территорию».

А как же конфликты между РПЦ МП и Вселенским Константинопольским патриархатом по поводу Украины¹⁵¹ и Эстонии¹⁵²? А скандал с переходом епископа Василия (Осборна) из московского в константинопольский патриархат?¹⁵³ Ведь по сути то же самое!

«Когда кришнаиты раздают свой прасад на улицах, то нужно помнить, что, съедая его, мы таким образом причащаемся Кришне...»

Это означает, что Кришна, как минимум, существует (иначе нечему было бы причащаться). Но из этого факта следует, что православие не является адекватным описанием мира, что оно не является «единственно верной» религией, что существует хотя бы один другой бог, кроме православного. И это усиливает сомнения в реальной религиозной принадлежности самого Дворкина к православию, хотя сам он её декларирует.

«То, что движение Махариши делает в России, – это самый настоящий геноцид».

Это ложь, т.к. геноцид – это «истребление отдельных групп населения, целых народов в мирное или военное время по расовым, национальным или религиозным мотивам»¹⁵⁴. Деятельность «Трансцендентальной медитации» не соответствует этому определению. Примечательно, что вывод о ТМ как геноциде Дворкин сделал на основании письма женщины с диагнозом «шизофрения».

«...Кульг Раджниша трудно отнести даже к псевдоиндуистским новообразованиям – это абсолютно «авторское произведение», действующее в ареале движения «Ньюэйдж».

Но ведь рассказывает об этом Дворкин именно в разделе псевдоиндуистских сект, а не в специально посвящённом «Нью эйдж»! Отсюда вывод, что он сам не знает, о чем пишет.

«Занимался Кривоногов методами воздействия на человеческую личность, и, судя по целому ряду газетных публикаций, у него была секретная связь с определённым отделом КГБ, который занимался тем же. Кривоногов исполнял какие-то заказы этой организации».

Но ведь точно так же можно сказать и об Алексие II: то, что он сотрудничал с КГБ под именем «Дроздова» – факт общеизвестный.¹⁵⁵ Так что сотрудничество со спецслужбами главы религиозного объединения ещё не повод демонизировать само религиозное объединение, если, конечно же, Дворкин не желает подставить под удар свою церковь.

В итоге

Итак, что можно сказать в заключение нашего исследования? *Первое* – Дворкин не является учёным ни по форме (его степень не признана в России, а звание профессора присуждено церковным учреждением), ни по содержанию (грубейшие логические ошибки, непорядок с источниковой базой не оставляют в этом никаких сомнений). Сектоведение не является ни самостоятельной наукой, ни даже областью знаний в составе какой-либо науки. И, естественно, егоopus не является научным трудом. *Второе* – наука (в особенности, религиоведение) находится в большой опасности, поскольку выступает как объектом устремлений православных, так и их оружием в общественно-политической борьбе. Эта опасность должна быть устранена. *Третье* – всем здоровым силам общества (в том числе и в особенности научному сообществу) необходимо выступить единым фронтом против таких «учёных» и их организаций (типа РАЦИРС), а также против введения сектоведения даже в религиозное образование, не говоря уж

¹⁵¹ Москва и Константинополь не могут поделить Украину. Эксперты говорят о церковной революции // Мир религий. URL: <http://www.religio.ru/arch/28Jul2008/news/17009.html>.

¹⁵² Мониторинг СМИ: Патриархальный спор. «Эстонский вопрос» едва не омрачил встречу глав Православных Церквей в Стамбуле // URL: <http://www.portal-credo.ru:8000/site/?act=news&id=65910>.

¹⁵³ Комментарий дня: Глобальное Противостояние. Епископ Василий (Осборн) в Константинопольском патриархате и Константинопольский патриархат в Украине. Часть первая // URL: <http://www.portal-credo.ru/site/?act=comment&id=1000>.

¹⁵⁴ Ожегов С.И., Шведова Н.Ю. *Толковый словарь русского языка*. – М.: Азбуковник, 1998. Стр. 128.

¹⁵⁵ Лебедев В. *Патриарх Алексей* // URL: <http://www.chayka.org/article.php?id=548>.

о светском. *Четвертое* – весьма продуктивной оказывается применение многих методов Дворкина к самой же РПЦ МП. Результат отрезвляет.

Акимов И.Ю.

Счётно ли бесконечное множество вещественных чисел?

Можно ли объединить в пары бесконечное множество вещественных чисел и бесконечное множество натуральных чисел? Считается, что это невозможно. Даже в промежутке между 0 и 1 вещественных чисел больше, чем натуральных чисел в бесконечном множестве натуральных чисел. Так как невозможно составить взаимно однозначное соответствие между вещественными числами этого промежутка и натуральными числами. Чтобы каждому вещественному числу сопоставлялось одно и только одно число натуральное. Попробуем осуществить такое сопоставление.

Натуральные числа можно располагать по порядку: 1, 2, 3, 4, 5 и т.д. Вещественные числа так выстроить нельзя. Во множество вещественных чисел входят как рациональные, так и иррациональные числа. Иррациональные числа имеют бесконечное количество знаков после запятой. Поэтому бесконечное множество вещественных чисел обычно объединяют в матрицу, у которой числа вниз и цифры вправо уходят в бесконечность. Каждой строке соответствует одно вещественное число. Например:

```

0,1 0 1 0 2 ...
0,4 7 7 1 2 ...
0,6 0 2 0 5 ...
0,6 9 8 9 7 ...
0,0 0 3 7 1 ...
.
.
.

```

Нам необходимо сформировать правило взаимно однозначного сопоставления вещественных чисел промежутка 0 – 1 и натуральных чисел. Таких правил сопоставления можно составить бесконечно много. Но мы возьмём одно простое правило, чтобы у нас получилась симметрия сопоставляемых множеств.

Итак, правило сопоставления вещественных чисел промежутка 0 – 1 и натуральных чисел: **В каждой паре чисел, первому знаку после запятой у вещественного числа соответствует цифра единиц числа натурального, второму – цифра десятков, третьему цифра сотен, четвёртому цифра тысяч и т.д.**

Цифры у вещественных и натуральных чисел будут соответствовать:

$1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 3, 4 \rightarrow 4, 5 \rightarrow 5, 6 \rightarrow 6, 7 \rightarrow 7, 8 \rightarrow 8, 9 \rightarrow 9, 0 \rightarrow 0.$

Согласно этому простому правилу, у нас получается зеркальное расположение цифр в паре вещественное число – число натуральное.

```

...2 0 1 0 1 ↔ 0,1 0 1 0 2 ...
...2 1 7 7 4 ↔ 0,4 7 7 1 2 ...
...5 0 2 0 6 ↔ 0,6 0 2 0 5 ...
...7 9 8 9 6 ↔ 0,6 9 8 9 7 ...
...1 7 3 0 0 ↔ 0,0 0 3 7 1 ...
.      .
.      .
.      .

```

Для полной симметрии матрицу можно представить так:

$\dots 2\ 0\ 1\ 0\ 1,0 \Leftrightarrow 0,1\ 0\ 1\ 0\ 2\ \dots$
 $\dots 2\ 1\ 7\ 7\ 4,0 \Leftrightarrow 0,4\ 7\ 7\ 1\ 2\ \dots$
 $\dots 5\ 0\ 2\ 0\ 6,0 \Leftrightarrow 0,6\ 0\ 2\ 0\ 5\ \dots$
 $\dots 7\ 9\ 8\ 9\ 6,0 \Leftrightarrow 0,6\ 9\ 8\ 9\ 7\ \dots$
 $\dots 1\ 7\ 3\ 0\ 0,0 \Leftrightarrow 0,0\ 0\ 3\ 7\ 1\ \dots$

$\begin{matrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{matrix}$

В актуальной бесконечности, каждому вещественному числу промежутка $0 - 1$ будет соответствовать одно и только одно натуральное число. Значит, мощность бесконечного множества вещественных чисел промежутка $0 - 1$ и бесконечного множества натуральных чисел одинакова.

Какие могут возникнуть возражения?

1.

А почему натуральные числа расположены не по порядку?

Обычно натуральные числа располагают в ряд 1, 2, 3, 4, 5 и т.д., потому что есть такая возможность. Но если мы поменяем порядок расположения? От этого что – изменится количество натуральных чисел? Если бы это было так, то уже давно изучали бы отличительные свойства рядов натуральных чисел, расположенных в различном порядке.

Матрица у нас симметричная, и поэтому можно задать встречный вопрос: почему во всех доказательствах превосходящей мощности вещественных чисел в матрице вещественные числа расположены не по порядку? Как только вещественные числа будут расположены по возрастанию или убыванию, не составит труда объединить их в пары с натуральными числами.

2.

Применяя диагональный процесс, методом от противного, можно доказать несчётность вещественных чисел.

$0,1\ 0\ 1\ 0\ 2\ \dots$
 $0,4\ 7\ 7\ 1\ 2\ \dots$
 $0,6\ 0\ 2\ 0\ 5\ \dots$
 $0,6\ 9\ 8\ 9\ 7\ \dots$
 $0,0\ 0\ 3\ 7\ 1\ \dots$

 $0,9\ 1\ 1\ 1\ 9$

Правило, применённое в этом диагональном процессе: если по диагонали цифра 1, то в числе, не входящем в перечень, пишем 9, во всех других случаях пишем 1.

Матрица сопоставления вещественных чисел промежутка $0 - 1$ и натуральных чисел у нас симметричная, поэтому диагональный процесс можно провести, по этому же правилу, и в части натуральных чисел. И получить натуральное число, соответствующее вещественному числу, не вошедшему в рассматриваемый фрагмент бесконечной матрицы.

$\dots 2\ 0\ 1\ 0\ 1,0 \Leftrightarrow 0,1\ 0\ 1\ 0\ 2\ \dots$
 $\dots 2\ 1\ 7\ 7\ 4,0 \Leftrightarrow 0,4\ 7\ 7\ 1\ 2\ \dots$
 $\dots 5\ 0\ 2\ 0\ 6,0 \Leftrightarrow 0,6\ 0\ 2\ 0\ 5\ \dots$
 $\dots 7\ 9\ 8\ 9\ 6,0 \Leftrightarrow 0,6\ 9\ 8\ 9\ 7\ \dots$
 $\dots 1\ 7\ 3\ 0\ 0,0 \Leftrightarrow 0,0\ 0\ 3\ 7\ 1\ \dots$

 $9\ 1\ 1\ 1\ 9,0 \Leftrightarrow 0,9\ 1\ 1\ 1\ 9$

О чём говорит нахождение числа, не входящего в рассматриваемый фрагмент матрицы? Только о том, что его нет в рассматриваемом фрагменте. Но во всей бесконечной матрице оно есть, и есть соответствующая пара вещественное число – число натуральное.

(Почему всё-таки можно найти число не входящее в рассматриваемый фрагмент бесконечной матрицы, рассмотрено в статье «Корректен ли диагональный метод?»¹⁵⁶. Ответу на этот вопрос посвящено немало мест в альманахе МОИ в материалах Валдиса Валевица Эгле и Марины Олеговны Ипатьевой).

3.

Натуральные числа всегда конечные, а в матрице это не видно. Бывают ли такие большие натуральные числа, состоящие из бесконечной последовательности цифр, уходящей влево?

Можно ответить встречным предложением – назовите самое большое натуральное число, больше которого нет натуральных чисел.

Почему для иррациональных чисел бесконечная последовательность цифр после запятой вправо считается нормальным явлением, а для натуральных чисел бесконечная последовательность цифр до запятой влево вызывает вопросы? Ведь множество натуральных чисел бесконечно.

Мы взаимно однозначно сопоставляли натуральные числа и вещественные числа промежутка $0 - 1$. При этом у нас каждому вещественному числу этого промежутка соответствовало одно и только одно натуральное число. Лишних натуральных чисел у нас не осталось. Но таких промежутков во множестве всех вещественных чисел бесконечное множество. Значит ли это – что нельзя взаимно однозначно сопоставить вещественные числа и числа натуральные? И что мощность бесконечного множества вещественных чисел больше мощности множества натуральных чисел? Больше ли количество вещественных чисел количества натуральных чисел?

