NATURA CUPIDITATEM INGENUIT HOMINI VERI VIDENDI
Marcus Tullius Cicero
(Природа наделила человека стремлением к познанию истины)

Мысли
Об
Истине

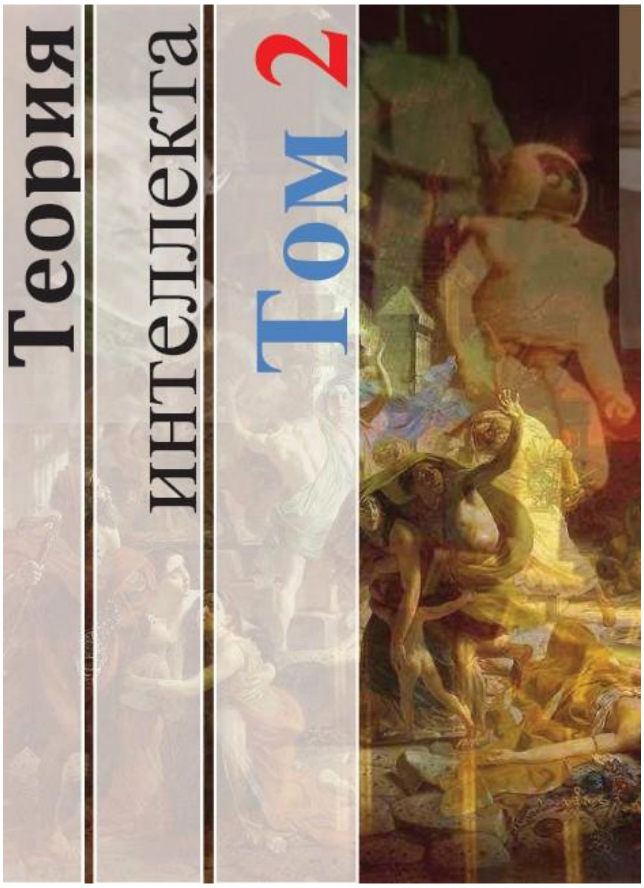
Альманах «МОИ»
Электронное издание, **ISBN 9984-688-57-7**

Альманах «Мысли об Истине» издается для борьбы с лженаукой во всех ее проявлениях и в поддержку идей, положенных в основу деятельности Комиссии РАН по борьбе с лженаукой и фальсификацией научных исследований. В альманахе публикуются различные материалы, способствующие установлению научной истины и отвержению псевдонаучных заблуждений в человеческом обществе.

Альманах издается с 8 августа 2013 года
Настоящая версия тома выпущена **2016-11-08**

© 2016 Марина Ипатьева (оформление и комментарии)

Эгле В. Переписка о Теории интеллекта



VEcordia
Извлечение R-POTI-2

Открыто: 2010.12.07 03:35
Закрыто: 2011.03.31 15:12
Версия: 2013.09.30 14:25

Дневник «VECORDIA»
ISBN 9984-9395-5-3
© Valdis Egle, 2013

Переписка о теории интеллекта, том 2
ISBN
© Валдис Эгле, 2011

Валдис Эгле
ПЕРЕПИСКА о Теории Интеллекта адресованная Комиссии РАН по борьбе с лженаукой и фальсификацией научных исследований
начата 7 июня 2010 года

Impositum
Grīziņkalns 2013

Я готов поспорить на что угодно, что
Веданская теория неверна.

Д.Ю. Манин
1 декабря 2010 года

Посвящается Дмитрию Юрьевичу Манину

§1. Технические замечания

2010.12.07 03:35

В этом томе (как и в других томах Векордии) содержатся ссылки на другие книги этого издания. Такие ссылки осуществляются при помощи связок гипертекста, например: {POTI-1,§4}[1]. Они могут вывести Вас прямо на указанное место, если Вы читаете этот текст в *Word*-е и если у Вас в той же директории (папке), где находится этот файл, имеются также и *Word*-файлы тех томов, на которые он ссылается.

Настоящая книга ссылается только на тома, выставленные на сайт http://VE-POTI.narod.ru/ (т.е. относящиеся к Дискуссии ПОТИ). На этом сайте книги стоят в формате PDF, но там имеется также архив с DOC-версиями этих же томов (с именем типа POTI-*yyyy-mm-dd*.zip)[2]. Настоятельно рекомендуется «скачать» с сайта этот архив и пользоваться ссылками гипертекста. Ссылки на номер страницы или номер сноски здесь невозможны, т.к. любая из этих книг в принципе может быть в любой момент пополнена, и тогда эти номера сдвинутся, и только ссылки гипертекста сохраняют силу всегда.

DOC-файлы настоящего издания подготовлены на *Word*-2000. Более поздние версии этой программы по идее должны быть способными адекватно отображать файлы *Word*-2000. Однако на самом деле это не всегда так. Бывают случаи, когда *Word*-2003 и *Word*-2007 переворачивают «вверх ногами» картинки, сдвигают текст по страницам и т.п. Хотя я и проверяю файлы Векордии при помощи *Word*-2007, стараясь устранить такие разночтения, но всё же они не исключены. В таких случаях эталоном правильного текста является PDF-файл.

§2. Предисловие

В конце ноября и начале декабря 2010 года состоялась краткая переписка между мной и Дмитрием Юрьевичем Маниным. Основным результатом этой переписки было то, что Дмитрий Юрьевич выразил желание поскорее увидеть, каким образом Веданская теория дает новую парадигму математике и каким образом из нее следует, что канторовская теория множеств неверна и представляет собой лженауку.

Поэтому в настоящем томе мы наиболее кратким путем отправимся именно к этим вопросам, оставляя в стороне множество других направлений, в которые изложение Веданской теории могло бы быть развито. (Коснемся этих других направлений когда-нибудь потом).

---

[1] **МОИ 2016-01-27:** Такая система ссылок действовала в рамках системы файлов «Векордия». Здесь, когда книга перенесена в систему файлов МОИ, внутренние ссылки Векордии гасятся и добавляется номер альманаха МОИ с номером страницы, если адресуемый текст тоже имеется в МОИ. Данная ссылка – это на МОИ № 41, стр.9, паранраф «Цель мероприятия».

[2] Имя содержит дату архива в формате ISO. Архив обновляется вместе с сайтом, и DOC-файлы в архиве соответствуют PDF-файлам на сайте. **МОИ 2016-01-27:** Последний из таких архивов остается доступным, пока еще существует сам сайт, но новые архивы уже не формируются.

Глава 1. Правильная парадигма математики

§3. Веданская теория и парадигмы

После публикации в 1962 году работы Томаса Куна (1922–1996) «Структура научных революций» в моду вошло слово «парадигма». Воспользуемся и мы этим словом, хотя в принципе то, о чем мы говорим, можно было бы обозначить и другими терминами, например, «система воззрений», «основные представления», «фундаментальная концепция», «система понятий», «система постулатов», «модель» и т.п.

Веданская теория не является ни математической, ни физической, ни биологической, ни нейрофизиологической, ни психологической, ни лингвистической теорией. Это теория программистская (не знаю, были ли у нее предшественницы, т.е. пытался ли кто-нибудь до меня программистскими методами решать вопросы, выходящие за пределы непосредственно компьютерного дела). Основное, что требуется для понимания Веданской теории – это способность в абстрактном виде представлять себе работу различных программ и их взаимодействие между собой и с различными (абстрактными же) структурами данных.

Веданская теория предлагает объяснение интеллекта в терминах программ. Основной ее постулат (см. {POTI-1,§6} = МОИ № 41) состоит в том, что человеческая умственная деятельность представляет собой обработку информации (о внешнем мире и о состоянии собственного организма), осуществляемую (мозговыми) программами. Но человеческий интеллект не является единственным возможным для Веданской теории – мы рассматриваем интеллект абстрактного субъекта, каковым может быть как человек, так и робот, компьютер, «инопланетянин» и т.д.

Мы рассматриваем интеллект как деятельность программ, работающих внутри этого (абстрактного) субъекта, и нашим главным методом исследования является проектирование программ (см. {POTI-1,§7}, {POTI-1,§14} = МОИ № 41).То есть, мы решаем «чисто программистскую» задачу: требуется, чтобы субъект делал то-то и то-то; – КАКИМИ должны быть программы, чтобы они делали именно это?

Таким образом, мы, с одной стороны, (как будто) проектируем искусственный интеллект (правда, без цели его практической реализации, а только с целью обсудить собственно проект), и, с другой стороны, одновременно объясняем, как это должно быть устроено у человека (потому что по-другому строить-то и невозможно, чтобы добиться требуемого результата).

Но, получив этим способом принципиальное объяснение работы интеллекта (любого интеллекта – человеческого, искусственного, инопланетного) мы тут же приходим в соприкосновение с теми отраслями науки, в которых работа интеллекта глубоко задействована. Первой из таких областей является математика – наука, в которой «вообще нет ничего другого, кроме продуктов интеллекта». Второй такой областью является психология – сам предмет, изучаемый которой, представляет собой «умственную деятельность» человека. Далее следуют логика, лингвистика, этика – опять же области, тесно связанные с деятельностью интеллекта.

Во всех этих областях науки, возникших задолго до появления Веданской теории (т.е. программистской теории интеллекта) давно установились свои «парадигмы» (т.е. системы взглядов и методов), абсолютно не учитывающие представление о деятельности интеллекта как о работе программ. Поэтому парадигма Веданской теории естественно входит в противоречие с парадигмами всех этих наук. (Ср. {POTI-1,Minimizacija} = МОИ № 41, стр.12)

В данном изложении мы сейчас могли бы направиться к любой из этих отраслей, но, так как у нас имеется «заказ» на математику, то к ней и пойдем, разбирая предварительные вещи (т.е. устройство и работу собственно интеллекта) лишь в той мере, в какой это необходимо для понимания противостояния парадигм Традиционной математики (обозначим ее «парадигма *T*») и Веданской теории (обозначим ее «парадигма *B*»).

§4. Начало математики: аксиомы или программы?

Парадигма *T* общеизвестна: математика вытекает из аксиом; она представляет собой совокупность высказываний-теорем; она «самодостаточна» и является «замкнутым в себе микрокосмосом»; некоторые области математики имеют применение к физическому миру; другие не имеют, но «математике от этого не тепло, не холодно» – ну, и так далее в таком же духе.

Для парадигмы *B* (Веданской теории), когда она подходит и приближается к математике,[3] первым вопросом является такой: КАКИЕ программы должны быть встроены в голову субъекта (человека, робота, инопланетянина и т.д.), чтобы он получил «понятие» о математических вещах, стал о них думать и развивать математику; – как эти программы должны быть устроены, как работать, как взаимодействовать, какие структуры данных строить и как с ними обращаться?

Любому сколь-нибудь опытному программисту очевидно с первого взгляда, что этими программами ну НИКАК не могут быть программы, оперирующие такими вещами как «аксиома», «теорема», «доказательство» – во всяком случае в начале математического пути субъекта. Субъект сперва должен научиться сосчитать, сколько бананов лежат перед ним (особенно ему это интересно, если он – обезьяна), и научиться начертить на песке прямую линию или круг.

Стало быть, вот с ЭТИХ программ и начинается математика: с программ, позволяющих субъекту определить, сколько элементов имеется в том или ином множестве предметов, и с программ, позволяющих ему рисовать «фигуры». Из первых программ вырастет арифметика (а далее: алгебра и теория чисел), а из вторых – геометрия, сначала евклидовая, а потом и не только...

Эти первые программы математики потом будут обрастать всё новыми и новыми, и новыми программами, создавая то гигантское нагромождение всевозможных программ, которое мы сегодня называем математикой. Однако не будем спешить к отдаленным уголкам этой громадины, а сначала обратим пристальное внимание на самые первые «математические программы», изучим и хорошо усвоим их сущность и свойства.