Попробуем получить взаимно однозначное соответствие между вещественными числами и числами натуральными. Запятая у вещественных чисел может располагаться в любом месте. Возьмём такой пример фрагмента матрицы вещественных чисел:

```

0,1 0 1 0 2 ...
3 4 7 7 1 2 ...
8 6 0 2 0 5 ...
0,0 0 0 3 7 ...
6 9 3,7 5 1 ...
.
.
.

```

Правило для сопоставления вещественных чисел промежутка $0 - 1$ и натуральных чисел, которое мы применяли выше, не подходит. Так как запятая, отделяющая целую часть вещественного числа, может находиться где угодно. И поэтому необходимо создать новое правило (таких правил сопоставления можно создать бесконечное количество).

Правило взаимно однозначного сопоставления вещественных чисел и натуральных чисел:

В каждой паре чисел первой цифре вещественного числа соответствует цифра единиц числа натурального, второй цифре – цифра сотен, третьей – цифра десятков тысяч и т.д.

Чётные цифры (справа на лево) у натуральных чисел зарезервируем для запятой у чисел вещественных. Если есть запятая, то ставим единицу, если нет, то 0.

Цифры у вещественных и натуральных чисел будут соответствовать:

$1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 3, 4 \rightarrow 4, 5 \rightarrow 5, 6 \rightarrow 6, 7 \rightarrow 7, 8 \rightarrow 8, 9 \rightarrow 9, 0 \rightarrow 0$.

По нашему правилу, при каждом шаге рассматриваемого фрагмента матрицы – часть матрицы с натуральными числами будет расширяться влево вдвое быстрее, чем правая часть с вещественными числами. Так как на каждую цифру вещественного числа приходятся две цифры числа натурального. Правая цифра сопоставляется цифре вещественного числа, левая описывает, есть ли после этой цифры у вещественного числа запятая.

Такое сопоставление ничуть не хуже взаимно однозначного сопоставления чётных и натуральных чисел. При переходе к актуальной бесконечности матрица у нас бесконечна вправо, влево и вниз.

Пример фрагмента нашей матрицы:

¹⁵⁶ МОИ 2017-02-14: См. МОИ [№ 107](http://moivzn.blogspot.com/2016/11/107.html), стр.25, <http://moivzn.blogspot.com/2016/11/107.html>.

...0 2 0 0 0 1 0 0 0 1 1 0	↔	0,1 0 1 0 2 ...
...0 2 0 1 0 7 0 7 0 4 0 3	↔	3 4 7 7 1 2 ...
...0 5 0 0 0 2 0 0 0 6 0 8	↔	8 6 0 2 0 5 ...
...0 7 0 3 0 0 0 0 0 0 1 0	↔	0,0 0 0 3 7 ...
...0 1 0 5 0 7 1 3 0 9 0 6	↔	6 9 3,7 5 1 ...
.		.
.		.
.		.

Каждому вещественному числу соответствует одно и только одно число натуральное. В каждом вещественном числе есть только одна запятая, отделяющая целую часть числа. По нашему правилу мы зарезервировали бесконечное число цифр для отображения запятой. Бесконечное количество натуральных чисел не участвует в нашем взаимно однозначном соответствии. Однако на каждое вещественное число есть число натуральное. Значит ли это, – что мощность бесконечного множества натуральных чисел больше мощности бесконечного множества всех вещественных чисел? Составляя взаимно однозначное соответствие натуральных и вещественных чисел промежутка $0 - 1$, мы получили, что их одинаковое количество, и «лишних» натуральных чисел нет. Нет ли тут противоречия?

Противоречия нет, если мы примем, что «мощность» сравниваемых бесконечных множеств не имеет отношения к самим бесконечным множествам, а относится к правилам сопоставления. Какие мы примем правила – такой результат и получим.

И поэтому я считаю, что сравнение мощностей бесконечных множеств есть занятие пустое и бесперспективное, так как к самим бесконечным множествам это сравнение не имеет никакого отношения.¹⁵⁷

Рассмотрим совсем простой пример. Сравним мощность бесконечного множества натуральных чисел и бесконечного множества чётных чисел. Мы можем принять различные правила сопоставления наших множеств. Например, сопоставим по порядку натуральные и чётные числа:

1	↔	2
2	↔	4
3	↔	6
4	↔	8
5	↔	10
.		.
.		.
.		.

Каждому натуральному числу соответствует одно и только одно чётное число. Так как множества у нас бесконечные, то при переходе к актуальной бесконечности каждому натуральному числу соответствует чётное число. Значит мощность множеств у нас одинаковая.

Теперь изменим правила. Каждому числу бесконечного множества чётных чисел сопоставим чётные числа из множества натуральных чисел:

¹⁵⁷ **МОИ 2017-02-14:** Здесь мы можем немножко возразить автору. По сказанному им выходит, что существуют «сами множества» и существуют «правила (т.е. алгоритмы) сопоставления». «Правила» (т.е. алгоритмы), по которым эти «сами множества» появляются, автором не рассматриваются. Но лучше начинать именно с алгоритмов генерации «самих множеств», и описываемые автором алгоритмы считать именно алгоритмами генерации. А соответствие тогда «получается само собой» и не требует отдельных алгоритмов (правил). При таком подходе, разумеется, получается, что «одно и то же множество» может быть генерировано различными путями, и возникает вопрос: «А действительно ли это одно и то же множество, если оно создается различными алгоритмами?». Для ответа на этот вопрос нужно задать себе такой вопрос: «Могут ли строки, генерируемые данным алгоритмом, считаться записями соответствующего числа? (натурального, вещественного и т.д.)». Если могут, то мы отождествляем продукцию различных алгоритмов генерации таких строк, считая эти продукты одним и тем же множеством. (Такое отождествление идентичных в чём-то объектов – обычное дело для математики, и без него вообще невозможно было бы никакое математическое мышление).

1
 2 ↔ 2
 3
 4 ↔ 4
 5
 6 ↔ 6
 7
 8 ↔ 8
 . . .
 . . .
 . . .

Каждому числу бесконечного множества чётных чисел соответствует одно и только одно число из бесконечного множества чисел натуральных. А у бесконечного множества натуральных чисел половина чисел осталось без пары. Значит ли это, – что натуральных чисел вдвое больше?

Изменяя правила сопоставления,¹⁵⁸ мы можем получить какой угодно результат. Что натуральных чисел у нас втрое, в четверо и т.д. больше, чем чётных чисел. А можем получить, что чётных чисел больше, чем натуральных в любое количество раз. Всё зависит от правил взаимно однозначного сопоставления. К самим бесконечным множествам это не имеет никакого отношения.¹⁵⁹ Понятие «счётность» бесконечного множества, как и понятие «мощность» бесконечного множества к бесконечным множествам неприменимо.

14.01 – 29.01. 17 г.

Сопутствующая переписка

от: Ilia Akimov <il32.ak@yandex.ru>

Кому: Марина Олеговна Ипатьева <marina.ipatjeva@gmail.com>

дата: 12 февраля 2017 г., 18:17

тема: Счётно ли бесконечное множество вещественных чисел

отправлено через: yandex.ru

Здравствуйте Марина Олеговна.

Посылаю статью «Счётно ли бесконечное множество вещественных чисел?»

Краткая суть статьи: понятия «мощность», «счётность» к бесконечным множествам не применимы. Конечно, на страницах МОИ уже описаны Алгоритм А,¹⁶⁰ Алгоритм В¹⁶¹ и Алгоритм С.¹⁶² Я постарался более наглядно для себя показать суть дела. Хотелось бы знать Ваше мнение.

P.S. Марина Олеговна, Вы в альманахе МОИ неоднократно писали о 5-м постулате Евклида, как о классическом примере применения постулата. Принимаем 5-й постулат – получаем

¹⁵⁸ **МОИ 2017-02-14:** Или правила генерации множеств.

¹⁵⁹ **МОИ 2017-02-14:** Здесь опять видно, что в модели, принятой автором, имеются «сами множества», способ возникновения которых не рассматривается (и которые этим подобны аналогичным множествам кантористов). В Веданской теории мы не рассуждаем о множествах, появляющихся неизвестно откуда. Если описанные автором «правила сопоставления» считать алгоритмами генерации соответствующих множеств, то вывод автора получает следующую формулировку: «Всё зависит от алгоритмов генерации. Манипулируя алгоритмами генерации, любое бесконечное множество можно сделать равным любому другому бесконечному множеству, а также больше или меньше его по желанию. Поэтому понятия «счётности» и «мощности» бесконечных множеств бессмысленны». Мы предпочитаем ТАКУЮ постановку вопроса и ЭТУ формулировку, потому что тогда у нас нет множеств, появляющихся неизвестно как и неизвестно откуда, каковы множества имеются у кантористов и у автора настоящей статьи.

¹⁶⁰ **МОИ 2017-02-15:** Описан многократно, см., например, <http://moialmanah.blogspot.com/p/25.html>, МОИ № 25, стр.62. Название впервые введено в <http://moialmanah.blogspot.com/p/38.html>, МОИ № 38, стр.13 из-за созвучия с МОИ № 37, стр.72.

¹⁶¹ **МОИ 2017-02-15:** См. <http://moialmanah.blogspot.com/p/27.html>, МОИ № 27, стр.67.

¹⁶² **МОИ 2017-02-15:** См. <http://moivzn.blogspot.com/2015/12/29.html>, МОИ № 29, стр.39.

Евклидову геометрию, не принимаем или заменяем на другие постулаты – получаем неевклидовы геометрии. Как Вы думаете, возможно ли доказать 5-й постулат Евклида? Я размышлял на эту тему, и мне кажется, что не всё так безнадежно.

С уважением, Илья Акимов.

от: Марина Олеговна Ипатьева <marina.ipatjeva@gmail.com>
Кому: IliA Akimov <il32.ak@yandex.ru>
дата: 13 февраля 2017 г., 14:13
тема: Re: Счётно ли бесконечное множество вещественных чисел
отправлено через: gmail.com

Здравствуйте, Илья Юрьевич!

Против Вашей статьи у меня возражений нет. С моей точки зрения всё правильно.¹⁶³ Вы, наверное, разместите ее на свой сайт. Я тоже, с Вашего позволения, ее куда-нибудь помешу, смотря по обстоятельствам: либо в Альманахах, либо на сайт.

Теперь насчет 5-го постулата Евклида. Ну, Вы, наверное, знаете, что его пытались доказать на протяжении тысячелетий (обзор можно увидеть, например, в Википедии в статье «Пятый постулат Евклида»). Согласно точке зрения современной математики 5-й постулат недоказуем в принципе – именно потому, что его можно заменить на два противоположных постулата (вместо «одна прямая через точку» взять «ни одной прямой через точку» или «много прямых через точку»).

В принципе соглашаясь с этой установкой, я могу добавить только следующее:

Что вообще есть доказательство? Когда какое-нибудь утверждение доказано и когда нет? Реально в математике это решается голосованием: доказано то, что большинство математиков СЧИТАЮТ доказанным.¹⁶⁴ С этой точки зрения, конечно, можно придумать такое рассуждение относительно 5-го постулата, которое определенная группа людей будет считать доказательством достаточным.

Строго же объективных критериев нет. Можно разработать некоторую систему критериев достоверности доказательства, и потом придумать такое доказательство 5-го постулата, которое этим критериям удовлетворяет. Но опять же, всегда можно будет подобрать другую систему критериев, которым данное доказательство удовлетворять не будет.

Я не думаю, что кому-то стоит этим заниматься в качестве серьезной цели, но можно поупражняться для интереса и забавы.

С уважением,
МОИ

от: IliA Akimov <il32.ak@yandex.ru>
Кому: Марина Олеговна Ипатьева <marina.ipatjeva@gmail.com>
дата: 16 февраля 2017 г., 15:49
тема: Re: Счётно ли бесконечное множество вещественных чисел
отправлено через: yandex.ru

Здравствуйте, Марина Олеговна!
В комментарии Вы пишете:

¹⁶³ **МОИ 2017-02-14:** Некоторые примечания появились позже при редактировании и более тщательном чтении статьи.