§5. Как субъект доходит до чисел?

Итак: как субъект может определить, сколько элементов в интересующем его множестве? Считать? Верно – считать, но что делать с результатом «счета», куда его девать? Вот он перебрал все элементы: «тюк, тюк, тюк, тюк, тюк!» (Считать «раз, два, три...» он не может, потому что понятия числа у него еще нет – оно только еще должно быть создано).

Очевидно, что выходом из положения является классификация множеств по количеству элементов в них. То есть, субъект все множества с одним элементом относит к одному таксону классификации, все множества с двумя элементами – к другому таксону и т.д., констатируя, что множества одного таксона «в чем-то похожи» между собой. Если субъект – это первобытный человек, то он и раньше занимался классификацией множеств: на съедобные и несъедобные, на опасные и безвредные, на черные и белые, на мужского пола и женского и т.д. Так что сама по себе идея классификации множеств не нова для него; нов только признак классификации. (Ср. {PENRS2,Poljza} = МОИ № 17, стр.141, сноска 197).

Заимев такую программу классификации множеств по количеству элементов в них, и применяя эту программу на практике, субъект вскоре почувствует необходимость создаваемые этой программой таксоны как-то обозначить. И вот тогда он вводит слова: «один», «два», «три», «четыре» и т.д. Так он дошел до (натуральных) чисел.

Так что же такое это (натуральное) число, например, «три»? Множество всех множеств с тремя элементами, как полагал Фреге? {PENRO2,Frege = МОИ № 14, стр.95} Но, во-первых, нашему субъекту нет дела до каких-то там «множеств всех множеств»; ему бы лишь овец в стаде посчитать, да количество воинов в боевой дружине. И, во-вторых, фигурировала-то у нас тут просто программа классификации в голове субъекта, а не какие-то необозримые «множества», охватывающие всю Вселенную и еще дальше. Эта программа и создала у субъекта «понятие числа»; она и есть тот реальный объект, от которого числа возникли. Это ЕЕ продукты (таксоны) субъект называет «один», «два», «три»...

Эта программа (классификации множеств по количеству элементов в них), порождающая натуральные числа в качестве своих таксонов, в Веданской теории везде называется «программой N»[4] (в отличие, например, от программы R, классифицирующей пары множеств и порождающей «рациональные» числа, и еще других программ, порождающих другие числа). Разумеется, в

---

[3] Один из путей виден в Предисловии к математическим главам Пенроуза {PENRO2 = МОИ № 14, стр.93}.

[4] От латинского *Numerus* (количество, член, часть). Или можно считать, что от *Naturalis* – естественный.

жизни (когда математика зарождалась) всё обстояло немножко сложнее и запутаннее (ср. {NATUR3,1711 = МОИ № 36, стр.5}), но итоговая сущность состоит именно в этом: числа есть таксоны классификации множеств или пар множеств по признакам количества и ориентации, и таксоны эти неразрывно связаны с программами (мозговыми в случае человека), позволяющими эту классификацию осуществить – и отнести данный объект к тому или иному таксону этой классификации.

§6. Субъект доходит до комплексных чисел

Наш субъект пришел к понятию числа после того, как в его голове (путем самопрограммирования) появилась программа N, способная отнести каждое конкретное множество к тому или иному таксону классификации множеств по количеству элементов в нем. Но эта программа способна создать лишь натуральные числа. Алгоритм этой программы учитывает только наличие элемента – и больше ничего.

Гораздо бо́льшие возможности открывает другая программа – называемая в Веданской теории программой R[5] и классифицирующая не собственно множества, а пары множеств с точки зрения их соотношения. В бытовых терминах это будет означать: интересоваться не количеством элементов (например: зернышек), а выбрать единицу измерения (например: ведро) и интересоваться, сколько этих единиц входит в измеряемое множество (например: в куче зерна).

Если алгоритм программы R учитывает только количественное соотношение меры и измеряемого множества, то таксоны классификационной программы R будут представлять собой то, что в парадигме *T* называется «положительными рациональными числами», а в Веданской теории было названо метрическими числами {NATUR3.1731 = МОИ № 36, стр.6}. Однако «соотношение» меры и измеряемого может включать не только количественный аспект, но также и взаимную ориентацию обоих множеств.

Если алгоритм программы R учитывает еще и ориентацию типа «туда–сюда» (линейную ориентацию), то каждый ее таксон распадается на два таксона: «мера и измеряемое ориентированы одинаково» и «мера и измеряемое ориентированы противоположно». Например, если алгоритм метрического измерения давал результат 3½, то алгоритм измерения с линейной ориентацией может давать два результата: +3½ и –3½ (в традиционных обозначениях). Это дает субъекту уже положительные и отрицательные рациональные числа.

Но если алгоритм программы R учитывает взаимную ориентацию меры и измеряемого не на прямой, а на плоскости (планарную ориентацию), то каждый метрический ее таксон распадается на бесконечное количество таксонов ориентации под разными углами. Это дает субъекту уже то, что в парадигме *T* называется комплексными числами (пока, правда, еще только с рациональными составляющими).

Если программа R применяется только при измерении реальных физических множеств, то к иррациональным числам она не придет. Но она может быть применена субъектом для измерения абстрактных, «воображаемых» множеств: например, в качестве меры он берет диаметр круга и измеряет окружность; или – в качестве меры берет сторону квадрата и измеряет диагональ. В реальном физическом измерении он правильный результат не получит, но он может вычислять этот результат окольными путями с любой точностью. Так он получает «иррациональные» таксоны классификации по алгоритму программы R.

Таким образом, при помощи программ классификации множеств и (главным образом) пар множеств по признакам количества и взаимной ориентации субъект создал у себя «понятие» о всех числах вплоть до «комплексных» включительно. В случае необходимости можно идти и дальше по этому пути, например, классифицировать пары множеств по ориентации не только на плоскости, но и в пространстве. Тогда получим «комплексные» числа не из двух, а из трех составляющих; но мы знаем, что они уже не будут обладать той завершенностью и красотой, какой обладают комплексные числа. (Видимо, классификация пар множеств по двум признакам: количественное соотношение плюс ориентация в случае ротации – дает самую совершенную систему чисел; ротация всё же нечто особое и фундаментальное в нашем мире).

В реальной жизни (в истории математики) люди всё-таки приходили ко всем этим числам гораздо более запутанными и по-всякому петляющими путями: чего стоят одни только названия «иррациональные» (неразумные) и «имагинарные» (воображаемые, мнимые) числа! А ведь речь идет просто о таксонах классификации пар множеств!

---

[5] От латинского *Relatio* (отнести – от одного к другому).

§7. Первичные и вторичные операции и их изоморфизм

Когда наш субъект просто считает овец в своем стаде или ведрами измеряет зерна урожая (а также когда ученый в физическом опыте измеряет длительность процесса или даже спин частицы), они имеют дело с множествами реального, внешнего мира (правда, через отображения их в мозге субъекта). Такие прямые измерения реальных множеств (и, соответственно, соотнесение этих множеств с таксонами классификаций при помощи программ N или R) в Веданской теории называются первичными (примарными) операциями с множествами (и с числами).

Типичный пример первичных действий с числами – это «визуализация», выполненная Пенроузом в его примере с равенством 3 × 5 = 5 × 3 {PENRS1.Matrica = МОИ № 17, стр.56}. Там субъект пускает так и этак программу классификации N и убеждается, что результат будет один – считать ли сначала по столбцам, или сначала по строкам.

Когда субъект выполняет первичные операции с множествами, в его голове работают программы. Помимо «математических программ» (таких как N или R) там будут задействовано и множество других программ; например, чтобы мерить кучу зерна ведрами, нужны будут и программы, отдающие приказы мышцам рук поднимать ведро, пересыпать зерно и т.д. Но от этих «посторонних» программ мы абстрагируемся и интересуемся только «математическими» программами, присутствующими в этом процессе.

Однако вскоре наш субъект убеждается, что одними первичными операциями с множествами и числами не очень-то многого достигнешь. Поэтому он вводит сначала словесные, а потом и графические обозначения для чисел (т.е. для таксонов классификаций N и R): «1, 2, 3, ...; 1/2, 1/3, 2/3, ...» и т.д. Такие обозначения в Веданской теории называются нотатами (сначала это просто обозначения чисел, потом уже операций с ними, таких как «+», «–», «×», «^{2}», ..., потом и «функций»: «log», «sin» и т.д.).

Теперь субъект, вместо того, чтобы выполнять (первичные) операции с множествами и таксонами классификации (числами), начинает выполнять операции с нотатами. Такие операции в Веданской теории называются вторичными (секундарными).

Чтобы выполнять вторичные операции, в голове субъекта опять должны быть соответствующие программы – но это уже не те программы, которые работали в первичных операциях. Здесь опять будут присутствовать «посторонние» программы (например, программы для того, чтобы поднять карандаш и двигать им по бумаге). Но опять мы от этих «посторонних» программ отвлекаемся и рассматриваем только те программы, которые осуществляют «собственно математику».

Первичные программы в пенроузовском примере {PENRS1.Matrica = МОИ № 17, стр.56} оперировали с черными кружочками на бумаге или на экране, по-разному считали их и соотносили с таксонами классификаций. А вторичные программы оперируют со значками типа 3 × 5 и 5 × 3, и устанавливают, что тут надо дальше написать «= 15».

Но как они «знают», что надо написать именно «3 × 5 = 15», а не, скажем, «3 × 5 = швабра» или «3 × 5 → ☺»? А «знают» они это из того, что в первичных операциях, если найти, что множество строк в пенроузовской матрице относится к таксону «3», а множество колонок к таксону «5», то общее множество кружочков будет относиться к таксону «15».

Вся система нотат для вторичных операций построена так, чтобы она соответствовала первичным операциям с множествами и числами. Такое соответствие (между первичными операциями и вторичными операциями, и между их результатами) в Веданской теории называется изоморфизмом операций. Именно (и только!) благодаря этому изоморфизму большие куски первичных операций можно на самом деле не проводить, а заменить их вторичными операциями (в быту называемыми «вычислениями»).

Чем дальше развивалась математика, тем более из виду терялись первичные операции и всё в большей степени «вся математика» заполнялась вторичными операциями. Для вторичных операций (вычислений) было придумано огромное количество всевозможных алгоритмов, начиная от простого школьного «умножения в столбик» и «деления от уголка» до разных там логарифмов, дифференциалов и векторных пространств. (А по этим алгоритмам создавались конкретные – мозговые в случае людей – программы, когда эти вычисления надо было на самом деле выполнять).

Вся громадина математического здания заполнена такими вот вторичными алгоритмами; каждая формула кодирует алгоритм вычисления; алгоритмы (способные превратиться в мозговые программы) громоздятся один на другом, всё выше и выше, и выше; один берет исходящий результат второго и работает с ним дальше, а третий еще дальше; потенциальные продукты

{POTI-1.PotProduct = МОИ № 41, стр.26} этих алгоритмов составляют всё разнообразие математических «абстрактных объектов» и «структур».

§8. Критерий научности и принадлежности к математике

Но условием практической применимости всех этих построений по-прежнему остается одно: изоморфизм между первичными операциями над множествами и числами с одной стороны – и алгоритмами и «структурами» математики – с другой.