¹⁶⁴ **МОИ 2017-02-14:** Моррис Клайн писал (<http://moialmanah.blogspot.com/p/21.html>, МОИ № 21, стр.115): «Доказательство, абсолютная строгость и тому подобные понятия – блуждающие огоньки, химеры, «не имеющие пристанища в математическом мире». Строгого определения строгости не существует. Доказательство считается приемлемым, если оно получает одобрение ведущих специалистов своего времени или строится на принципах, которые модно использовать в данный момент. Никакого общепризнанного критерия строгости в современной математике не существует. Математическая строгость переживает сейчас не лучшее время. То, что некогда считалось неотъемлемой особенностью математики – неоспоримый вывод из явно сформулированных аксиом, – навсегда отошло в прошлое. Неопределенность и способность впадать в ошибку присущи логике в той мере, в какой они ограничивают возможности человеческого разума. Приходится лишь удивляться, сколько фундаментальных допущений мы обычно принимаем в математике, даже не сознавая этого».

Здесь опять видно, что в модели, принятой автором, имеются «сами множества», способ возникновения которых не рассматривается (и которые этим подобны аналогичным множествам кантористов).

Так и задумывалось. Статья писалась с позиций, принятых в теории множеств Кантора, чтобы показать противоречивость этой точки зрения. Если удастся кого-то убедить в этом, то тогда он задумается, как не попасть в противоречие. И тогда, может быть, по-другому будет относиться к Веданской теории.

С уважением, Илья Акимов.

от: Виктор Копилин <vkopilin@mail.ru>

Кому: Марина Олеговна Ипатьева <marina.ipatjeva@gmail.com>

дата: 16 февраля 2017 г., 0:05

тема: Re: Fwd: Счётно ли бесконечное множество вещественных чисел

отправлено через: mail.ru

(..) Фраза в статье: «**Натуральные числа можно располагать по порядку: 1, 2, 3, 4, 5 и т.д. Вещественные числа так выстроить нельзя**» как-то сразу бросилась в глаза и смущает: почему нельзя выстроить?! Я как мог пытался объяснить, почему можно. Ну, и т.д. ☺

МОИ 2017-02-16: Раз вещественные числа и натуральные можно поставить в 1-1 соответствие, значит, вещественные «расположить по порядку» можно. Но в этой последовательности они не будут стоять в возрастающем порядке, как натуральные. В этом разница – и именно это хотел сказать Илья.

Акимов И.Ю. Пятый постулат Евклида

Пятый постулат считается ключевым в геометрии. Всё, что можно доказать без его применения принято относить к абсолютной геометрии, а то, что доказывается с помощью пятого постулата, – верно только в Евклидовой геометрии.

Пятый постулат – явно более позднее добавление в список постулатов. Так как его необходимость не очевидна с первого взгляда.

Постулаты Евклида.

Допустим:

1. Что от всякой точки до всякой точки <можно> провести прямую линию.
2. И что ограниченную прямую <можно> непрерывно продолжать по прямой.
3. И что из всякого центра и всяким раствором <может быть> описан круг.
4. (Акс. 10.) И что все прямые углы равны между собой.
5. (Акс. 11.) И если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, меньшие двух прямых, то продолженные эти две прямые неограниченно встретятся с той стороны, где углы меньшие двух прямых.

(В статье используются «Начала Евклида» ОГИЗ 1948 г. Перевод с греческого и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского. В приложении 1 даны определения, аксиомы, постулаты и формулировки первых 29 предложений из данного издания)¹⁶⁵.

Так почему и когда возникла необходимость в пятом постулате? Попробуем разобраться. В первых 28 предложениях в книге Евклида пятый постулат не упоминается. Впервые он применён в доказательстве 29-го предложения. Можно подумать, что первых 28 предложений недостаточно для доказательства 5-го постулата. Но это не так. Попробуем доказать 5-й постулат, применяя определения, аксиомы, постулаты 1–4 и первые 28 предложений Евклида.

Здесь и далее в статье будем указывать определения, аксиомы, постулаты и предложения, на которые будем опираться в доказательствах. Это делается не из любви к аксиоматическому методу. А для того, чтобы случайно не использовать то, что мы и пытаемся доказать.

Постулат 5. И если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, меньшие двух прямых, то продолженные эти две прямые неограниченно встретятся с той стороны, где углы меньшие двух прямых.

Доказательство:

Даны две прямые a и b , и пересекающая их прямая c (рис.1). Углы CAB и ABE вместе больше двух прямых, а углы DAB и ABF вместе, меньше.

Возможны 4 ситуации:

1. Прямые a и b не пересекаются.
2. Прямые a и b пересекаются с обеих сторон от прямой c .
3. Прямые a и b пересекаются с левой стороны от прямой c .
4. Прямые a и b пересекаются с правой стороны от прямой c .

Если прямые a и b пересекаются с левой стороны, то образуется треугольник – AB и точка пересечения a и b слева. Но это невозможно, так как углы CAB и ABE вместе, больше двух прямых. А во всяком треугольнике два угла взятых вместе, при всяком их выборе меньше двух прямых. (Предложение 17).

Ситуации 2 и 3 отпадают как невозможные.

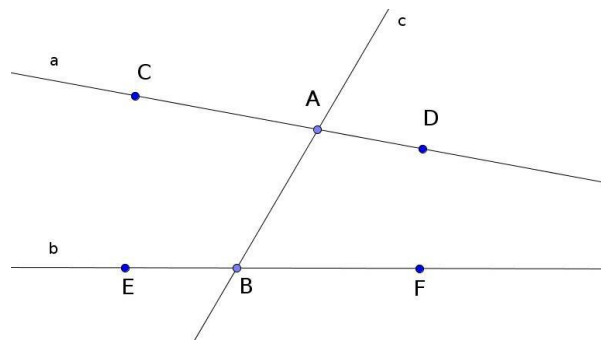


Рис.1.

¹⁶⁵ МОИ 2017-02-21: См. также МОИ № 24, <http://moialmanah.blogspot.com/p/24.html>.

Если прямые a и b пересекаются с правой стороны, то образуется треугольник – AB и точка пересечения a и b справа. Так как углы DAB и ABF вместе меньше двух прямых, то ситуация 4 возможна (Предложение 17).

Если прямые a и b не пересекаются ни слева, ни справа от прямой c , то они параллельные (Определение 23). И тогда угол CAB должен быть равен ABF , а угол ABE равен DAB (Предложение 27). Но это не так, потому что углы CAB и ABE вместе больше двух прямых, а углы DAB и ABF меньше двух прямых. И потому ситуация 1 невозможна.

По предложению 28 у параллельных прямых внутренние односторонние углы вместе равны двум прямым. У нас они по 5-му постулату сразу не равны двум прямым. И поэтому ситуация 1 невозможна ещё раз.

Итак, ситуации 1, 2, 3 невозможны. Ситуация 4 возможна. Так как ситуация 4 является единственно возможной, то 5 постулат доказан.

*

Почему же Евклид при доказательстве 29-го предложения использовал 5 постулат как постулат, а не доказал его до этого как предложение? Обратим внимание на формулировку предложений 27, 28, 29.

Предложение 27: Если прямая, падающая на две прямые, образует накрестлежащие углы, равные между собой, то прямые будут параллельны друг другу.

Предложение 28: Если прямая, падающая на две прямые, образует внешний угол, равный внутреннему противолежащему с той же стороны, или внутренние односторонние <углы вместе>, равные двум прямым, то прямые будут параллельны между собой.

Предложение 29: Прямая, падающая на параллельные прямые, образует накрестлежащие углы, равные между собой, и внешний угол, равный внутреннему, противолежащему с той же стороны, и внутренние односторонние углы, <вместе> равные двум прямым.

Предложение 29 является обратным предложениям 27 и 28. Зачем вообще понадобилось доказывать предложение 29? Если верны прямые предложения 27 и 28, то и предложение 29 верно без доказательства. При желании можно доказать 29 предложение опираясь на предложения 27 и 28. Обратим внимание на все 29 первых предложений. Есть ли там подобные ситуации? Предложение 6 обратно предложению 5, предложение 14 обратно предложению 13, предложение 19 обратно предложению 18, предложение 25 обратно предложению 24.

Предложение 5: У равнобедренных треугольников углы при основании равны между собой, и по продолжении равных прямых углы под основанием будут равны между собой.

Предложение 6: Если в треугольнике два угла равны между собой, то будут равны между собой и стороны, стягивающие равные углы.

Предложение 13: Если прямая, восстановленная на прямой, образует углы, то она будет образовывать или два прямых или <вместе> равные двум прямым.

Предложение 14: Если с некоторой прямой в какой-нибудь её точке две прямые, расположенные не по одну и ту же сторону, образуют смежные углы, равные <вместе> двум прямым, то эти прямые по отношению друг к другу будут по одной прямой.

Предложение 18: Во всяком треугольнике большая сторона стягивает больший угол.

Предложение 19. Во всяком треугольнике больший угол стягивается большей стороной

Предложение 24: Если два треугольника имеют две стороны, равные двум сторонам каждой, но заключённый между равными сторонами угол <в одном> больше, <чем в другом>, то и основание <в первом> будет больше основания <во втором>.

Предложение 25: Если два треугольника имеют две стороны, равные двум сторонам каждой, основание же <в одном> больше, чем основание <в другом>, то и угол, заключённый между равными прямыми <в первом>, больше угла <во втором>.

Если отбросить предложения на построение, а именно предложения 1, 2, 3, 9, 10, 11, 12, 22, 23, то остаются предложения 4, 7, 8, 15, 16, 17, 20, 21, 26 у которых нет обратного предложения. При доказательстве предложений 14, 19 и 25 используются предложения 13, 18 и 24 соответственно. Почему при доказательстве предложения 29 пользоваться предложениями 27 и 28 запрещено? Почему понадобилось доказывать практически одно и то же двумя независимыми методами? Может быть Евклид (или его предшественники) считали такой подход необходимым? Тогда почему не за всеми предложениями следуют обратные предложения с независимым доказательством?

Возможно, предложение 29 – это последствия споров с софистами, которые применяли эристику. Эристика – умение вести спор, чтобы достигнуть единственной цели – выиграть его

любой ценой, совершенно не заботясь об истине и справедливости. Софисты придерживались положения, – что нет объективной истины, а кажущееся кому-либо таковой – для него и является истинным.

Возможно, одним из аргументов софистов и было требование обратного независимого доказательства. Если из A следует B , то докажите, что из B можно вывести A , не опираясь на предыдущее доказательство. Быстро дать доказательство предложения 29 не удалось. Напомню, опираться на предложения 27 и 28, до доказательства предложения 29 запрещено. Но спор не мог длиться долго, надо было что-то делать. И тогда пришлось ввести дополнительно 5-й постулат для доказательства предложения 29. Софисты в данном случае частично победили. А 5-й постулат стал защитой предложений 27 и 28 от софистов. Возможно, что и все определения, аксиомы и постулаты Евклида в какой-то мере являются защитой от споров с софистами.

Если в доказательстве 5-го постулата нельзя опираться на предложения 27 и 28 (хотя он в них и не применяется), то ситуации 2 и 3 отпадают как невозможные, ситуация 4 возможна. Но мы ничего не можем сказать о ситуации 1. И тогда 3-я ситуация не единственно возможная и 5-й постулат не доказан.

Пятый постулат появился благодаря интеллектуальным развлечениям древних греков. Древнегреческие геометры, по-видимому, не предавали ему особого значения. Прямое и обратное независимое доказательство не считалось обязательным. Достаточно и одного прямого – предложений 27 и 28. Предложение 29 можно доказать, опираясь на предложения 27 и 28. А 5-й постулат – это защита от софистов.

Особенное значение пятому постулату начали придавать в средневековье. Сначала на востоке, а затем, с эпохой Возрождения проблему перенесли и в Европу.