Если, например, Исаак Ньютон открывает, что два тела A и B притягивают друг друга с силой $F = Gm_A m_B/r^2$, то фактически он обнаруживает изоморфизм между двумя вещами. С одной стороны мы имеем множества реального мира (в данном случае: тела A и B), что-то, связанное с которыми, можно измерить первичными операциями (например, астрономическими наблюдениями). С другой стороны мы имеем чисто вычислительный алгоритм $F = Gm_A m_B/r^2$. В данном случае обе стороны входят в более сложные системы наблюдений с одной стороны и вычислений с другой, поэтому изоморфизм операций не так отчетливо виден, как в случае с матрицей Пенроуза {PENRS1.Matrica = МОИ № 17, стр.56}. Но, тем не менее, он имеет ту же природу, что и при пенроузовской матрице: если мерить перемещения тел так и так, то получим то, что соответствует вычислению такому-то. Поэтому непосредственное измерение можно заменить вычислением.

Если математик решает какую-нибудь «физическую задачу» (ну, например там, колебания стрнуны или определение спина частицы и т.д.), то его задача состоит в том, чтобы найти (вторичный, вычислительный) алгоритм (или их группу), который был бы изоморфен поведению реальных объектов (множеств) и, тем самым, первичным операциям их измерения (чтобы эти непосредственные измерения можно было не проводить, а заменить вторичными). В этой ситуации сперва имеются физические явления и первичный аппарат их измерения, а надо найти изоморфный ему вторичный аппарат вычислений.

Но математики (и люди вообще) могут придумывать и такие (вторичные) алгоритмы (и тем самым «структуры» их потенциальных продуктов), про которых они заранее не знают – есть ли в реальном мире множества, изоморфные этим алгоритмам (и этим «структурам») – или нет. В литературе можно найти много примеров, когда какой-нибудь математический (т.е. вторичный) «аппарат» был создан «просто так», а потом – через многие годы – оказалось, что он пригоден для описания таких-то физических явлений. Здесь сначала был создан вторичный аппарат, а потом найден изоморфный ему первичный.

Некоторые придуманные таким способом «аппараты» так и не находят себе «применения», т.е. не обнаруживаются первичные явления, которым они были бы изоморфны. Тем не менее они остаются интересными сами по себе и тоже составляют часть науки математики. (Например, вряд ли сейчас имеет практическое применение теорема Гудстейна, приводимая Пенроузом в {PENRO1.Goodstein = МОИ № 14, стр.9}). В этом смысле математика «самодостаточна».

Но в нашей сегодняшней реальности (в парадигме T) утрачено понимание того, до какого предела можно и после какого предела уже нельзя придумывать «всё, что угодно», чтобы это «что угодно» считалось частью (всеми уважаемой) науки математики (и тем самым оплачивалось обществом). Так, если я сейчас придумаю, например, «множество одноглазых циклопов» и начну описывать его свойства (аксиоматически!), то будет ли это математикой? А если это придумает университетский профессор математики – тогда будет?

Веданская теория, разъяснив вообще сущность математики, дает и четкий критерий для установления той границы, до которой можно придумывать «всё, что угодно», оставаясь в рамках науки математики, а за которой измышления уже представляют собой лженауку, сознательно или неосознанно пытающуюся подделаться под математику, урвать частицу ее почета и часть выдаваемых ей обществом финансовых средств.

Математика началась с мозговых программ, при помощи которых люди классифицировали множества внешнего мира и их соотношения по количеству и по ориентации, и с программ, при помощи которых они могли создавать фигуры и тела. Потом центр тяжести математики был перенесен с этих первичных программ на вторичные программы вычислений и доказательств. Но все вторичные аппараты имели ценность лишь постольку, поскольку они сохраняли изоморфизм с первичными – уже установленный или лишь потенциально возможный.

Если же какое-то построение в принципе не может быть изоморфно никаким первичным явлениям математики, не может иметь никакой связи с ее первичными программами, а существует оторванно от них и само по себе – как мое «множество одноглазых циклопов» –, то это не относится к математике и, если оно маскируется под математику, то представляет собой лжематематику.

Ниже я покажу, что учение Кантора о бесконечных множествах не имеет никакой связи с первичными программами математики, принципиально не может быть изоморфно никаким первичным явлениям, существует оторванно от них само по себе, тем самым принципиально не может иметь никакого практического применения, даже потенциального, и поэтому является типичной лженаукой.

Глава 2. Канторовская теория множеств

§9. Три вида бесконечностей

Но, прежде чем браться непосредственно за учение Кантора, необходимо разобраться с понятием бесконечности.

Наш субъект, создавший у себя в голове программу N, при помощи которой он получает натуральные числа, вскоре обнаруживает, что таксонов классификации (т.е. чисел) может быть всё больше и больше, и что программа N не налагает никаких ограничений на их количество. Так он приходит к «понятию бесконечности». (Бесконечность он получает также и от других своих программ, например, программа проведения прямой линии тоже не налагает никаких ограничений, где она должна закончить свою работу: такие ограничения могут быть только внешними, но не вытекающими из самой программы).

Итак, бесконечность субъект получает от различных программ, которые потенциально могут работать «без конца». Первоначально это потенциальная бесконечность. Но, чтобы понять, как он получает актуальную бесконечность, нам придется несколько углубиться в его компьютерно-мозговую деятельность.

Когда наш субъект смотрит на свое стадо овец и видит его, ситуация такова, как она схематически изображена на Рис.1. С одной стороны, в реальном мире имеется множество объектов (стадо: овцы и бараны), а, с другой стороны, во «внутреннем мире» субъекта имеется его «отражение» (как сказали бы философы «диалектического материализма» времен нашей юности). В Веданской теории объекты первого типа называются реалиями, а объекты второго типа – номиналиями. Номиналия – это внутрикомпьютерная структура, соответствующая объекту, существующему (или предполагаемому существующим) во вне компьютера.

Рис.1. Реалии и номиналии – стартовая позиция понятия множества

Не надо представлять номиналию примитивным образованием. Это – абстрактное обозначение для всей информации, имеющейся у субъекта о реалии; она может быть дискретной, дистрибутивной т.е. распределенной по разным местам памяти субъекта; на основе этой информации субъект делает различные свои выводы о реалии.

Помимо номиналий, в компьютере (мозге) субъекта имеются различные программы для осуществления им различных действий (и путем самопрограммирования создаются всё новые, когда он «намеревается» что-то сделать). Допустим, он намеревается зарезать одного барана и сделать из него бичбармак. Само появление этого намерения уже есть начало процесса самопрограммирования для осуществления этого мероприятия; «намерение» существует внутри его компьютера как верхний (самый общий) узел программы осуществления этого действия, хотя низшие уровни (более детальные программы более конкретных движений еще не спрограммированы) (ср. {PENRO5.Bank = МОИ № 16, стр.65, сноска 57}).

Одним из самых существенных элементов процесса самопрограммирования является эмуляция выполнения программы до ее реального выполнения. Схематически она изображена на Рис.2. Эмуляция состоит в том, что у субъекта имеется программа *A* (допустим: зарезать барана и сделать бичбармак), и имеется другая программа *B*, которая берет программу *A* в качестве исходных данных и строит ее потенциальный результат или, как обычно говорится в Веданской теории, потенциальный продукт. (В Веданской теории такое действие называется бокоанализом).

Рис.2. Реалии и номиналии потенциального продукта программы – абстрактного множества (ср. также {PENRO2.VE2 = МОИ № 14, стр.13})

Этот потенциальный продукт (программы *A*) программа *B* строит в виде номиналии nA (т.е. опять же структуры данных) в компьютере субъекта. С точки зрения самого компьютера эта номиналия не отличается принципиально от номиналии из Рис.1 – это одинаковым образом просто структура данных о каком-то объекте вне компьютера. Эта номиналия (с точки зрения компьютера) соответствует своей реалии rA – только теперь эта реалия не материально существующая, а «будущая», потенциальная.

Такая эмуляция программ перед их выполнением, построение номиналий их потенциальных результатов для оценки их и для принятия решения о том, выполнять или не выполнять на самом деле программу *A*, – это средство абсолютно необходимое для сколь-нибудь развитого самопрограммирования. Так, если у нашего субъекта появилось бы «намерение» (т.е. зачаток программы *C*), состоящее в том, чтобы зарезать не барана, а соседа, и забрать его овец, то номиналия nC потенциального результата программы *C* содержала бы не только информацию об удвоенном собственном стаде, но и о том, как самого нашего субъекта потом повесят на ветке дерева. Поэтому он, скорее всего, не станет выполнять программу *C*.

Таким образом, аппарат этот – бокоанализ или эмуляция одной программой выполнения другой программы и построение номиналий ее потенциальных результатов – зародился миллионы лет назад и отнюдь не является специфически математическим. Но он играет чрезвычайно важную роль в математике.

Как программа N (создающая таксоны-числа), так и программа L (рисующая на песке прямую линию) может быть подвергнута (и подвергается) эмуляции программой *B*, и та строит (в компьютере субъекта) соответственно номиналии nN и nL. А с точки зрения компьютера субъекта этим номиналиям «во внешнем мире» соответствуют реалии rN и rL – результаты выполнения программ N и L «до конца» (Рис.3).

Рис.3. Реалии и номиналии актуально бесконечного множества чисел N и актуально бесконечной прямой L

Так субъект получил актуальную бесконечность. У него (внутри компьютера) имеются номиналии nN и nL – в принципе такие же структуры данных, как и номиналия на Рис.1, – а во «внешнем мире» – реалии rN и rL: в принципе такие же объекты, как и стадо овец – реалия из Рис.1.

И реалия rN представляет собой бесконечное множество натуральных чисел, а реалия rL – бесконечную прямую линию. Причем это не потенциальная возможность, когда программы N и L еще работают и могут работать всё дальше и дальше. Нет, – с точки зрения эмулятора *B* они уже отработали до конца – всё! – их работа завершилась, все таксоны множества rN и все точки линии rL уже созданы и существуют одновременно!

Однако то, КАКОЙ программой создавались эти актуально бесконечные множества, оставляет отпечаток на их сущность и их структуру. Это будет очень важно для нас при разбирательстве с тем, что натворил Кантор.

Теперь наш субъект имеет уже два типа бесконечностей: потенциальную бесконечность (когда создающие ее программы еще работают, но могут работать всё дальше и дальше) и актуальную бесконечность (когда бесконечно работающие программы уже закончили работу – с точки зрения компьютера субъекта, поскольку у него уже имеются готовые номиналии объектов, строящихся этими бесконечными программами – а номиналиям, как считает компьютер, соответствуют реалии во «внешнем мире»).

Но возможности субъекта в создании бесконечностей этим не исчерпываются. Он может построить номиналию, скажем, nW (и, как обычно, считать, что та соответствует реалии rW «во внешнем мире») – построить каким-то способом, не имеющим никакого отношения ни к чему предыдущему. Номиналия построена, существование объекта объявлено, а свойства, которыми объект обладает, просто объявляются субъектом – например, в виде аксиом. Тогда можно в аксиомах объявить, что объект rW тоже бесконечен и вообще наделить его различными свойствами.

Рис.4. Реалия и номиналия аксиоматически бесконечного множества. Номиналию nW построила программа C, но НЕ путем бокоанализа какой-то другой программы. Свойства реалии rW не вытекают из какой-то программы, как это было на Рис.3, а просто постулированы из каких-то других соображений

Но эта бесконечность будет другого вида, чем предыдущие две, и в Веданской теории она называется аксиоматической бесконечностью. Парадигма *T* не различает актуальную и аксиоматическую бесконечности, что создает благоприятную почву для путаницы, неточных, расплывчатых рассуждений и для ошибочных выводов.

При аксиоматической бесконечности реалия rW обладает такими свойствами, какие постулировал аппарат, создавший ее номиналию (на Рис.4 обозначен как «Программа *C*»). При актуальной бесконечности же реалии (rN, rL и др.) обладают такими свойствами, какие вытекают из алгоритма соответствующей порождающей программы (N, L и др.), над которой проводился бокоанализ и потенциальным продуктом которой данное множество является. Это тот предел, к которому стремится продукт n-го шага порождающей программы, когда $n \to \infty$.