Раз уж так исторически сложилось, то приходится принимать правила «игры». Так возможно ли доказать 5-й постулат? Сам постулат не удобен для доказательства. Но исследования в этом направлении выявили ряд утверждений, эквивалентных пятому постулату. То есть, если принять эти утверждения, то можно доказать 5-й постулат. Но и эти утверждения можно доказать, только приняв 5-й постулат.

На мой взгляд, самым удобным для доказательства эквивалентом 5-го постулата является утверждение: внутренние углы треугольника вместе равны двум прямым.

В книге Евклида это утверждение включено в предложение 32. То есть после того, как применён 5-й постулат в предложении 29. Чтобы подчеркнуть, что мы не собираемся применять 5 постулат, и так как запрещено использовать предложения 27 и 28, назовём это утверждение предложением 26А.

Итак:

Предложение 26А. Внутренние углы треугольника вместе равны двум прямым.

Можно доказать это предложение методом построения. Первые 26 предложений Евклида это позволяют. Берём произвольный треугольник ABC (рис.2). Продолжаем любую его сторону по прямой. Строим равный треугольник $A_1B_1C_1$, чтобы к примеру, точка C одного треугольника совпала с точкой A_1 другого. А сторона A_1C_1 лежала на одной прямой со стороной AC . Вершины B и B_1 должны лежать по одну сторону от прямой AC_1 . Строим третий треугольник $A_2B_2C_2$, равный треугольнику ABC . Его точка B_2 должна совпадать с точками C и A_1 , а сторона A_1B_1 лежать на одной прямой со стороной B_2A_2 . После построения определяем, что сторона B_2C_2 лежит на одной прямой со стороной CB . В точке CA_1B_2 у нас получаются три угла, равные углам ACB , BAC и ABC . Далее доказываем, что эти углы вместе равны двум прямым.

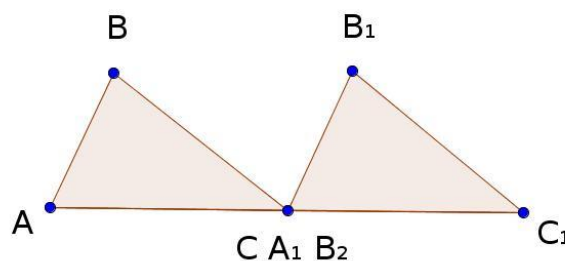


Рис.2.

Подробно такое доказательство рассматривать не будем. Во времена Евклида софисты его не приняли бы, так как речь идёт об идеальных фигурах в идеальном мире (Платоновском) (пространстве создаваемом алгоритмом нашего топокодера). А ни какие построения этому миру не соответствуют и поэтому метод построения мало доказателен. Если мы строим треугольник равный данному, то действительно ли он равен ему, ведь речь идёт об идеальных фигурах и их свойствах, а в чертежах всегда отступление от идеалов. И если сторона одного треугольника при

построении лежит на одной прямой со стороной другого равного треугольника, то лежат ли они на одной прямой у идеальных фигур? Необходимо найти другое доказательство, где графические построения несут вспомогательную роль, а мы рассуждаем об идеальных фигурах.

Предложение 26А. Внутренние углы треугольника вместе равны двум прямым.

Доказательство.

Возьмём произвольный треугольник ABC (рис.3). Стороны треугольника непрерывно продолжим по прямой (Постулат 2).

В точке A образуются четыре угла, а именно: EAB , BAC , CAD и DAE . Углы EAB и BAC вместе равны двум прямым (Предложение 13). Углы CAD и DAE вместе равны двум прямым (Предложение 13). Следовательно, четыре угла, образованные в точке A , вместе равны четырём прямым. Аналогично доказывается, что в точках B и C четыре угла, образованные в этих точках, вместе равны четырём прямым углам. Значит 12 углов, образованные в точках A , B и C вместе равны 12 прямым углам.

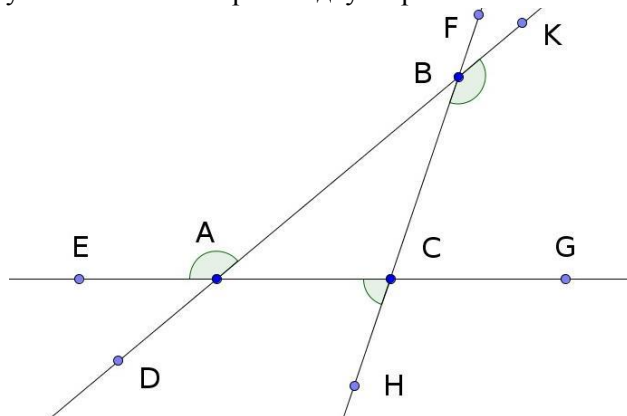


Рис.3.

Повернём прямую AC относительно точки A (точка A остаётся на месте) по часовой стрелке, до совпадения с прямой AB . При этом прямая повернулась на угол EAB . Теперь повернём нашу прямую по часовой стрелке относительно точки B до совпадения с прямой BC . Угол поворота – KBC . Поворачиваем нашу прямую по часовой стрелке, относительно точки C , до первоначального положения AC . Угол поворота при этом – HCA . Прямая AC за три поворота совершила полный оборот по кругу. (При этом все точки на этой прямой сместились на расстояние суммы сторон треугольника, но это не имеет значения, так как в нашем треугольнике все углы и расстояния между точками сохранены). Так как прямая AC совершила полный оборот, то углы EAB , KBC и HCA вместе равны четырём прямым (Предложение 13). Так как углы через вершину равны между собой (Предложение 15), то углы DAC , ABF и BCG вместе равны четырём прямым.

У нас остались внутренние углы треугольника ABC , а именно BAC , ABC и BCA , а также равные им через вершину углы, а именно EAD , FBK и GCH . На их общую сумму остаётся $12-8=4$ прямых угла. Следовательно углы BAC , ABC и BCA вместе равны двум прямым. И равные им углы EAD , FBK и GCH вместе равны двум прямым.

Мы взяли произвольный треугольник, но данное доказательство применимо к любому треугольнику. Значит, внутренние углы любого треугольника вместе равны двум прямым.

Было ли допустимо во времена Евклида такое доказательство? Ведь в те времена избегали использовать движение в доказательстве предложений. Я думаю, что допустимо. Так как движение используется только для того, чтобы определить углы между прямыми, которые дают полный оборот прямой. Этот способ ничуть не хуже метода наложения, используемого в книге Евклида.

Можно привести более короткое доказательство, используя этот метод. Я назвал его методом поворота прямой.

Доказательство 2 предложения 26А.

Возьмём произвольный треугольник ABC (рис.4). Стороны треугольника непрерывно продолжим по прямой (Постулат 2).

Повернём прямую AC против часовой стрелки, относительно точки A (точка A остаётся на месте) до совпадения с прямой AB . При этом прямая повернулась на угол CAB . Повернём нашу прямую против часовой стрелки относительно точки B до совпадения с прямой BC . Угол поворота – ABC . Поворачиваем нашу прямую против часовой стрелки относительно точки C до положения AC . Угол поворота – BCA . Наша прямая совершила половину оборота. (Если взять равно-

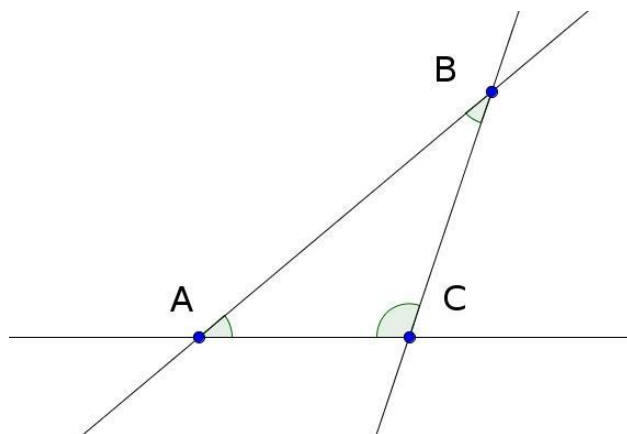


Рис.4.

сторонний треугольник, то точка А на прямой будет соответствовать точке С треугольника, а точка С прямой соответствовать точке А треугольника, то есть поменяются местами).

Так как прямая совершила половину оборота, то углы САВ, АВС и ВСА вместе равны двум прямым.

Данное доказательство применимо к любому произвольному треугольнику, а значит внутренние углы любого треугольника вместе равны двум прямым.

Доказательство 2 предложения 26А более короткое, но оно не даёт нам расклад по всем углам, образованным в точках А, В и С.

Можно продолжить рассуждения и рассмотреть методом поворота прямой выпуклый четырёхугольник.

Предложение 26Б. Внутренние углы выпуклого четырёхугольника вместе равны четырём прямым.

Доказательство.

Возьмём произвольный выпуклый четырёхугольник ABCD (рис.5). Стороны четырёхугольника непрерывно продолжим по прямой (Постулат 2).

В точке пересечения прямых образуются четыре угла, равных вместе 4 прямым (Предложение 13). Следовательно, в точках А, В, С и D образуется по 4 угла, вместе равные четырём прямым. Значит в нашем четырёхугольнике образуется 16 углов, вместе равных 16 прямым.

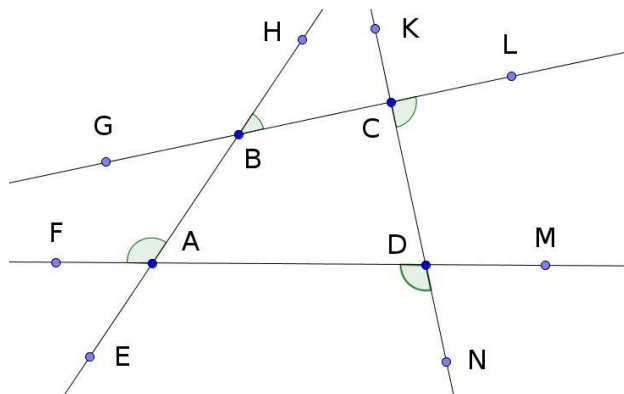


Рис.5.

Повернём прямую AD по часовой стрелке, относительно точки А (точка А остаётся на месте), до совпадения с прямой АВ. Угол поворота – FAB. Теперь повернём нашу прямую по часовой стрелке относительно точки В до совпадения с прямой ВС. Угол поворота HBC. Поворачиваем нашу прямую по часовой стрелке относительно точки С до до совпадения с прямой CD. Угол поворота – LCD. Поворачиваем прямую по часовой стрелке относительно точки D до первоначального положения AD. Угол поворота NDA.

За четыре поворота прямая AD совершила полный оборот и вернулась на место. Значит углы FAB, HBC, LCD и NDA вместе равны четырём прямым (Предложение 13). Равные им через вершину (Предложение 15) углы EAD, GBA, BCK и CDM вместе равны четырём прямым. Углы поворота прямой и равные им через вершину, вместе равны 8 прямым.

У нас остались внутренние углы четырёхугольника ABCD, а именно – DAB, ABC, BCD и CDA, и равные им через вершину углы EAF, GBH, KCL и MDN. На их общую сумму остаётся $16 - 8 = 8$ прямых. Значит внутренние углы выпуклого четырёхугольника ABCD, а именно – DAB, ABC, BCD и CDA вместе равны 4 прямым. Равные им через вершину углы EAF, GBH, KCL и MDN вместе равны 4 прямым.

Мы взяли произвольный выпуклый четырёхугольник, но данное доказательство применимо к любому выпуклому четырёхугольнику. Значит внутренние углы любого выпуклого четырёхугольника вместе равны четырём прямым.

Следствие. Так как внутренние углы любого выпуклого четырёхугольника вместе равны четырём прямым, то существует четырёхугольник, у которого все углы прямые.

Следствие предложения 26Б является ещё одним эквивалентом 5-го постулата Евклида.

Для предложения 26Б, как и для предложения 26А возможно более короткое доказательство. Но оно даёт информацию только о внутренних углах фигуры. Если продолжить рассуждения, то можно доказать то же, что и в приведённом выше доказательстве, но тогда исчезнет краткость.