Это является отличительным признаком актуальной и аксиоматической бесконечности.

Отличительным же признаком потенциальной и актуальной бесконечности является то, что при потенциальной бесконечности программа работает, процесс идет, и при этом может продолжаться (потенциально) бесконечно. А при актуальной бесконечности программа не работает; она считается уже отработавшей, и все ее продукты уже построенными.

§10. Два канторовских процесса

2011.01.21 23:20 пятница

Теперь мы обладаем минимально достаточной системой понятий, чтобы приступить к анализу оснований канторовской теории множеств.

Итак Георг Кантор ввел понятие «взаимно-однозначного соответствия» (с которого всё и началось). Что же это такое – это «установление 1–1 соответствия»? Очевидно, что это процесс – даже по представлениям самого Кантора и традиционной математики. Кто же осуществляет этот процесс? Ну, разумеется, это мозговая программа. Иными словами, Кантор придумал и пустил в обиход определенный алгоритм мозга, который может работать и над конечными множествами, но для всех (и для нас тоже) главный интерес представляет случай, когда этот алгоритм (а назовем его, давайте, *C*)[6] работает над бесконечными множествами.

Но над какими бесконечными? Ясно, что потенциальная бесконечность здесь отпадает, но у нас всё равно остаются еще два вида бесконечностей: актуальная и аксиоматическая. Так как ни сам Кантор, ни его последователи эти два вида бесконечностей не различают и поэтому не указали нам, о котором виде идет речь, то нам не остается ничего другого, как рассмотреть оба варианта: что будет, если Программу (процесс) *C* применить к аксиоматической бесконечности и что если к актуальной.

Кантор придумал еще и другой процесс (который даже в традиционной математике так открыто и называется: «процесс») – это «диагональный процесс» (и, соответственно, его осуществляет мозговая программа или алгоритм – назовем его, давайте, *D*).

Итак, нам предстоит исследовать действия двух процессов (алгоритмов, программ) *C* и *D* и их результаты, если эти программы воздействуют на актуально и аксиоматически бесконечные множества.

§11. Канторовские процессы при актуальной бесконечности

2011.01.22 16:42 суббота

Актуальная бесконечность, согласно данному в §9 определению, порождается какой-нибудь программой P и представляет собой предел, к которому стремилась программа P в своей бесконечной работе и который достигла, когда эта бесконечная работа завершилась. (Физически, конечно, она не выполнялась, а ее результаты были построены бокоанализом).

При актуальной бесконечности имеются три фактора, не учтенные Кантором (и его современными последователями), и эти три фактора делают всё построение Кантора логически несостоятельным.

§11.1. **Первый фактор**. Диагональный процесс *D* не охватывает всю матрицу.

Рассмотрим классический пример, бесчисленное количество раз приводимый в литературе и приведенный также Пенроузом в {PENRO2.Diagonal1 = МОИ № 14, стр.109}: проведение диагонального процесса над действительными числами в интервале от 0 до 1. Только перейдем от десятичного представления чисел к двоичному – исключительно для того, чтобы рисуемые нами матрицы получались короче. (Ясно, что двоичное представление логически эквивалентно десятичному).

Все «числа»[7] этого интервала создаются некоторой программой *A*, идущей к бесконечности сразу в двух направлениях: «вправо» и «вниз». На первом шаге она создает две строки с одной цифрой за запятой:

0,0
0,1

На втором шаге четыре строки:

0,00
0,01
0,10
0,11

На третьем шаге восемь строк:

0,000
0,001
0,010
0,011

[6] От слов: Cantor, Соответствие и Correspondence.

[7] В кавычки ставлю потому, что на самом деле речь идет не о числах, а о нотатах; см. {PENRO2.Chislo_i_notata}.

0,100
0,101
0,110
0,111

И так далее.

Очевидно, что (1) матрица длиной «вправо» в *n* знаков за запятой будет содержать ВСЕ возможные комбинации цифр этой длины; и (2), что при этой длине строки *n* количество строк будет 2^n и всегда $2^n > n$.

Очевидно также, что при $n \to \infty$ ничего здесь не изменится; пределом будет являться актуально бесконечная матрица, в которой, однако, бесконечность «вправо» намного меньше, чем бесконечность «вниз». (По правилу Лопиталя

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{(n)'}{(2^n)'} = \frac{1}{2^n \ln(2)} = 0$$

и, значит, бесконечность «вниз» бесконечно раз больше, чем «вправо»).

Поэтому диагональный процесс не охватит всю матрицу; построенный по нему элемент содержится в матрице, но только в той ее части, которую диагональный процесс не охватил. Так, например, диагональный процесс, проведенный после третьего шага программы *A*, будет выглядеть так:

0,**0**00
0,0**0**1
0,01**0**
0,011
0,100
0,101
0,110
0,**111**

Красным помечены измененные диагональным процессом цифры; этот процесс создает элемент 0,111 – но он в списке имеется (и помечен зеленым). В случае бесконечного *n* ситуация будет аналогичной.

§11.2. **Второй фактор**. Не сохраняется смысл соответствия.

Рассмотрим другой часто приводимый пример: установление взаимно-однозначного соответствия между натуральными числами и четными числами:

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	...
2,	4,	6,	8,	10,	12,	14,	16,	...

Если мы имеем дело с актуальными (а не аксиоматическими!) бесконечностями, то как множество «натуральных чисел», так и множество «четных чисел», и установленное соответствие являются результатами (закончившихся) бесконечных процессов, осуществленных тремя программами, положим N, P и C (N, как и прежде, создает «натуральные числа»; C, как и прежде, устанавливает взаимно-однозначное соответствие, а P – программа, порождающая четные числа).

Здесь мы имеем дело с продукцией трех (мозговых) программ, но теперь нас интересует более точно, каким должен быть характер взаимодействия этих программ, чтобы можно было бы сказать, что «взаимно-однозначное соответствие» между продуктами программ N и P установлено процессом C?

Предположим сначала, что N и P взаимодействуют так, что N отрабатывает сначала, а P идет ей вслед и из ее продуктов отбирает четные числа. Тогда ряды их продуктов будут выглядеть так:

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	...
2,	4,	6,	8,	...				

В этом случае второй ряд будет вдвое короче первого, потому что программа P зависит от программы N, работает только с уже построенными ее продуктами и не может ее опередить, создавая что-то такое, что N еще не построила. Такой тип взаимодействия программ в Веданской теории называется зависимой генерацией. Очевидно, что программа C установить взаимно-однозначное соответствие между продуктами N и P не сможет ни после какого *n*-го шага программы N – ни конечного, ни бесконечного. При зависимой генерации 1–1 соответствия между натуральными числами и четными числами не существует.

Теперь пусть программа P работает сама по себе – независимо от программы N; просто создает бесконечный ряд:

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ...

Такой тип взаимодействия программ в Веданской теории называется независимой генерацией. Очевидно, что теперь взаимно-однозначное соответствие между продуктами N и P установить МОЖНО. Итак, запомним, что 1–1 соответствие действует ТОЛЬКО при независимой генерации; независимая генерация является определяющей предпосылкой этого соответствия.

А теперь рассмотрим «золотую теорему» канторовской теории множеств, которую я в свое время переписал из учебника академика Александрова[8] по теории множеств и разбор которой 30 лет тому назад, в 1981 году, предложил латвийским математикам {TRANS1.414 = МОИ № 37, стр.54}. (Ни один латвийский математик так и не смог ответить мне абсолютно ничего; полагаю, они не понимали ни доказательство Кантора, ни текст Александрова, ни мой разбор).

Теорема. Пусть X и Y – два произвольных непустых множества, удовлетворяющих тому единственному условию, чтобы Y состояло более чем из одного элемента. Множество всех различных отображений множества X в множество Y имеет мощность большую, чем мощность множества X.

Доказательство. Обозначим через Y^X множество всех отображений. Мы должны доказать:

1) Существует 1–1 отображение X на подмножество Y^X.

2) Не существует 1–1 отображения X на всё Y^X.

1) Выберем в Y два различных y' и y'' и для каждого x_0 из X построим отображение fx_0 так: образ данного x_0 есть $fx_0\ (x_0) = y'$, а образ всякого x, отличного от x_0, есть $fx_0(x) = y''$. Различным элементам x_1, x_2 соответствуют различные отображения:

$fx_1\ (x_1) = y'$,

$fx_2\ (x_1) = y''$.

Установлено 1–1 соответствие между X и частью Y^X.

2) Предположим, что существует 1–1 соответствие между X и Y^X. Обозначим через $f^{\,\xi}$ тот элемент Y^X, который в силу этого соответствия отвечает элементу ξ из X.

Рассмотрим произвольный ξ из X. Образ этого элемента при отображении f^{ξ} есть элемент $f^{\xi}(\xi)$ из Y. Определим теперь $f\,(\xi)$ положив $f\,(\xi) = \eta$, где η – произвольный элемент Y, выбранный под единственным условием, чтобы он был отличен от $f^{\xi}(\xi)$.

Построенное таким образом отображение f отлично от всех отображений $f^{\,\xi}$. Если бы f совпадало с некоторым определённым $f^{\,\xi}$, то для элемента ξ из X мы имели бы $f(\xi) = f^{\xi}(\xi)$, вопреки определению отображения f.

Теорема этим доказана.

Как и в 1981 году {TRANS1.426 = МОИ № 37, стр.56}, для детального разбирательства возьмем наиболее простой возможный пример. Множество Y по условию теоремы должно состоять «более чем из одного элемента»; установим, что оно состоит из двух элементов a и b. А с множеством X будем экспериментировать, полагая, что оно состоит из ряда натуральных чисел различной длины. Сначала положим эту длину $n = 4$. В таблице 1 ниже изображено множество Y^X при этих установках. (А рядом для сравнения множество XY «декартова произведения» X на

[8] Александров П.С. «Введение в теорию множеств и общую топологию». Наука, Москва, 1977.

Y. Согласно «официальной» теории множеств мощность множества XY такая же, как и мощность множества X, а мощность множества Y^X превосходит мощность X; стало быть, Y^X чем-то радикально отличается от XY. Вот, мы сейчас и посмотрим, чем же <u>на самом деле</u> они отличаются).

Таблица 1.			
Y	**X**	**XY**	**Y^X**
a	1	1–a	1–a 2–a 3–a 4–a
b	2	1–b	1–a 2–a 3–a 4–b
	3	2–a	1–a 2–a 3–b 4–a
	4	2–b	1–a 2–a 3–b 4–b
		3–a	1–a 2–b 3–a 4–a
		3–b	1–a 2–b 3–a 4–b
		4–a	1–a 2–b 3–b 4–a
		4–b	1–a 2–b 3–b 4–b
			1–b 2–a 3–a 4–a
			1–b 2–a 3–a 4–b
			1–b 2–a 3–b 4–a
			1–b 2–a 3–b 4–b
			1–b 2–b 3–a 4–a
			1–b 2–b 3–a 4–b
			1–b 2–b 3–b 4–a
			1–b 2–b 3–b 4–b

Теперь предположим, что *n* (число элементов в множестве X) растет, и в конце концов $n \to \infty$. Что будет происходить?

Множество XY будет растягиваться вниз, всегда оставаясь ровно в 2 раза больше множества X (потому, что в Y два элемента). А множество Y^X будет растягиваться не только вниз, но и вправо. Вот это-то и есть то радикальное отличие множества Y^X от множества XY, которое в XY не позволяет проводить диагональный процесс, а в Y^X позволяет его проводить. (Но это отличие не имеет отношения к количеству элементов в Y^X – к количеству самих «отображений», а имеет отношение к <u>структуре</u> элемента-отображения).

Поскольку мы сейчас находимся в области не аксиоматической, а актуальной бесконечности, то построение «множества всех различных отображений X в Y» есть процесс (выполняемый некоторой программой; назовем ее «Y^X»). Согласно введенной только что выше терминологии программа Y^X может взаимодействовать с программой X либо способом зависимой генерации, либо способом независимой генерации. Рассмотрим оба варианта.

В Таблице 2 изображена ситуация при зависимой генерации в момент, когда в X сгенерированы 4 элемента (а в Y^X соответственно – 16 элементов, каждый из которых состоит, в свою очередь, из 4-х элементов).

Таблица 2. (Зависимая генерация)		
Y	**X**	**Y^X**
a	1	**<u>1–a</u>** 2–a 3–a 4–a
b	2	1–a **<u>2–a</u>** 3–a 4–b
	3	1–a 2–a **<u>3–b</u>** 4–a
	4	1–a 2–a 3–b **<u>4–b</u>**
		1–a 2–b 3–a 4–a
		1–a 2–b 3–a 4–b
		1–a 2–b 3–b 4–a
		1–a 2–b 3–b 4–b
		1–b 2–a 3–a 4–a
		1–b 2–a 3–a 4–b
		1–b 2–a 3–b 4–a
		1–b 2–a 3–b 4–b
		1–b 2–b 3–a 4–a
		1–b 2–b 3–a 4–b
		1–b 2–b 3–b 4–a
		1–b 2–b 3–b 4–b

Если в этот момент провести диагональный процесс (см. красные подчеркнутые элементы), то он действительно охватит все те отображения, которые соответствуют элементам множества X, и построит такое отображение, которое не соответствует никакому элементу X.[9] Множество Y^X и в самом деле имеет мощность бóльшую, чем множество X!

[9] Это будет отображение: 1–b 2–b 3–a 4–a.

Вся беда только в том, что это ведь зависимая генерация! При этом способе взаимодействия программ у нас и четных чисел было вдвое меньше, чем натуральных (и 1–1 соответствия не существовало). Если в данной Александровым теореме Кантора имеется в виду эта ситуация, то в теории множеств налицо логическая ошибка *Homonytia* – две разные вещи обозначаются одним словом (термином «взаимно-однозначное соответствие») и потом в рассуждениях прыгают с одной вещи на другую: когда им нужно устанавливать 1–1 соответствие между четными и натуральными числами, то у них одно понимание этого соответствия, а когда нужно то же самое делать между множествами X и Y^X, то уже другое!

Разумеется, ничего здесь не изменится и при росте множества X, когда число его элементов $n \to \infty$.

В Таблице 3 изображена ситуация при независимой генерации в момент, когда в X сгенерированы 16 элементов, а в Y^X тоже 16 элементов, каждый из которых состоит, в свою очередь, из 4-х элементов. (Здесь программа Y^X сама генерирует приведенные в таблице «отображения», не обращая никакого внимания на то, что делает программа X).

Между продукциями программ X и Y^X установлено взаимно-однозначное соответствие, а диагональный процесс ничего не в состоянии доказать, так как он не охватывает все те элементы, которые соответствуют элементам X, и не строит новый, не соответствующий элемент.[10]

Ну – и который же из случаев имеется в виду в «золотой теореме» теории множеств?

На самом деле либо множество Y^X имеет такую же «мощность», как и множество X, либо в теории присутствует логическая ошибка *Homonymia*.

Таблица 3. (Независимая генерация)

Y	X	Y^X
a	1	**1–a** 2–a 3–a 4–a
b	2	1–a **2–a** 3–a 4–b
	3	1–a 2–a **3–b** 4–a
	4	1–a 2–a 3–b **4–b**
	5	1–a 2–b 3–a 4–a
	6	1–a 2–b 3–a 4–b
	7	1–a 2–b 3–b 4–a
	8	1–a 2–b 3–b 4–b
	9	1–b 2–a 3–a 4–a
	10	1–b 2–a 3–a 4–b
	11	1–b 2–a 3–b 4–a
	12	1–b 2–a 3–b 4–b
	13	1–b 2–b 3–a 4–a
	14	1–b 2–b 3–a 4–b
	15	1–b 2–b 3–b 4–a
	16	1–b 2–b 3–b 4–b

А фактическое, реальное отличие множества Y^X от множеств типа XY состоит только в том, что Y^X имеет элементы, которые сами становятся бесконечными, когда $n \to \infty$. Различие имеется в структуре элементов, а не в количестве элементов. (И в теории множеств совершается логическая ошибка, когда выводы, которые должны относиться к структуре элементов, переносятся на их количество).

§11.3. **Третий фактор**. Нет последовательности в понимании процесса.

Защитники канторовской теории множеств, услышав то, что я только что изложил, обычно сразу принимаются утверждать, что я отрицаю актуальную бесконечность, что у Кантора нет никаких процессов построения множеств, что все они «уже построены» и т.д.

Как это выглядит, когда нет никаких процессов построения, мы увидим в следующем параграфе, а сейчас я хочу отметить ту внутреннюю непоследовательность, которая присуща канторовской теории множеств.

Почему, собственно, мы не должны рассматривать множества X, XY, Y^X и другие как строящиеся в каком-то процессе? Ведь тут же рядом «установление взаимно-однозначного соответствия» есть «установление», то есть – процесс! И еще рядом стоит «диагональный процесс» – снова процесс, даже открытым текстом названный процессом!

Почему в теории в одних случаях процессы не только допускаются, но и именно на них вся теория и строится, а в других случаях – процессы запрещаются и их существование отрицается?

§12. Канторовские процессы при аксиоматической бесконечности

2011.02.03 16:30 четверг

Хорошо, рассмотрим теперь ситуацию, когда процессами являются только установление взаимно-однозначного соответствия и диагональный процесс, а сами множества результатами

[10] Построенное диагональным процессом отображение имеется в таблице и соответствует X = 13.

процессов не являются. Тогда мы имеем дело уже не с актуальной бесконечностью, а с аксиоматической бесконечностью. (Случаи конечных множеств опускаем как тривиальные).

В качестве примера рассмотрим множество P, состоящее из различающихся между собой и неповторяющихся бесконечных последовательностей ноликов и единиц:

010010101000010101010111010101...
110100010001000101010000111000...
...

Итак, это множество не создано ни по какому алгоритму ни в каком процессе. Мы просто объявили, что множество P существует и состоит из таких, вот, строк ноликов и единиц, причем строки имеют бесконечную длину и количество самих строк тоже бесконечно. (На самом деле наш мозговой компьютер построил у себя номиналию этого множества P – построил каким-то совершенно побочным способом, не имеющим отношения к структуре самого множества).

Дальше мы можем наделить это множество какими угодно свойствами (то есть, постулировать эти свойства, явно или неявно объявлять их в аксиомах). (На самом деле наш мозговой компьютер этим будет достраивать номиналию множества P).

Мы можем, например, объявить, что бесконечное количество цифр в строке равно бесконечному числу самих строк. (Будем говорить в этом случае, что «матрица квадратна»). Тогда мы можем установить взаимно-однозначное соответствие между натуральными числами с одной стороны и, с другой стороны, одновременно и с самими строками, и с цифрами, скажем, первой строки.

Теперь мы можем провести диагональный процесс и построить строку, которая не содержится в нашем множестве P.

О чем это свидетельствует?

О том, что в квадратной матрице не могут содержаться ВСЕ такие строки единиц и ноликов. Оно и понятно: чтобы матрица содержала все комбинации единиц и ноликов, ширина матрицы должна быть *n* знаков, а длина (высота) ее должна быть 2^n строк.

Хорошо, поскольку мы сами наделяем матрицу какими угодно свойствами, наделим ее таким свойством, что бесконечность по ширине ее равна *n* знаков, а бесконечность в длину гораздо больше («мощнее») и равна 2^n строк.

Теперь предположим, что между натуральными числами и (теперь уже всеми возможными!) строками ноликов и единиц установлено взаимно-однозначное соответствие.

Есть ли способ опровергнуть такое предположение путем *reductio ad absurdum* – сведения к противоречию?

А нет такого способа! Долгожданный диагональный процесс теперь уже не проходит: он не охватывает всю матрицу, поскольку ширина ее *n*, а длина 2^n, каковое ее свойство мы сами только что постулировали, чтобы получить возможность предполагать, что она содержит ВСЕ возможные строки единиц и ноликов.

Так что переход от актуальной бесконечности к аксиоматической бесконечности и отказ от процессов построения множеств не спасает канторовскую теорию множеств. Всё равно имеет место одно из двух:

1) либо мы постулируем, что «матрица квадратна», и тогда она не может претендовать на то, что она содержит все возможные строки единиц и ноликов;

2) либо мы постулируем, что она вытянута в соотношении *n* к 2^n, и тогда она действительно содержит ВСЕ строки ноликов и единиц, но диагональный процесс тогда успешно провести невозможно.

Итак, мы видим, что канторовская теория множеств строится путем чрезвычайно путанного, неясного, неточного мышления, и она буквально напичкана всевозможными логическими ошибками. (Чувствуется, что создавалась она психически больным человеком с расстроенной мозговой деятельностью).

В материалах этой дискуссии созвучные штрихи к изложенному здесь вопросу можно найти в {PENRO1 = МОИ № 14, стр.79}, {PENRO1 = МОИ № 14, стр.82}, {PENRO2 = МОИ № 14, стр.107}, {PENRS1 = МОИ № 17, стр.74}, {POTI-1 = МОИ № 41, стр.104} и других местах.

В материалах предыдущих дискуссий эти вопросы рассматривались в {NATUR3 = МОИ № 36, стр.40}, {TRANS1 = МОИ № 37, стр.53}, {CANTO = МОИ № 38, стр.33}, {CANTO2 = МОИ № 39, стр.52} и во многих других местах, в том числе в латышских книгах.

§13. Злаки и плевел

2011.02.04 15:20 пятница

К чести математиков, живших столетие назад, нужно сказать, что идеи Кантора были приняты ими с большим сопротивлением. «*Канторовская теория бесконечных множеств вызвала бурю протестов*» – пишет Морис Клайн.[11] Леопольд Кронекер называл Кантора шарлатаном и заявил: «*Всё, что сделал в этой области Кантор, было не математикой, а мистикой*». Анри Пуанкаре называл теорию множеств тяжелой болезнью, считал ее «математической патологией» и объявил в 1908 году: «*Грядущие поколения будут рассматривать теорию множеств как болезнь, от которой они излечились*».

Так как же всё-таки случилось, что столь очевидно абсурдная и ошибочная «теория» в конце концов утвердилась в качестве «математической истины»?

Я в других своих сочинениях уже называл ряд вероятных причин, а здесь хочу остановиться на еще одной, не упомянутой ранее.

Определенную роль, как мне кажется, сыграло и то, что «учение о бесконечностях» шло в комплекте с рядом других понятий – правильных и нужных.

Первое из них было понятие множества. Если почитать современные книжки, то создается впечатление, что понятие множества было введено именно Кантором. Я в это как-то не очень верю: неужели до Кантора не существовало аналогичного понятия?! Но даже если и существовало, то акцент на понятие множества несомненно был перенесен и сделан именно Кантором; он поставил это понятие «в центр мироздания».

Понятие множества, конечно же, чрезвычайно полезно, плодотворно и необходимо; оно – один из «краеугольных камней» мышления вообще, фундаментальный объект человеческой операционной системы. И вот, принятие математиками этого полезнейшего понятия способствовало и принятию его довеска – «учения о бесконечностях». Не смогли очистить злаки от плевела.