Можно продолжить исследование выпуклых фигур и узнать, что сумма внутренних углов выпуклого пятиугольника равна 6 прямым, а выпуклого шестиугольника 8 прямым. Можно вывести общую формулу выпуклых фигур. Ничего нового в этом нет. Это всё давно доказано. Но традиционно, сначала доказывается сумма внутренних углов треугольника, и через это предложение доказывается всё остальное. При применении метода поворота прямой, можно исследовать суммы углов многоугольников в любой последовательности. Можно исследовать не только выпуклые многоугольники, но и любые фигуры, состоящие из прямых линий. Простота и

наглядность – большой плюс этого метода. Так как прямая всегда возвращается на своё место, то она делает либо целое количество оборотов, либо с половиной. Сумма углов всегда будет кратна 4 прямым углам (целое количество оборотов), или 2 прямым (когда один поворот не полный).

Мы всё время говорили о доказательстве 5-го постулата, или его эквивалента. Но вспомним, для чего он был введён. А введён он был для доказательства предложения 29. И если доказать предложение 29 без применения 5-го постулата, то его необходимость совсем отпадает. Далее его, при желании, можно доказать в качестве предложения.

Итак, ставится новая задача: доказать предложение 29 без применения 5-го постулата. Пользоваться предложениями 27 и 28, до доказательства предложения 29 тоже запрещено.

Приведённое доказательство предложения 29 в книге Евклида назовём доказательством 1.

Предложение 29. Прямая, падающая на параллельные прямые, образует накрест лежащие углы, равные между собой, и внешний угол, равный внутреннему, противолежащему с той же стороны, и внутренние односторонние углы, <вместе> равные двум прямым.

Доказательство 2.

Даны параллельные прямые a и b , и пересекающая их прямая c (рис.6). Обозначим точку пересечения прямых a и c точкой A , а прямых b и c точкой B . Разделим отрезок AB пополам (Предложение 10). Точка C делит отрезок AB пополам. Из точки C раствором AC или CB описываем круг (Постулат 3). Необозначенные точки пересечения круга с прямыми a и b обозначим как D и E . Проводим прямую линию от точки D до точки E (Постулат 1).

Так как углы DCA и BCE равны через вершину (Предложение 15), а стороны AC , DC , BC и EC равны как радиусы описанной из точки C окружности (Определение 15), то треугольники DCA и BCE равны между собой (Предложение 4).

Треугольники DCA и BCE равнобедренные, так как стороны AC , DC , BC и EC равны (Определение 20). У равнобедренных треугольников углы у основания равны (Предложение 5). Следовательно, углы CDA , CAD , CBE и CEB равны. Угол DAC равен углу FAG через вершину (Предложение 15). Угол CBE равен углу HVK через вершину. Следовательно, углы FAG , DAC , CBE и HVK равны.

Так как углы FAG , DAC , CBE и HVK равны, то и дополняющие их до двух прямых углов углы (соответственно) FAD , GAC , CBH и KBE равны между собой (Предложение 13).

Так как углы DAC и CAG вместе равны двум прямым (Предложение 13), углы CBE и CBH равны двум прямым (Предложение 13), а углы DAC и CBE равны между собой и углы CAG и CBH равны между собой, то углы CAG и CBE вместе равны двум прямым, а углы DAC и CBH вместе равны двум прямым.

Следствие. Если, соединяя прямой линией точку D и точку E , прямая DE не пересекает прямую c в точке C , то прямые a и b не параллельны.

Если прямая DE не проходит через точку C , то вышеприведенное доказательство не получится. Но у нас по условию предложения 29 прямые a и b параллельны, и доказательство в силе.

Смогли бы софисты привести аргументы против этого доказательства? Но софистов давно нет. А оставленное ими наследство в виде 5-го постулата существует до сих пор.

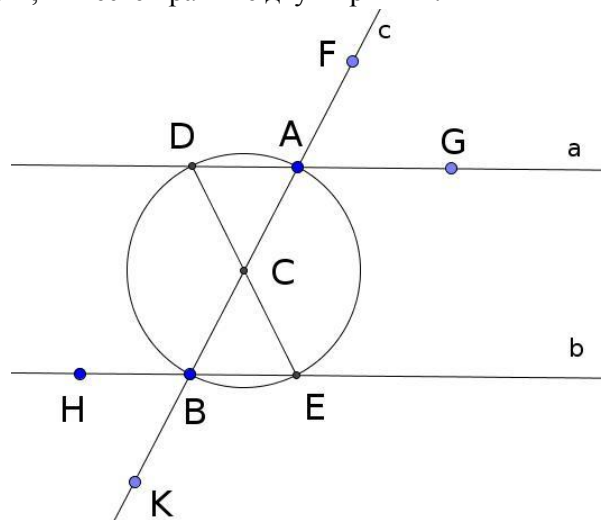


Рис.6.

09.16г – 18.02.17г.

Приложение 1

Определения

1. Точка есть то, что не имеет частей.
2. Линия же – длина без ширины.

3. Концы же линии – точки.
4. Прямая линия есть та, которая равно расположена по отношению к точкам на ней.
5. Поверхность есть то, что имеет только длину и ширину.
6. Концы же поверхности – линии.
7. Плоская поверхность есть та, которая равно расположена по отношению к прямым на ней.
8. Плоский же угол есть наклонение друг к другу двух линий, в плоскости встречающихся друг с другом, но не расположенных по <одной> прямой.
9. Когда же линии, содержащие угол, прямые, то угол называется прямолинейным.
10. Когда же прямая, восстановленная на <другой> прямой, образует рядом углы, равные между собой, то каждый из равных углов есть прямой, а восстановленная прямая называется перпендикуляром к той, на которой она восстановлена.
11. Тупой угол – больший прямого.
12. Острый же – меньший прямого.
13. Граница есть то, что является окончечностью чего-либо.
14. Фигура есть то, что содержится внутри какой-нибудь или каких-нибудь границ.
15. Круг есть плоская фигура, содержащаяся внутри одной линии [которая называется окружностью], на которую все из одной точки внутри фигуры падающие [на окружность круга] прямые равны между собой.
16. Центром же круга называется эта точка.
17. Диаметр же круга есть какая угодно прямая, проведённая через центр и ограничиваемая с обеих сторон окружностью круга, она же и рассекает круг пополам.
18. Полукруг же есть фигура, содержащаяся между диаметром и отсекаемой им <частью> окружности. Центр же полукруга – то же самое, что и у круга.
19. Прямолинейные фигуры суть те, которые содержатся между прямыми, трёхсторонние – между тремя, четырёхсторонние же – четырьмя, многосторонние же – которые содержатся между более чем четырьмя прямыми.
20. Из трёхсторонних фигур равносторонний треугольник есть фигура, имеющая три равные стороны, равнобедренный же – имеющая только две равные стороны, разносторонний же – имеющая три неравные стороны.
21. Кроме того, из трёхсторонних фигур прямоугольный треугольник есть имеющий прямой угол, тупоугольный же – имеющий тупой угол, а остроугольный – имеющий три острых угла.
22. Из четырёхсторонних фигур квадрат есть та, которая и равносторонняя и прямоугольная, разносторонник же – прямоугольная, но не равносторонняя, ромб – равносторонняя, но не прямоугольная, ромбоид (параллелограмм) – имеющая противоположные стороны и углы, равные между собой, но не являющаяся ни равносторонней ни прямоугольной. Остальные же четырёхсторонники будем называть трапециями.
23. Параллельные суть прямые, которые, находясь в одной плоскости и будучи продолжены в обе стороны неограниченно, ни с той ни с другой <стороны> между собой не встречаются.

Постулаты

Допустим:

1. Что от всякой точки до всякой точки <можно> провести прямую линию.
2. И что ограниченную прямую <можно> непрерывно продолжать по прямой.
3. И что из всякого центра и всяким раствором <может быть> описан круг.
4. (Акс. 10.) И что все прямые углы равны между собой.
5. (Акс. 11.) И если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, меньшие двух прямых, то продолженные эти две прямые неограниченно встретятся с той стороны, где углы меньшие двух прямых.

Общие понятия (Аксиомы)

1. Равные одному и тому же равны и между собой.
2. И если к равным прибавляются равные, то и целые будут равны.
3. И если от равных отнимаются равные, то остатки будут равны.
4. И если к неравным прибавляются равные, то целые будут не равны.
5. И удвоенные одного и того же равны между собой.
6. И половины одного и того же равны между собой.
7. И совмещающиеся друг с другом равны между собой.
8. И целое больше части.
9. И две прямые не содержат пространства.

Предложения 1–29

1. На данной ограниченной прямой построить равносторонний треугольник.

2. От данной точки отложить прямую, равную данной прямой.
3. Из двух заданных неравных прямых от большей отнять прямую, равную меньшей.
4. Если два треугольника имеют по две стороны, равные каждой каждой, и по равному углу, содержащемуся между равными прямыми, то они будут иметь и основание, равное основанию, и один треугольник будет равен другому, и остальные углы, стягиваемые равными сторонами, будут равны остальным углам каждый каждому.
5. У равнобедренных треугольников углы при основании равны между собой, и по продолжении равных прямых углы под основанием будут равны между собой.
6. Если в треугольнике два угла равны между собой, то будут равны между собой и стороны, стягивающие равные углы.
7. На одной и той же прямой нельзя построить двух прямых, равных каждой каждой двум другим прямым и <сходящихся> одни в одной точке, другие в другой, так, чтобы эти прямые находились бы по одну сторону и имели бы одни и те же концы с первоначальными прямыми.
8. Если два треугольника имеют две стороны, равные каждой каждой двум сторонам, имеют также и основание, равное основанию, то они будут иметь и угол равный углу, заключённому между равными прямыми.
9. Данный прямолинейный угол рассечь пополам.
10. Данную ограниченную прямую рассечь пополам.
11. К данной прямой из заданной на ней точки провести прямую под прямыми углами.
12. К данной неограниченной прямой из заданной точки, на ней не находящейся, провести перпендикулярную прямую линию.
13. Если прямая, восставленная на прямой, образует углы, то она будет образовывать или два прямых или <вместе> равные двум прямым.
14. Если с некоторой прямой в какой-нибудь её точке две прямые, расположенные не по одну и ту же сторону, образуют смежные углы, равные <вместе> двум прямым, то эти прямые по отношению друг к другу будут по одной прямой.
15. Если две прямые пересекаются, то образуют углы через вершину, равные между собой.
16. Во всяком треугольнике при продолжении одной из сторон внешний угол больше каждого из внутренних, <ему> противолежащих.
17. Во всяком треугольнике два угла, взятые вместе при всяком их выборе, меньше двух прямых.
18. Во всяком треугольнике большая сторона стягивает больший угол.
19. Во всяком треугольнике больший угол стягивается и большей стороной.
20. Во всяком треугольнике две стороны, взятые вместе при всяком их выборе, больше оставшейся.
21. Если в треугольнике на одной из сторон от концов восставлены будут внутрь две прямые, то восставленные прямые (вместе) будут меньше двух остальных сторон треугольника, но будут заключать больший угол.
22. Из трёх прямых, которые равны трём данным [прямым], составить треугольник; нужно, однако, чтобы две <прямые, взятые вместе>, при всяком их выборе были бы больше оставшейся [вследствие того, что во всяком треугольнике две стороны, <взятые вместе> при всяком их выборе, больше оставшейся].
23. На данной прямой при данной её точке построить прямолинейный угол, равный данному прямолинейному углу.
24. Если два треугольника имеют две стороны, равные двум сторонам каждая каждой, но заключённый между равными сторонами угол <в одном> больше, <чем в другом>, то и основание <в первом> будет больше основания <во втором>.
25. Если два треугольника имеют две стороны, равные двум сторонам каждая каждой, основание же <в одном> больше, чем основание <в другом>, то и угол, заключённый между равными прямыми <в первом>, больше угла <во втором>.
26. Если два треугольника имеют два угла, равных двум углам каждый каждому, и одну сторону, равную одной стороне, либо заключающейся между равными углами, либо стягивающей один из равных углов, то они будут иметь и остальные стороны равными остальным сторонам [каждая каждой] и оставшийся угол оставшемуся углу.
27. Если прямая, падающая на две прямые, образует накрестлежащие углы, равные между собой, то прямые будут параллельны друг другу.
28. Если прямая, падающая на две прямые, образует внешний угол, равный внутреннему противолежащему с той же стороны, или внутренние односторонние <углы вместе>, равные двум прямым, то прямые будут параллельны между собой.
29. Прямая, падающая на параллельные прямые, образует накрестлежащие углы, равные между собой, и внешний угол, равный внутреннему, противолежащему с той же стороны, и внутренние односторонние углы, <вместе> равные двум прямым.