Похожая ситуация была и с понятием актуальной бесконечности. Тот же самый Анри Пункаре, который объявил теорию множеств болезнью математики, писал и так: «*Актуальной бесконечности не существует. То, что мы называем бесконечностью, представляет собой неограниченную возможность создания новых объектов независимо от того, сколько объектов уже существует*».

Однако это не так: актуальная бесконечность существует – как объект деятельности человеческой операционной системы (мышления), отличный от того объекта, который мы имеем при потенциальной бесконечности (существует как результат бокоанализа мозговых программ). Более того, существует не только актуальная бесконечность, но еще и третья бесконечность (названная у нас «аксиоматической»)) – объект еще третьей природы, отличной от предыдущих двух.

Актуальная бесконечность существует, но она не имеет тех свойств, которые ей приписывал Кантор. Однако в представлениях людей времени Кантора и Пуанкаре актуальная бесконечность и канторовские свойства слились воедино: принятие одного означало автоматическое принятие и второго. Так на крыльях признания актуальной бесконечности в математику влетел и весь рой канторовских ошибок мышления.

И третьим элементом, тоже оказавшимся неразрывно связанным с канторовскими ошибками, был математический платонизм. Сам Кантор, защищая свою теорию, писал, ято он разделяет философию Платона, что идеи существуют в окружающем нас мире независимо от человека, их надо лишь увидеть, и т.д. А век тот был «веком материализма», не было еще ни корпускулярно-волнового дуализма, ни формулы $E = mc^2$, и платонизм воспринимался как «ненаучный идеализм», нечто похожее на ведьм, летающих по воздуху. В качестве научной альтернативы ему выдвигался конструктивизм, не содержащий канторовских построений.

Но платонизм верен – надо лишь правильно всё понимать. И, убеждаясь в правомерности платонизма, математики как бы и автоматически принимали также и канторовское учение о бесконечностях.

Так я вижу одну из причин этого чудовищного провала математики – признания правильности канторовского учения о бесконечных множествах. Оно было принято и признано в одном пакете с рядом полезных и плодотворных идей, понятий и представлений.

---

[11] Клайн Морис. «Математика: утрата определенности». «Мир», Москва, 1984, с 236.

Ну, а потом выросли целые поколения людей, которые впитывали это учение с юности, если не с детства, всецело полагаясь на авторитеты и не применяя достаточного критического мышления. Для этих людей теперь отказ от канторовских установок будет означать жизненную катастрофу. Естественно, что они будут отчаянно сопротивляться и отрицать, отрицать, отрицать...

§14. Лжематематика

2011.02.04 18:04 пятница

Если мы окинем взором учение Кантора «сверху», с «птичьего полета», то ситуация выглядит так. То, что бесконечности отличаются одна от другой, знали уже, как минимум, с 1696 года, когда вышла книга маркиза де Лопиталя «Анализ бесконечно малых» – первый в мире учебник по дифференциальному и интегральному исчислению –, содержащая также и теорему, известную нам теперь как «правило Лопиталя», которая была открыта Иоганном Бернулли и сообщена маркизу в письме в соответствии с их договором, согласно которому маркиз выплачивал Бернулли 300 ливров ежегодно при условии, что Бернулли будет сообщать все свои математические открытия Лопиталю и только Лопиталю.

Правило Лопиталя, раскрывая неопределенность типа ∞/∞, устанавливает неодинаковость бесконечностей и показывает, как можно найти соотношение между бесконечностями.

Кантор, введя свое «взаимно-однозначное соответствие» в отношении бесконечных множеств, фактически отказался от правила Лопиталя и постулировал одинаковость всех бесконечностей (между которыми <u>можно</u> установить это его «1–1 соответствие»).

Однако ликвидированная им неодинаковость бесконечностей всплыла у него в другом – искаженном и причудливом виде. Получилось то же самое, что было в начале, но только у Бернулли–Лопиталя неодинаковость бесконечностей имела естественный вид, а у Кантора уже – призрачный. (Тогда стоило ли вообще уничтожать различие бесконечностей, чтобы получить то же самое в изуродованном виде?)

Более пристальное изучение всех канторовских и околоканторовских рассуждений, однако, показывает, что в них всегда содержится ошибка – не одна, так другая; ошибки переливаются с одной грани на другую, и в результате мы никогда не имеем точной и безупречной картины.

Поэтому такие рассуждения несостоятельны, и на самом деле у Кантора (и его последователей) различающихся бесконечностей <u>НЕТ</u>.[12] В действительности все бесконечности у них одинаковы, и над всем довлеет первоначальный постулат Кантора: $\infty/\infty \equiv 1$.

Самой существенной чертой канторовской теории множеств является ее обязательная туманность и расплывчатость понятий. Так, в §12 мы выделили два возможных случая, как мы можем постулировать бесконечность нашей матрицы P (квадратная или вытянутая). При каждом отдельном случае мы получаем результат, опровергающий Кантора – два разных результата, но оба противоречат Кантору. А результат Кантора можно получить только в том случае, если эти оба варианта не различать, не выделять, а оставить слитыми воедино, смутными.

Аналогично в §11.2 мы выделили два различных понимания 1–1 соответствия: зависимое и независимое; мы не запретили ни одно из них, но просто строго следили, какое где используется – и оказалось, что если в теории последовательно использовать какое-нибудь одно из этих понятий (любое, но одно и то же!), то никаких результатов Кантора НЕТ. Иллюзия этих результатов создается только в том случае, если ситуацию не уточнять, сохранять ее в тумане, и под этим покровом незаметно прыгать с одного понимания 1–1 соответствия на другое и обратно.

Поэтому для защитников теории Кантора любое уточнение понятий, любое прояснение ситуации смерти подобно, и они всеми силами пытаются избежать всякой детализации, категорически настаивая на обязательное сохранение туманности и расплывчатости, присущей их официальной теории.

Напичканная логическими ошибками, обязательно требующая неточности понятий и рассуждений, теория Кантора создает в дальнейшем громадные построения; однако цена этим построениям – такая же, как построениям астрологов, мифологии ацтеков или сказкам о

[12] Если только специально не постулировать это при аксиоматической бесконечности.

крокодиле Гене. Это не наука, логически вытекающая из каких-то предпосылок, – это просто фантазии, и такие фантазии можно строить сколько угодно и какие угодно.

Однако в реальной жизни эти фантазии выдаются за науку, скрываются под ее личиной и, значит, представляют собой ЛЖЕНАУКУ.

Чтобы не порочить священное имя математики, я теперь не считаю теорию Кантора принадлежащей математике. Это ОКОЛОматематическое построение, это ЛЖЕматематика.

Само собой разумеется, что канторовские и послеканторовские построения, в основе которых лежат логические ошибки и расплывчатость представлений, не имеют – и принципиально не могут иметь – никаких практических приложений (какие имеет настоящая математика). Теория канторвских бесконечностей не используется (подобно, скажем, интегралам) при строительстве мостов, при запуске космических кораблей – и т.д.

§15. Обращение

2011.02.05 14:25 суббота

Теперь я повторяю то, что я писал Дмитрию Юрьевичу Манину 30 ноября 2010 года {POTI-1 = МОИ № 41, стр.89}:

> Чтобы сохранить в силе «лжематематику» (и снять с нее приставку «лже-»), надо указать, в чем же Веданская теория не права, в чем же состоит ошибка (если таковая есть). Сделать это оказалась совершенно не в состоянии латвийская наука. Вся их аргументация сводилась просто к тому, что НЕЛЬЗЯ мыслить так, как мыслю я, а надо мыслить так, как мыслят они.[13] И всё!
>
> Сейчас я питаю надежду, что Российская наука (т.е. на самом деле – российские и вообще русскоязычные ученые) окажутся умнее (и сильнее) латвийских и все-таки сделают одно из двух: либо укажут мне, В ЧЕМ состоит ошибка Веданской теории, либо признают, что она верна.

Опровержение канторовской теории множеств вообще-то не было ни целью, ни даже существенной частью Веданской теории. В первом документе Веданской теории – в трехтомнике «О природе чисел», с которым я обратился к латвийской науке ровно 30 лет назад: 16 февраля 1981 года – в этом трехтомнике канторовским бесконечностям была посвящена одна маленькая главка {NATUR3.2004 = МОИ № 36, стр.40} в третьем томе, и то мимоходом. Это оппоненты потом уцепились именно за этот вопрос, и тогда уже развернулась жестокая битва «Канторианы» {CANTO = МОИ № 38}, {CANTO2 = МОИ № 39}.

(Сам Дмитрий Юрьевич в ноябрьско–декабрьской переписке тоже ухватился в первую очередь именно за этот вопрос {POTI-1 = МОИ № 41, стр.90}, в результате чего изложение в этом томе (в POTI-2) было кратчайшим путем направлено прямо к теории Кантора).

Но в целом Веданская теория является не разрушительной, а созидательной. Основная ее функция – не разрушать какие-то математические (околоматематические, псевдоматематические) построения, а объяснить человеческое мышление (в том числе математическое) в категориях информатики (теории обработки информации). Такое объяснение раскрывает – в области математики – действительные ее основания (и эти раскрытые Веданской теорией основания математики радикально отличаются от тех, которые видит теперешняя «официальная» наука).

И вот, теперь, 16 февраля 2011 года, ровно в 30-ю годовщину моего официального обращения к Латвийской науке в лице преподавателя ЛГУ Карлиса Подниекса (и по случайному совпадению в 74-й день рождения Юрия Ивановича Манина), я делаю официальное обращение к Российской науке в лице двух господ Маниных – Юрия Ивановича и Дмитрия Юрьевича – и предлагаю Российской науке сделать одно из двух:

1) либо точно указать, в чем заключаются ошибки Веданской теории;
2) либо открыто признать, что Веданская теория верна.

Причем сделать это в двух планах:

а) в более узком плане канторовской теории множеств;
б) и в более широком плане оснований математики.

---

[13] То есть, сохраняя обязательную для Канторовской теории расплывчатость понятий и не допуская никаких уточнений и детализации.

Как тридцать лет назад в Латвийской науке после первого адресата позже подключались и другие люди, так и после первых двух адресатов в Российской науке позже, видимо, будут подключены и другие лица. А в начале мы имеем дело с двумя Маниными – старшим и младшим.

Господа Манины – теперь вам слово!

Глава 3. Переписка «16 февраля»

§16. Письма

от Valdis Egle <egle.valdis@gmail.com>
кому Dmitrii Manin <dmanin@ix.netcom.com>
дата 16 февраля 2011 г. 0:00
тема February 16
отправлено через gmail.com

Здравствуйте, Дмитрий Юрьевич!

Вот, у нас, в Риге, уже наступило 16 февраля, и я отправляю Вам это письмо.

Все материалы, планировавшиеся к этому дню, выставлены в Интернет на сайте http://VE-POTI.narod.ru/.

Наша предыдущая переписка опубликована в §43 книги POTI-1 = МОИ № 41.

Путь, ведущий от постулатов Веданской теории к Канторовской теории бесконечных множеств, кратко описан в книге POTI-2.

В девяти томах двух книг Роджера Пенроуза[14] в моих комментариях к его тексту видны различия Веданской теории и концепции Пенроуза.

В §47 книги POTI-1 = МОИ № 41 помещено письмо Юрию Ивановичу Манину. Если Вы имеете с ним контакт, сообщите, пожалуйста, ему, что для него имеется такое письмо. Я бы отправил сам, но у меня нет адреса его е-почты.

Настоящее мое письмо является моим официальным обращением к Российской науке с предложением рассмотреть и оценить Веданскую теорию. В данный момент представителями этой науки считаются Ю.И. Манин и Д.Ю. Манин, но по мере необходимости будут вовлекаться и другие лица.