Сопроводительное письмо

от: Iliа Akimov <il32.ak@yandex.ru>

Кому: Marina Olegovna Ipatjeva <marina.olegovna@gmail.com>

дата: 19 февраля 2017 г., 18:27

тема: Пятый постулат Евклида

отправлено через: yandex.ru

Здравствуйте Марина Олеговна!

Если существует несколько моделей, отличающихся одним постулатом, при этом все модели непротиворечивые, то можно ли делать вывод о недоказуемости этого постулата в одной из моделей? Я думаю, что такого вывода делать нельзя.

То, что нет объективных критериев достоверности доказательства, конечно, печально. Но какие-то утверждения считаются доказанными. И если опираться на них, то возможно получить приемлемый результат. Ведь и теория Кантора считается доказанной. Никто из математиков не считает нужным даже усомниться в ней.¹⁶⁶ Однако, разве это повод, для отказа от попыток показать её противоречивость?

А тема 5-го постулата очень интересна. Можно к ней относиться как к математическому досугу и разминке для ума. Возникает вопрос, а зачем вообще понадобился 5-й постулат? В книге Евклида он применяется для доказательства 29-го предложения. А 29-е предложение обратно предложениям 27 и 28, которые доказываются без применения 5-го постулата. Зачем потребовалось независимое доказательство 29-го предложения, без опоры на предложения 27 и 28? Ведь для этого пришлось вводить дополнительный постулат. Возможно, это влияние софистов. Размышления на эту тему в файле во вложении.

Теперь о различии нашего топокодера и реального темпомундуса. Евклидово пространство бесконечно в большом и малом. Неевклидовы геометрии, из-за кривизны, в больших масштабах могут замкнуться сами на себя, и проблема бесконечности в большом направлении снимается. Но в направлении меньших размеров, они также бесконечны. И поэтому их применение для описания темпомундуса ничуть не лучше использования Евклидовой геометрии. Вы писали, что у темпомундуса, возможно, вообще нет категории размерности. Это понятие появляется при интерпретации темпомундуса алгоритмом нашего топокодера. Можно допустить, что такое возможно. Во всяком случае, опровергнуть это утверждение вряд ли удастся. Но то, что в темпомундусе реализовано одно из неевклидовых пространств, отвергается по той же причине, по какой отвергается Евклидово пространство, – по причине бесконечности в малом.

С уважением, Илья Акимов.

Ответ Марины Ипатъевой

Видите ли, Илья Юрьевич, Пятый постулат Евклида, как его понимают современные геометры, а также как его понимаю и я, есть нечто более глубокое, чем просто утверждение о том, что прямые сходятся, если углы с одной стороны меньше двух прямых или что внутренние углы треугольника в сумме дают два прямых угла или, в той форме, как я обычно употребляю, что через точку параллельно данной прямой можно провести только одну прямую линию.

Пренебрегая формальной точностью и прибегая к образной форме, Пятый постулат Евклида можно выразить так: «Плоскость плоская» (а не сферическая, как у Римана и не седловидная, как у Лобачевского). Именно это фундаментальное обстоятельство позволяет проводить те рассуждения, которые проводит Евклид, за ним тысячи геометров и теперь Вы в своей статье. Ваши рассуждения всё равно проводятся при предположении, что «плоскость плоская», то есть – в рамках принятого Пятого постулата. И Вы НЕ можете доказать, что «плоскость действительно плоская».

¹⁶⁶ **МОИ 2017-02-20:** Ну, это не так, многие математики считали теорию Кантора ошибочной (см., например, перечень в МОИ [№ 108](#), <http://moialmanah.blogspot.com/p/108.html>, стр.16), и сначала их было даже большинство. Но со временем они остались в меньшинстве по причинам, которые вообще-то требуют специального исследования.

Похожа ситуация со Вторым постулатом Веданской теории, который обсуждался на днях в комментариях к http://moialmanah.blogspot.com/p/blog-page_8.html; особенно см. мой ответ от 13 февраля 2017 г. в 17:37. Второй постулат ВТ провозглашает принципиальную допустимость рассуждений о мозге как о компьютере, а Пятый постулат Евклида провозглашает принципиальную допустимость рассуждать о плоскости как о «плоском объекте».

Далее, обратите внимание (см. МОИ № 24, <http://moialmanah.blogspot.com/p/24.html>, стр.5, подчеркнуто красным), что в издании Мордухая-Болтовского текст в круглых скобках есть вставки Гейберга, публикатора греческого текста, «и в самом тексте Евклида не содержатся». Следовательно, в рассматриваемом Вами Предложении 29 у Евклида НЕТ ссылок на предложение 13, постулат 5, предложение 15 и аксиому 1. Поэтому утверждение, что Пятый постулат впервые используется именно в Предложении 29, весьма условно – оно порождено поздними комментаторами, уже находящимися под впечатлением и влиянием аксиоматического метода.

Как Вы, наверное, читали, я считаю, что сам Евклид вообще не использовал аксиоматический метод. Его мышление было гораздо естественнее и ближе к представлениям Веданской теории.

Я скептически отношусь также к известному делению геометрии на «абсолютную геометрию» (не зависящую от Пятого постулата) и остальную ее часть – зависящую. Я не углублялась в этот вопрос, но с точки зрения общих соображений это кажется весьма условно. Фактически Пятый постулат используется гораздо раньше 29-го предложения.

Возьмем основное ядро Вашего доказательства – то, что находится вокруг рисунка 1 и до звездочки. Вы отмечаете 4 возможных случая и потом отвергаете случаи 2 и 3 как невозможные на основании Предложения 17, утверждающего, что «*Во всяком треугольнике два угла, взятые вместе при всяком их выборе, меньше двух прямых*». Однако это утверждение справедливо только в том случае, если действует Пятый постулат и всё это происходит на плоской плоскости.

Если плоскость внутренне искривлена, то Предложение 17 не будет в силе, и Ваше доказательство станет несостоятельным. В качестве наглядного примера возьмем случай с земным шаром (предположив, что Земля – идеальный шар). Возьмем на этой поверхности 1) Северный полюс, 2) точку пересечения гринвичского меридиана и экватора и 3) точку пересечения экватора с меридианом 90° восточной долготы. Образуется прямоугольный треугольник, у которого все три угла – прямые, сумма внутренних углов 270°, а любые два внутренних угла не меньше, а равны двум прямым. (Если второй меридиан подвинуть еще чуть дальше на восток, то можно получить сумму двух внутренних углов и больше 180°).

В данном случае наш шар сам находится в Евклидовом пространстве, а мы сами – тоже в этом пространстве, однако ВНЕ поверхности Земли. Поэтому мы легко понимаем, откуда берутся описанные «нарушения» геометрии. Но мы легко можем представить себе и ситуацию, когда мы находимся ВНУТРИ этой искривленной плоскости и поэтому не видим этого искривления и не чувствуем его, а обнаруживается оно только в свойствах треугольников.

Так вот, Пятый постулат (в его современном понимании) как раз и состоит в утверждении, что такого незаметного для нас искривления плоскости – НЕТ. А если оно есть, то это уже не евклидова геометрия, и Пятый постулат не в силе.

Таким образом, Вы, конечно, не доказали Пятый постулат (что искривления пространства нет), а доказали, что Пятый постулат на самом деле используется раньше, чем то место в «Началах» Евклида, где его впервые упомянул публикатор Гейберг в своей вставке. (А сам Евклид этот постулат вообще не упоминает).

По вопросам реальных (не гильбертовых) оснований геометрии, про топокодер и темпмундус, упомянутые в Вашем письме, нужно было бы сказать так много, что это никак не укладывается в рамки настоящего моего ответа – там требуется объемистая статья (если не книга), поэтому пока что я на этом закончу.

Марина Ипатьева

21 февраля 2017 года

от: Marina Olegovna Ipatjeva <marina.olegovna@gmail.com>

Кому: Iliia Akimov <il32.ak@yandex.ru>

дата: 21 февраля 2017 г., 13:46

тема: Re: Пятый постулат Евклида

отправлено через: gmail.com

С уважением, МОИ

Письмо И.Ю. Акимова от 26 февраля 2017 г.

от: Iia Akimov <il32.ak@yandex.ru>

Кому: Marina Olegovna Ipatjeva <marina.olegovna@gmail.com>

дата: 26 февраля 2017 г., 17:57

тема: Re: Пятый постулат Евклида

отправлено через: yandex.ru

С уважением, Илья Акимов.

Приложенный файл:

Здравствуйте Марина Олеговна!

В 5-й постулат, в современном понимании, кроме него самого, вкладывают ещё один более глубокий постулат – о структуре пространства, применяемого в данной геометрии, и алгоритме его построения. Но эти постулаты следует разделять. В геометрии Евклида он участвует с самого первого предложения. Все построения и рассуждения проходят в Евклидовом пространстве. То, что он не озвучен, и тем самым как бы скрыт, тоже понятно. До появления первой неевклидовой геометрии никто и представить не мог, что структуру пространства можно представлять другой. Можно назвать его нулевым постулатом. В каждой геометрии он свой и является ключевым для неё. Нулевой постулат действительно доказать невозможно. Какой мы выберем нулевой постулат – такую геометрию мы и получим. В 5-й постулат стали вкладывать смысл нулевого постулата скорее всего потому, что именно в попытке его доказательства методом апагогии Лобачевский построил первую неевклидову геометрию. В геометрии Римана 5-го постулата нет, а нулевой постулат о структуре пространства есть. И в геометрии Евклида и в геометрии Лобачевского ключевым является именно нулевой постулат о структуре пространства, а 5-й постулат лишь следствие его. И поэтому в 5-й постулат нужно вкладывать лишь тот смысл, – который содержится в его формулировке. И Евклид, и все те, кто пытался доказать 5-й постулат до Лобачевского, и сам Лобачевский до построения своей геометрии, понимали его именно так.

В геометрии Евклида (по нулевому постулату принимаем Евклидово пространство) 5-й постулат вводится для доказательства 29-го предложения. А 29-е предложение обратно предложениям 27 и 28. Если использовать предложения 27 и 28, то для доказательства предложения 29 достаточно формулировок предложений 27 и 28. По сути, предложение 29 лишнее. Но почему-то, (я считаю, что это влияние споров с софистами) для предложений 27 и 28 применено требование обратного независимого доказательства. И для выполнения этого требования появляется предложение 29, для доказательства которого и потребовался 5-й постулат. (Если это был спор с софистами, то времени на раздумья особенно не было).

Требование обратного независимого доказательства нужно либо отвергнуть, либо применять ко всем предложениям. В первом случае предложение 29 и 5-й постулат не нужны, во втором случае следует согласиться, что в книге Евклида нет предложений с приемлемым доказательством.

Предложения на построение, а именно 1, 2, 3, 9, 10, 11, 12, 22, 23 не рассматриваем, так как в них нет доказательств.

Предложения 4, 7, 8, 15, 16, 17, 20, 21, 26 не принимаются, так как они не имеют обратных предложений с независимым доказательством.

Предложения 13, 18 и 24 имеют обратные предложения 14, 19 и 25. Но их тоже принять нельзя, так как при доказательстве предложений 14, 19 и 25 используются выводы, полученные в предложениях 13, 18, и 24 соответственно. Доказательства предложений 14, 19 и 25 не являются независимыми от предложений 13, 18 и 24. И поэтому все эти предложения не принимаются.

Предложение 6 частично обратно предложению 5, и в его доказательстве предложение 5 не используется, но его нельзя принять, так как используются выводы из предложения 4, а оно не имеет обратного предложения с независимым доказательством.

Предложения 27 и 28 имеют обратное предложение 29 с независимым доказательством. Но и эти предложения принять не можем, пока не доведём до состояния удовлетворяющего принятому требованию предыдущих предложений, применяющихся в доказательствах.

Все последующие доказательства предложений не принимаются, до приведения первых 29-ти предложений в соответствие принимаемому требованию обратного независимого доказательства.

Кто скажет, сколько ещё может появиться постулатов, если принять обязательность обратного предложения с независимым доказательством?

Но если принять особенные требования только к предложениям 27 и 28, и необходимость предложения 29, то можно доказать и предложение 29 без применения 5-го постулата, и эквиваленты 5-го постулата. Нулевой постулат о структуре пространства остаётся в силе, и все рассуждения и построения проходят именно в Евклидовом пространстве.

Именно об этом и шла речь в моей статье. По-видимому, я не совсем ясно выразил свои мысли, за что приношу свои извинения.

25.02.17г.

Илья Акимов

Ответ Марины Ипатьевой

Конечно, если у Вас предположения о структуре пространства вынесены в отдельный Нулевой постулат, тогда то утверждение, которое в «Началах» Евклида (в редакции Гейберга – Мордухай-Болтовского) фигурирует как Пятый постулат, становится доказуемым.

Если Вы произносите слова «доказать Пятый постулат» без упоминания о Нулевом постулате, то, естественно, Вас поймут неправильно.

После уточнения этих обстоятельств у меня нет существенных возражений против Вашей статьи. Вы там высказали определенную точку зрения (на счет обстоятельств возникновения Пятого постулата и на счет логической структуры системы предложений Евклида) и, хотя, возможно, у других авторов могут быть несколько иные мнения, но я не считаю своим долгом выступать тут в качестве судьи.

Вместо этого я выскажу некоторые общие соображения, а в качестве базиса для этих соображений скопирую ниже первую часть моей статьи «Основания геометрии»¹⁶⁷ до того места, до какого она написана к сегодняшнему дню.

То, что там сказано, я писала и раньше, но в менее развернутом виде. Всё там выраженное я здесь далее считаю известным.

Итак, евклидово пространство есть потенциальный продукт алгоритма размещения объектов – алгоритма, использующего три независимые координаты. В этом пространстве могут действовать различные конструкторы (конструирующие программы). Их потенциальные продукты есть предмет геометрии.

Таким образом, перед нами – некоторая система программ. Мне как бывшему программисту (а вообще-то бывших программистов не бывает!) в жизни приходилось много иметь дело с потенциальными продуктами различных программ. И в общем-то исследование и описание этих продуктов в форме постулатов–аксиом–теорем–доказательств никогда не казалось единственно возможным или лучшим. Человек, когда он знает и понимает саму программу, многое о ее ожидаемых результатах видит и без таких формальных доказательств.

А попытки построить систему таких доказательств, особенно у фундамента этой постройки, превращаются в какое-то переливание одного и того же из одной посуды в другую. Одно очевидное доказывается другим очевидным, но от этого не становится более очевидным. Читая не только Евклида, но в еще большей степени Гильберта или Погорелова, меня не покидало это ощущение. Почему выделены именно такие теоремы, а не другие? Что нужно и что не нужно доказывать? И что вообще есть доказательство?

Всё как-то зыбко, переливается и плывет, и возможны тысячи вариантов, как класть в основание постройки то одно, то другое...

А на самом деле всё и так понятно.

¹⁶⁷ См. МОИ № 114, стр. 106–113.

Вот, Ваш Нулевой постулат, определяющий «структуру пространства». При традиционном построении он постулат. Но на самом деле там вместо постулата стоит алгоритм, оперирующий тремя координатами. И в принципе можно начинать с него, без всякого постулата. Поступать так, как обычно и действуют программисты, разбирая программу.

Марина Ипатьева

27 февраля 2017 года

Наказан математик – профессор Кикуст

от: Марина Олеговна Ипатьева <marina.ipatjeva@gmail.com>
Кому: Paulis.Kikusts@mii.lu.lv
дата: 16 мая 2017 г., 0:02
тема: Тест для математиков
отправлено через: gmail.com



Паулис Кикуст

Господин Кикуст!

Информирую Вас, что Вы назначены номинантом № 2 в операции *Milliaria* (Уложение ее см. в

<http://milliaria.blogspot.com/2016/01/m000-milliaria.html>).

Вам надлежит ответить на два тестовых вопроса:

1) Признаете ли Вы, что для успешного проведения классического диагонального процесса

0,7854...

0,2341...

0,1869...

0,9752... и т.д.

требуется предположение (постулат) о том, что бесконечность «вправо» равносильна бесконечности «вниз»?

2) Признаете ли Вы, что можно различать две следующие точки зрения:

а) четных чисел столько же, сколько натуральных;

б) четных чисел в два раза меньше, чем натуральных;

и что можно отслеживать, где в рассуждениях используется одна, и где другая точка зрения?

Срок для ответов Вам дается один месяц, считая с момента отправки настоящего письма.

Если ответы не поступят в указанный срок, Вам будет присвоена квалификация «Трус физико-математических наук» с вручением соответствующего диплома, и Вы станете вторым в мире (после профессора К.М. Подниекса) обладателем такого звания и диплома.

Если хотя бы на один из вопросов ответ будет «нет», Вам будет присвоена квалификация «Жулик физико-математических наук» с вручением соответствующего диплома, и Вы станете вторым в мире обладателем этого звания (после академика РАН, новосибирского профессора Ю.Г. Решетняка).

Если на оба вопроса поступят ответы «да», то Вам будет присвоена квалификация «Разумник физико-математических наук» с вручением соответствующего диплома, и Вы станете первым в мире обладателем этого звания, а в Интернете будет распространено сообщение, что профессор Кикуст 36 лет отстаивал Канторовскую теорию трансфинитности, а в конце жизни признал свои ошибки и заблуждения и подтвердил ошибочность теории Кантора.

Если от Вас ответы поступят, но они будут заполнены обычной для Вас и для Подниекса демагогией так, что невозможно будет установить, является ли это ответом «да» или «нет», то Вам будет присвоена квалификация «Околесник физико-математических наук» с вручением соответствующего диплома, и Вы станете первым в мире обладателем этого звания.

Если по вышеприведенному алгоритму Вам полагается звание «Жулик физико-математических наук», Вы имеете право заявить, что не жульничали сознательно, и тогда Вам это звание будет заменено на «Дурак физико-математических наук» с вручением соответствующего диплома, и Вы станете первым в мире обладателем этого титула.

Так что выбирайте, какой диплом из пяти возможных Вам получать, и этот вопрос будет решен максимум за месяц.

В <http://milliaria.blogspot.com/2016/01/m001.html> тестовые вопросы рассмотрены более подробно. Там же рядом на тех же сайтах можно получить много дополнительной информации. Два файла, не размещенных еще на сайтах, присоединяю к настоящему письму.

МОИ

16 мая 2017 года

Приложено: 2017-03-13_Faddejev-i-Milliaria.pdf,¹⁶⁸ 2017-03-19_Zenkin.pdf¹⁶⁹

от: Марина Олеговна Ипатьева <marina.ipatjeva@gmail.com>

Кому: karlis.podnieks@lu.lv

дата: 16 мая 2017 г., 0:04

тема: Старые книжки

отправлено через: gmail.com

Неуважаемый трус физико-математических наук Подниекс!

Вышло новое (третье) издание двух старых книжек.

Можете ознакомиться.

МОИ

Приложено: L-MUIGB,¹⁷⁰ R-LEONB¹⁷¹

от: Марина Олеговна Ипатьева <marina.ipatjeva@gmail.com>

Кому: Paulis.Kikusts@mii.lu.lv

дата: 16 июня 2017 г., 0:05

тема: Тест для математиков

отправлено через: gmail.com

Итак, Кикуст, из пяти предоставленных вам возможностей вы выбрали наиболее позорную: Труса физико-математических наук. Что ж, значит, так тому и быть.

Вам присваивается это научное звание, и соответствующий диплом прилагается.

Отныне форма обращения к вам: «*Неуважаемый трус физико-математических наук Кикуст!*». Без имени и инициалов, только одна фамилия; на «вы» (чтобы не допустить панибратства с вами), но «вы» со строчной буквы.

Вы, Кикуст, никогда не вели себя как подобает ученому (скорее всего, просто не знали вообще, что это такое). Как никто другой, все дискуссии (которые должны были выявить истину) вы заваливали самой отъявленной демагогией. (Один из ваших шедевров – в пунктах .1529–1545 приложенной книги L-MUIGB)¹⁷².

В пункте .2532 той же книги 21 год назад, 13 июня 1996 года, вы писали: «*..ka mēs abi ar Podnieka k-gu esam veikuši pret Jums neētisku rīcību (..), liekas tas varētu būt kaut kas kā zagšana, apmelošana u.tml.*»¹⁷³.

Верно, Кикуст, именно как воровство! Точнее, то, что вы оба делали, в действительности и есть воровство (и, следовательно, вы, Кикуст – вор, – как и Подниекс).



Паулис Кикуст

¹⁶⁸ https://drive.google.com/open?id=0B1Iaodfse_ordnpSU3pkbDNjNTA

¹⁶⁹ https://drive.google.com/open?id=0B1Iaodfse_oreEtqVzd6Q0FBUIE

¹⁷⁰ <http://vekordija.narod.ru/L-MUIGB.PDF> , <https://yadi.sk/i/ka-8auq23KEMSG>

¹⁷¹ <http://vekordija.narod.ru/R-LEONB.PDF> , <https://yadi.sk/i/gT7FcENG3KEPfw>

¹⁷² Русским читателям перевод этого шедевра доступен в книге LEONB (см. предыдущую сноску) на стр. 7–8.

¹⁷³ «*..что мы оба с г-ном Подниеком совершали против Вас неэтические поступки (..), кажется, это может быть что-то как воровство, клевета и т.п.*». Русский перевод всей переписки в LEONB на стр.109.

Математика отличается от, например, физики тем, что в ней отсутствует требование соответствия реальному миру. Например, когда кто-то утверждает, что эйнштейновская теория относительности правильна (или, наоборот, ошибочна), то это утверждение не может быть выведено просто из собственного ума, потому что существует внешний объект (физический мир, пространство), и этот объект таков, каков он есть, что бы ни думал утверждающий; истинность утверждений можно проверить только изучением этого внешнего объекта, но так как он до конца недоступен, то всегда остается место для споров.

Иное дело математика – в ней НЕТ внешнего и недоступного нам объекта, в ней все выводится вытекают ТОЛЬКО из собственного ума и принятых им предпосылок. Поэтому в математике никакие споры вообще невозможны: всякий спор в математике означает, что тут присутствует дурак, неспособный логически мыслить (или жулик, притворяющийся дурачком). Нельзя спорить, будет ли $2 \times 2 = 4$ или $2 \times 2 = 7$. Есть только одна истина. И если Подниекс утверждает, что $2 \times 2 = 7$ и объявляет себя проповедником вот такой, вот, религии {VISUS.31}, а Кикуст снова и снова причитает: «Ну не могу я никак понять, как это может быть $2 \times 2 = 4$ », и при этом оба выдают себя за профессоров математики, то они преступники. Общество платит им и содержит их не для того, чтобы они несли ахинею, а чтобы они преподавали истину. И если они этого не делают, то они – **воры**, укравшие Истину у студентов и у общества, и незаконно получающие свою зарплату.

В математике есть только одна истина. Могут быть приняты разные предположения (постулаты), но никакой постулат не может быть запрещен, и после принятия постулата его следствия вытекают однозначно и неотвратно.

Ваша позорная, якобы научная, но на самом деле лженаучная, деятельность, Кикуст и Подниекс, всегда заключалась в запрещении принятия неудобных вам постулатов и в отрицании следствий, вытекающих из тех или иных постулатов.

Никогда вы не мыслили как подобает мыслить математикам; вы оба не математики, а карикатуры на математиков.

Будет ли четных чисел столько же, сколько натуральных, или в два раза меньше – это постулат и только постулат, и не вытекает он ни из каких обстоятельств физического, реального мира.