С уважением,

Валдис Эгле

16 февраля 2011 года

от Dmitrii Manin <dmanin@ix.netcom.com>
кому Valdis Egle <egle.valdis@gmail.com>
дата 16 февраля 2011 г. 4:19
тема Re: February 16
подписан ix.netcom.com

> *Наша предыдущая переписка опубликована в §43 книги POTI-1.*

Дорогой Вальдис, кажется, Вы не спрашивали у меня разрешения публиковать нашу переписку?

> ... *представителями этой науки считаются* [...] *Д.Ю. Манин*...

Извините, но это довольно смехотворно. Я не страдаю манией величия и на роль представителя российской науки никоим образом не претендую.

– M

от Dmitrii Manin <dmanin@ix.netcom.com>
кому Valdis Egle <egle.valdis@gmail.com>
дата 16 февраля 2011 г. 6:06
тема Re: February 16
подписан ix.netcom.com

---

[14] {PENRO1}, {PENRO2}, {PENRO3}, {PENRO4}, {PENRO5}, {PENRS1}, {PENRS2}, {PENRS3}, {PENRS4} = МОИ № 14, № 15, № 16, № 17, № 18.

Дорогой Вальдис,

мне сомнительно следующее место из POTI-2: на стр. 13–14 Вы утверждаете, что в случае, который Вы называете «зависимой генерацией», «*программа C установить взаимно-однозначное соответствие между продуктами N и P не сможет...*»

Если программа C идет после программы P и собирает в пары уже порожденные числа из двух рядов – одно из одного, другое из другого – то я не вижу, что может ей помешать каждому числу из одного ряда поставить в соответствие ровно одно число из другого. Конечно, ничего. Я думаю, что здесь у Вас ошибка.

– M

от Dmitrii Manin <dmanin@ix.netcom.com>
кому Valdis Egle <egle.valdis@gmail.com>
дата16 февраля 2011 г. 6:49
тема Re: February 16
подписан ix.netcom.com

Ну, и еще одно соображение. Ваши рассуждения о теореме Кантора напоминают мне конструктивизм (http://ru.wikipedia.org/wiki/...[15]) в математике. Насколько я понимаю, конструктивисты тоже не признают теорему Кантора и обходятся без теории множеств – но пожалуйста, не цитируйте меня,[16] я отнюдь не специалист и могу здесь серьезно ошибаться.

– M

от Valdis Egle <egle.valdis@gmail.com>
кому Dmitrii Manin <dmanin@ix.netcom.com>
дата 16 февраля 2011 г. 15:10
тема Re: February 16
отправлено черезgmail.com

Дмитрий Юрьевич,

Мы не вели (и не ведем) частную, личную переписку, в каковой, если кто-то из нас потом надумал бы ее публиковать, требовалось бы согласие второго. Мы участвуем в проекте под названием «ПЕРЕПИСКА о...» (и т.д.), который с самого начала предусматривал публикацию точного протокола «всего, что будет», первые части которого УЖЕ стояли в Интернете, когда Вы получили мое первое письмо, в котором делалась ссылка на §4 книги POTI-1 = МОИ № 41 («Цели мероприятия»), а в том параграфе были пункты 3 и 4, явно объявляющие, что Ваша реакция будет письменно засвидетельствована и опубликована в Интернете. В дальнейших письмах тоже говорилось, что это «интернетовская дискуссия» и, значит, это всё равно, что писать комментарии на каком-то сайте, где всё написанное сразу становится доступным всем.

Алгоритм определения, кто представитель Российской науки, а кто нет, очень прост:

1) ученым считается тот, кто имеет научные степени; Вы имеете, следовательно, Вы ученый (не будь этого, Вас и в бюллетене-то «В Защиту Науки» не печатали бы);

2) тот, ученый, который имеет российское гражданство или родился и вырос в России и пишет по-русски, считается принадлежащим множеству «Российская наука»;

3) всякий член этого множества, попав в эту Переписку, считается представителем Российской науки; то подмножество, которое сюда попадет, и определит реакцию «Российской науки» на Веданскую теорию (а как может быть иначе?).

По содержанию теорий отвечать повремению: во-первых, подумаю, во-вторых, выжду – может еще что-то придет.

---

[15] **В.Э.:** Полная ссылка: http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%BD%D1%81%D1%82%D1%80%D1%83%D0%BA%D1%82%D0%B8%D0%B2%D0%B8%D0%B7%D0%BC_(%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0). Ссылки на русскую Википедию обычно не работают.

[16] **В.Э.:** Извините, что всё же «процитировал»; это потому, что соотношения Веданской теории с конструктивизмом имели большое значение с первых же шагов Веданской теории, и в переписке ПОТИ об этом непременно следует рассказать, что я и сделаю несколько ниже (§21) в качестве ответа на Ваше письмо.

Не обижайтесь, Дмитрий Юрьевич, и не делайте проблем там, где их нет.

В.Э.

от Dmitrii Manin <dmanin@ix.netcom.com>
кому Valdis Egle <egle.valdis@gmail.com>
дата 16 февраля 2011 г. 17:29
тема Re: February 16
подписан ix.netcom.com

> Мы не вели (и не ведем) частную, личную переписку, в каковой, если кто-то из нас потом надумал бы ее публиковать, требовалось бы согласие второго. Мы участвуем в проекте под названием «ПЕРЕПИСКА о...» (и т.д.), который с самого начала предусматривал публикацию точного протокола «всего, что будет», первые части которого УЖЕ стояли в Интернете, когда Вы получили мое первое письмо, в котором делалась ссылка на §4 книги POTI-1 («Цели мероприятия»), а в том параграфе были пункты 3 и 4, явно объявляющие, что Ваша реакция будет письменно засвидетельствована и опубликована в Интернете.

Извините, но этого недостаточно. Вы должны были явно и недвусмысленно, в самом письме, либо предупредить, что будете все публиковать, либо спросить на это разрешения.

– М

от Valdis Egle <egle.valdis@gmail.com>
кому Dmitrii Manin <dmanin@ix.netcom.com>
дата 17 февраля 2011 г. 19:02
тема Re: February 16
отправлено через gmail.com

Мне казалось, что все условия «игры» определены достаточно ясно и однозначно. Ваш предшественник Н.Н. Шуйкин всё понял и в аналогичной ситуации не возражал, когда я точно так же опубликовал наши с ним письма. Позже он отказался от дальнейшей переписки, но – по другой причине.

Вообще я веду такие дискуссии уже 30 лет, и всегда на одних и тех же условиях: всё протоколируется и публикуется. Так велась «Канториана» и многие другие дискуссии, общее число участников которых измеряется десятками. Я всегда стараюсь максимально четко предупредить оппонентов о тех условиях, какие действуют в этих инициированных мною дискуссиях, но жизнь разнообразна, и иногда случаются разночтения и недоразумения (как считает оппонент – из-за моей небрежности, а как считаю я – из-за его невнимательности).

Такой казус, как сейчас с Вами, в истории этих дискуссий был только один раз до Вас: лет пять назад один латышский профессор из Нью-Йорка тоже запротестовал против публикации переписки, высказав это в характерной для западных латышей форме, что, мол, «в цивилизованных странах принято спрашивать разрешение...» и т.д. Но ему ответить было еще легче, чем Вам, потому что там в последнем моем комментарии на сайте (где мы до этого полемизировали) стояло: Вот мой адрес е-почты, вот условия переписки, если Вы согласны переписываться на таких условиях, напишите мне, и Ваше письмо будет означать согласие на эти условия. Ну, а он через некоторое время уже забыл, КАК всё началось. (Люди вообще очень небрежны и невнимательны).

Я десятки раз повторял снова и снова во все стороны: Я НЕ ВЕДУ ТАКИХ ПЕРЕПИСОК, КОТОРЫЕ НЕЛЬЗЯ ПУБЛИКОВАТЬ – просто не веду, и на других условиях вообще не переписываюсь.

Примерно год назад на моем блоге один из корреспондентов (тот, который фигурирует в книге {POTI-1} под именем Андрей), предложил рассказать историю о паранормальном явлении, случившемся с ним, но рассказать не всем, в комментариях блога, а лично мне, по е-почте. Я ему ответил, что я принципиально не веду таких переписок, которые нельзя публиковать, и, если он может рассказать это в такой форме, чтобы это было для всех, то пусть расскажет, а если нет – значит, нет. (Он сначала не стал говорить, а через некоторое время в общей форме рассказал).

Были и казусы, противоположные Вашему: когда люди грозились мне сами опубликовать нашу переписку, полагая очевидным, что я уж точно побоюсь ее публиковать.

А один профессор Латвийского университета сам первый написал мне, обругал меня, а в конце письма добавил, что «на основании Закона об авторских правах» я не имею права публиковать его письмо (юридический нонсенс: я вообще не находился с ним ни в какой переписке и не давал своего согласия на какую-то переписку; если рассуждать так, как он, то я не имею права и показывать полиции письмо с угрозами, присланное мне каким-то шантажистом!).

Так что, Дмитрий Юрьевич, жизнь разнообразна, и казусы бывают всякие. За всем уж на все 100 % невозможно уследить. Где-то что-то и упустишь, полагая давно известным каждому. Извините, если получилось недоразумение с Вашими письмами.

Но я не считаю, что нанес Вам какой-то урон: там ведь была переписка только по делу – никаких интимных вещей, никаких подробностей частной жизни или т.п.

Дело вообще настолько пустяковое по сравнению с Основаниями математики или Теорией Кантора, что серьезный человек не может на нем долго задерживаться.

Давайте лучше говорить по существу научных вопросов!

В.Э.

от Dmitrii Manin <dmanin@ix.netcom.com>
кому Valdis Egle <egle.valdis@gmail.com>
дата 18 февраля 2011 г. 8:29
тема Re: February 16
подписан ix.netcom.com

Дорогой Вальдис,

Вы не понимаете[17] одного простого принципа: если Ваш корреспондент думает, что участвует в частной переписке, Вы не имеете морального права (морального, а не юридического) его письмо публиковать, это просто неэтично.[18] Со мной уже проехали, играем по Вашим правилам, но я Вам серьезно рекомендую будущим корреспондентам сразу сообщать, что всё, что они напишут, будет опубликовано, а если они этого не хотят, то пусть не отвечают.[19]

На этом я тему считаю закрытой, а от Вас жду ответа на мое замечание по поводу «зависимой генерации».[20]

– M

от Valdis Egle <egle.valdis@gmail.com>
кому Dmitrii Manin <dmanin@ix.netcom.com>
дата 19 февраля 2011 г. 14:19
тема Re: February 16
отправлено через gmail.com

---

[17] **В.Э.:** Неправда – всё я понимаю, и проблемы совсем в другом.

[18] **В.Э.:** Вопрос не в том, этично это или неэтично (такой вопрос всем ясен), а в том, почему получилось так, что я считал, что оппоненту условия известны, а он их, оказывается, не знал.

[19] **В.Э. (в сторону):** Легко ему говорить! На всей продолжительности 30-летней истории Веданской теории самой главной проблемой всегда было то, что по крайней мере 90% тех, к кому обращаешься, «*...тебе просто не отвечают, не отвечают, не отвечают – на первое послание, на второе, на десятое, и пятидесятое...*», как было сказано в 2003 году в Объяснительной записке латвийской Полиции безопасности (§42 книги POTI-1). Поэтому, когда пишешь первое письмо новому корреспонденту, то в первую очередь думаешь о том, как бы его, бедненького, не обидеть, как бы его не задеть, чтобы он хотя бы ответил... И если я тут сразу в первом письме от незнакомого человека буду ставить такие ультиматумы, то вообще... Поэтому-то и стараешься всё смягчить, всё сгладить, но тогда – опять беда! – могут получиться такие случаи, как с Д.Ю. Маниным, когда корреспондент не очень углубляется и не очень разбирается, что же именно ему предлагается в этой смягченной и сглаженной форме...