Психически больной Кантор принял первый вариант постулата, и мириады дурачков от математики помчались за ним к «алефическим шкалам» и «проблемам континуума». Но с таким же успехом можно принять и второй вариант постулата, и тогда не будет ни этих «шкал», ни этих «проблем», а будет гораздо более красивый и логичный математический мир.

Никакая объективная реальность не стоит за вашим миром «теории множеств», а стоит постулат, и только постулат – «постулат Кантора», заключающийся в том, что все бесконечные процессы принимаются «равномощными».

Идиотский постулат, по которому $10^n = n$, постулат, представляющий собой просто издевательство над всем духом настоящей математики, постулат, вынесенный Кантором из койки психиатрической клиники Галльского университета, постулат, которого всерьез могут придерживаться только карикатуры на математиков – такие, как вы, Кикуст и Подниекс!

Вы, Кикуст, за все десятилетия борьбы вокруг этого вопроса не написали ни строчки по-русски – такой, вот, вы патриот Латвии и латышский националист. Но когда перед вами встала Веданская теория – концепция мирового масштаба, которая могла бы прославить Латвию, – тогда вы предали интересы и Латвии и латышей, – и предали ради чего? – ради утверждения дурацкого постулата « $10^n = n$ » и ради вашего (прямо скажем, болезненного) самолюбия и нарциссизма – лишь бы другой латыш не оказался прав!

Вы не только трус и вор, Кикуст, вы еще и предатель – предатель своей страны и своего народа.

Вы всегда были ничтожеством, Кикуст. У Валдиса Эгле в Интернете сотни книг – и своих, и изданных им и комментированных. А у вас нет ни одной. Если задать поиск в Интернете по словам «Paulis Kikusts», то обнаруживается один лишь жалкий сайтик с несколькими вашими лекциями. А если искать на русском языке по словам «Паулис Кикуст», то встречаются вообще только те места, где вас упоминал Валдис Эгле.

Но вы воображали, что можете быть судьей над Веданской теорией и десятилетиями препятствовали ей, как могли, заливая все дискуссии своей демагогией. Вот, я прилагаю здесь книгу L-VISUS, в которой два ваших письма (пункты .43 и .216) – не самые наглые и похабные

из того, что вы вообще писали, но всё равно, лишь разводящие демагогию и направляющие всё дело в русло пустой болтовни.

Возможно, вы всё ещё не понимаете, почему на вас обрушиваются эти безжалостные слова и что вам нужно было сделать, чтобы этих ударов не было. Вам нужно было признать, что канторизм есть следствие Постулата Кантора, что этот постулат может быть заменен на другой постулат и таким образом получена другая система; вы должны были это понять, признать и учитывать в своей деятельности (это и есть принцип «сравнения систем»). Вот, если бы вы и Подниекс так поступили, тогда вы были бы настоящими учеными, а не карикатурами на ученых, и тогда вам не приходилось бы с дрожащими от злобы руками проглатывать жестокие слова этого письма и терпеть публичные унижения издевательских дипломов.

Месяц назад вам был задан тестовый вопрос «*Признаете ли Вы, что можно различать две следующие точки зрения: а) четных чисел столько же, сколько натуральных; б) четных чисел в два раза меньше, чем натуральных?*». Вопрос элементарный, и ответ очевидный. Но вы решили не отвечать, потому что через этот ответ как нельзя лучше виден полный крах той позиции, которую вы так бесчестно отстаивали 36 лет, и ради которой пожертвовали и славой Латвии, и честью латышей.

Ну так получайте диплом «Труса физико-математических наук» – этот достойный венец вашей никчемной академической жизни и бездарного «научного» пути!

Марина Ипатьева

16 июня 2017 года

Приложения: L-MUIGB,¹⁷⁴ L-VISUS,¹⁷⁵ Diploma002

от: Марина Олеговна Ипатьева <marina.ipatjeva@gmail.com>

Кому: Andrejs.Cibulis@mii.lu.lv

копия: andrejs.cibulis@lu.lv

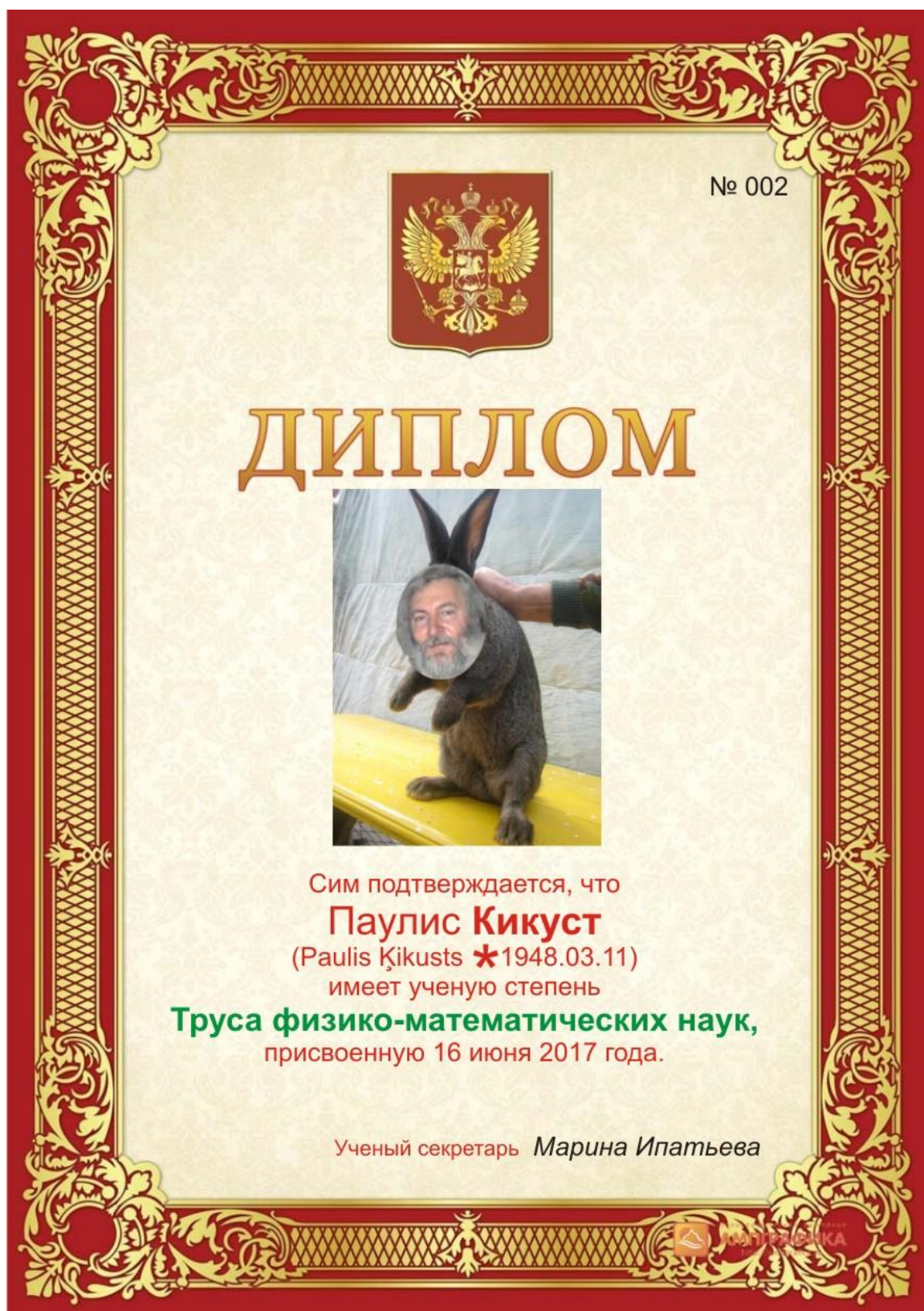
дата: 16 июня 2017 г., 0:08

тема: Fwd: Тест для математиков

отправлено через: gmail.com

¹⁷⁴ <http://vekordija.narod.ru/L-MUIGB.PDF> , <https://yadi.sk/i/ka-8auq23KEMSg>

¹⁷⁵ <http://vekordija.narod.ru/L-VISUS.PDF> , <https://yadi.sk/i/SDcUYjlw3KEMv2>



Научно-популярное издание
«Мысли об Истине»
Выпуск № 115
Сформирован 28 июля 2017 года

Все читатели приглашаются принять участие в создании альманаха МОИ и присылать свои статьи и заметки для этого издания по адресу: Marina.Olegovna@gmail.com. Если присланные материалы будут соответствовать направлению Альманаха и минимальным требованиям информативности и корректности, то они будут опубликованы в нашем издании.

Основной вид существования Альманаха МОИ – в виде PDF-файлов в Вашем компьютере. Держите все выпуски МОИ в одной папке. Скачать PDF-ы можно с разных мест в Интернете, и не важно, откуда номер скачан. В Интернете нет одной фиксированной резиденции МОИ.

Содержание

<i>Зенкин А.А.</i> Трансфинитный рай Георга Кантора	2
1. Психологический антураж проблемы.	3
2. «Над пропастью во лжи ...»	6
3. Строгое определение понятия потенциальной бесконечности (Аристотель, IV век до н.э.)	10
4. Миф о сложности ДМК-доказательства несчетности континуума.	11
5. Теорема Кантора о несчетности континуума	12
6. Мета-математическая логика ДМК с точки зрения теории множеств	14
7. Об одном фатальном дефекте «безупречной» мета-математической логики ДМК	17
8. Открытие альтернативной версии метода контр-примера	18
9. Д. Гильберт против Г. Кантора: «Изгнание из рая ...».	20
10. «Критяне всегда лжецы...» или библейский сюжет на пороге Апокалипсиса. .	24
12. Литература	28
<i>Ипатьева М.О.</i> Комментарий к последней статье Зенкина	30
§1. Статьи Зенкина	30
§2. Актуальная бесконечность	30
§3. Постулат Кантора	32
§4. Если Кантор и Гильберт были бы программистами	33
§5. Диагональный процесс	34
§6. Три уровня аргументации	35
§7. По следам Зенкина	36
§8. Парадокс Лжеца	37
§9. Парадокс Рассела	39
§10. Катастрофа математики	40
<i>Марина Ипатьева.</i> Решетняк, числа и ZFC	43
1. Преамбула	43
2. Письмо Решетняка, породившее настоящее сочинение	43
3. Некоторые моменты предыстории вопроса о числах	44
Предисловия книги «Барвайс – 2»	47
Предисловие редактора русского перевода	47
Введение	48

Глава 1. Аксиомы теории множеств.....	49
§1. Введение	49
§2. Множества и образование множеств	49
§3. Аксиомы.....	53
Марина Ипатьева. Вставка с комментариями	57
Глава 1. Аксиомы теории множеств (продолжение)	59
§4. Развитие теории множеств	59
§5. Ординалы	61
§6. Аксиома выбора	64
§7. Классы	66
§8. Новые аксиомы.....	67
Глава 2. Об аксиоме выбора.....	70
§1. Введение	70
§2. Нужна ли нам аксиома выбора?	72
§3. «Парадоксальное» разбиение шара	74
§4. Некоторые применения аксиомы выбора	75
§5. Непротиворечивость аксиомы выбора.....	78
§6. Невыводимость аксиомы выбора	79
§7. Теоремы о переносе	81
§8. Математика без аксиомы выбора	82
§9. Определимый выбор	84
§10. Аксиома детерминированности – альтернатива к аксиоме выбора	85
<i>Виктор Викторович Сухоруков. Анти-Дворкин</i>	<i>87</i>
<i>Акимов И.Ю. Счётно ли бесконечное множество вещественных чисел?.....</i>	<i>98</i>
Сопутствующая переписка.....	102
<i>Акимов И.Ю. Пятый постулат Евклида</i>	<i>105</i>
Приложение 1	110
Сопроводительное письмо	113
Ответ Марины Ипатьевой	113
Письмо И.Ю. Акимова от 26 февраля 2017 г.	115
Ответ Марины Ипатьевой	116
Наказан математик – профессор Кикуст.....	118
Содержание	123