[20] **МОИ 2016-01-27:** Здесь присутствовал еще один момент, который В.Э. четко осознавал и о котором думал, но о котором не хотел говорить Манину открыто, чтобы не обострять с ним отношений. Я этот момент описала в МОИ № 5, стр.75 и сноска 122. В.Э. был практически полностью убежден, что Манин начал пепеписку со ЛЖИ. На этом фоне его придирки и откровенно высокомерный тон выглядели особенно противно. Я думаю, что Манин придирался к «разрешению на публикацию» именно потому, что он солгал: он думал, что солгал одному Валдису Эгле, а теперь получалось, что он солгал всему миру! К концу переписки мы были совершенно убеждены, что перед нами жулик, с которым общаться не стоит. Поэтому В.Э. и прекратил переписку в такой момент, когда Манин еще хотел ее продолжить. Но открыто описывать все обстоятельства дела В.Э. тогда не стал, потому что Манин (по инициативе самого В.Э.) выступал в роли «представителя российской науки», и В.Э. не хотел бросать тень на российскую науку, с которой тогда еще надеялся установить хорошие отношения.

Поясняю, как в Веданской теории понимается «независимая генерация» и «зависимая генерация». В §11.2 первый ряд параллельных «чисел» (на самом деле – нотат) показывает независимую генерацию. Программы N и P работают сами по себе, не обращая внимание одна на другую; обе бесконечны, и нет соображений, которые помешали бы установить 1–1 соответствие.

Второй ряд параллельных нотат иллюстрирует зависимую генерацию. Это означает, что P работает не сама по себе, а над продуктами программы N. Она может отобрать, например, «число» 8 только после того, как это «число» было создано программой N. Но N создает не только четные, но и нечетные числа, поэтому продуктов программы N всегда в два раза больше, чем продуктов программы P.

Программа C, идущая вслед за P, сможет однозначно поставить в соответствие каждому продукту программы P продукт программы N, но не наоборот. Соответствие не будет ВЗАИМНО однозначным. Чтобы можно было считать, что и каждому продукту программы N можно однозначно поставить в соответствие продукт P, нужно предположить, что характер соотношения (2 : 1) их продуктов, который мы видим в начале ряда, вдруг изменился на каком-то бесконечно отдаленном шаге их работы и стал таким же, как при независимой генерации. Но оснований для такого предположения нет: характер соотношения продуктов N и P не меняется, когда количество элементов обоих рядов стремится к бесконечности.

В.Э.

от Dmitrii Manin <dmanin@ix.netcom.com>
кому Valdis Egle <egle.valdis@gmail.com>
дата 19 февраля 2011 г. 18:55
тема Re: February 16
подписан ix.netcom.com

> *Программа C, идущая вслед за P, сможет однозначно поставить в соответствие каждому продукту программы P продукт программы N, но не наоборот*.

Это почему? До каждого со временем доберется и поставит в соответствие. Можно точно сказать, сколько времени надо подождать, чтобы она добралась до данного продукта.

> *Соответствие не будет ВЗАИМНО однозначным. Чтобы можно было считать, что и каждому продукту программы N можно однозначно поставить в соответствие продукт P, нужно предположить, что характер соотношения (2 : 1) их продуктов, который мы видим в начале ряда, вдруг изменился на каком-то бесконечно отдаленном шаге их работы и стал таким же, как при независимой генерации*.

Неправда. Это совершенно отдельные вещи: в каждый момент времени сгенерировано k элементов одного ряда, $2k$ элементов другого, и k из них поставлено в соответствие элементам первого ряда. По мере увеличения числа k КАЖДЫЙ ЭЛЕМЕНТ ОДНОГО РЯДА БУДЕТ ПОСТАВЛЕН В требуемое СООТВЕТСТВИЕ. Это определение взаимно-однозначного соответствия.[21]

– M

от Dmitrii Manin <dmanin@ix.netcom.com>
кому Valdis Egle <egle.valdis@gmail.com>
дата 19 февраля 2011 г. 19:51
тема Re: February 16
подписан ix.netcom.com

Или еще давайте так посмотрим:

Пример 1.

Программа 1 порождает целые числа, программа 2 порождает для каждого из них удвоенное. Они работают с одинаковой скоростью, длина двух рядов в каждый момент одинаковая, все числа сразу ставятся во взаимно-однозначное соответствие. Значит, целых чисел столько же, сколько четных при «зависимой генерации», в противоположность тому, что Вы утверждаете.

---

[21] **В.Э.:** Но ведь нет же! Это НЕ определение взаимно-однозначного соответствия. Но не будем сейчас разбираться в деталях, а обозначим этот случай как Пример **0**, чтобы позже (в §17) разобрать все три примера.

Пример 2.

Программа 1 порождает целые числа, программа 2 читает их и нечетные пропускает, а четные делит пополам. Обе порождают целые числа, но ряд, порожденный программой 2 всегда вдвое короче. Следовательно, при «зависимой генерации» по Вашему определению целых чисел вдвое меньше, чем целых чисел. Иначе говоря, множество целых чисел не равномощно самому себе.

Из примера 2 прямо следует, что Ваше определение равномощности – плохое, потому что любое определение должно быть таким, чтобы всякое множество было равномощным самому себе.

– М

§17. Три примера

Дмитрий Юрьевич,

прежде, чем разобрать Ваши примеры 0, 1 и 2, полезно будет взглянуть с более общих позиций на тот район, в котором мы сейчас находимся (когда Вы атакуете понятие «зависимой генерации»).

В первую очередь отметим, что понятия Веданской теории «зависимая генерация» и «независимая генерация» не являются, так сказать, новыми, первичными или специфическими для этой теории, а всего лишь отражают такие понятия, которые существовали и раньше, в «традиционной математике», и представляют собой лишь более точную, детальную (и программистскую) интерпретацию этих «старых» понятий.

Почти что каждая книжка по теории множеств, изданная в 1960 – 1970-х годах, которые я читал прежде, чем у меня возникли идеи, потом оформившиеся в Веданскую теорию, начиналась с того, что, вот, мол, «интуитивно нам кажется», что четных чисел должно быть «в два раза меньше», чем всех чисел, однако, оказывается, что это не так... (...Кантор... взаимно-однозначное соответствие... удивительные свойства бесконечных множеств... – и т.д. и т.п.).

Таким образом, уже с первых шагов в направлении теории множеств, задолго до Веданской теории и всяких там «генераций», мы сразу сталкиваемся с двумя точками зрения:

Взгляд 1: четных натуральных чисел в два раза меньше, чем всех натуральных чисел; в рассуждениях об этих (и подобных) множествах нужно учитывать такие «количественные» соображения и т.д.; этот взгляд в тех книжках назывался «интуитивным».

Взгляд 2: такие «количественные» соображения во внимание не принимаются, учитывается только возможность бесконечного сопоставления элементов.

Эти два взгляда на вещи, эти две точки зрения, эти два подхода существуют сами по себе, до меня и независимо от меня, и все рассуждения, о которых мы сейчас говорим, в принципе можно провести, оперируя одними только понятиями «Взгляд 1» и «Взгляд 2» и не привлекая никаких программ, никаких генераций и никакой Веданской теории.

Веданские понятия «зависимой генерации» и «независимой генерации» только дают более «осязаемую», «материальную» интерпретацию этим двум взглядам, проецируя их на работу программ. Пожалуй, Вам будет лучше при разборе примеров 0, 1 и 2 ниже держать перед глазами не только «программную интерпретацию», но одновременно и «беспрограммные» Взгляд 1 и Взгляд 2.

§17.0. Пример 0. Вы написали:

> *Программа C, идущая вслед за P, сможет однозначно поставить в соответствие каждому продукту программы P продукт программы N, но не наоборот.*

Это почему? До каждого со временем доберется и поставит в соответствие. Можно точно сказать, сколько времени надо подождать, чтобы она добралась до данного продукта.

> *Соответствие не будет ВЗАИМНО однозначным. Чтобы можно было считать, что и каждому продукту программы N можно однозначно поставить в соответствие продукт P, нужно предположить, что характер соотношения (2 : 1) их продуктов, который мы видим в начале ряда, вдруг изменился на каком-то бесконечно отдаленном шаге их работы и стал таким же, как при независимой генерации.*

Неправда. Это совершенно отдельные вещи: в каждый момент времени сгенерировано k элементов одного ряда, $2k$ элементов другого, и k из них поставлено в соответствие элементам первого ряда. По мере увеличения числа k КАЖДЫЙ ЭЛЕМЕНТ ОДНОГО РЯДА БУДЕТ

ПОСТАВЛЕН В требуемое СООТВЕТСТВИЕ. Это определение взаимно-однозначного соответствия.

Во-первых, по этому Вашему тексту создается впечатление, что Вы неправильно поняли определение «взаимно-однозначного соответствия» (видимо, в спешке). Взаимно-однозначное соответствие существует тогда, когда

а) каждому элементу первого множества поставлен в соответствие один неповторяющийся элемент второго множества; и

б) каждому элементу второго множества поставлен в соответствие один неповторяющийся элемент первого множества.

А выполнение лишь одного из этих условий (а, б) дает нам однозначное, но не взаимно-однозначное соответствие. Цитирую учебник Александрова по своему конспекту конца 1970-х годов:

> «Если два множества состоят из одного и того же конечного числа элементов, то между элементами этих множеств возможно установить <u>взаимно однозначное соответствие</u>, т.е. такое соответствие, при котором каждому элементу одного множества соответствует один и только один элемент другого множества и обратно; если же число элементов первого множества меньше, чем второго, то можно установить взаимно однозначное соответствие между первым множеством и частью второго.[22]
>
> Понятие взаимно однозначного соответствия по сути дела не предполагает, что множества, между элементами которых устанавливается это соответствие, непременно конечны».[23]

Собственно определения взаимно-однозначного соответствия в моем конспекте нет (видимо, я тогда счел его слишком общеизвестным, чтобы переписывать), а самой книги тоже нет – она была библиотечная. Я сейчас посмотрел, какие книги по теории множеств доступны в Интернете на русском языке; статья Википедии «Теория множеств» выводит нас лишь на одну такую книгу (имеющую текст, а не просто название): Верещагин Н.К., Шень А. «Начала теории множеств». Издание второе, исправленное. МЦНМО, 2002. В ней понятие взаимно-однозначного соответствие появляется так: «*Два множества называются <u>равномощными</u>, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие, при котором каждому элементу одного множества соответствует ровно один элемент другого*» (раздел 1.3).

Ну, это, разумеется, плохое, очень неточное определение. (Не оно ли и завело Вас в заблуждение?)[24]

Итак, в Примере 0 между множествами N и P взаимно-однозначное соответствие установить <u>нельзя</u> – потому что мы находимся в области «зависимой генерации» или, если хотите, Взгляда 1. В множестве N в два раза больше элементов, чем в P, количество элементов во внимание мы <u>принимаем</u>, и можно установить взаимно-однозначное соответствие лишь между P и <u>частью</u> множества N (половиной, а половина остается без соответствия – даже в бесконечности). А если Вы перестаете принимать во внимание количество элементов и смотрите лишь на возможность достигнуть очередной элемент, значит Вы уже (по определению!) перескочили на Взгляд 2 (или – в его программной интерпретации – на «независимую генерацию»).

Ситуация ведь может быть описана и понята также и в условиях, когда Взгляд 2 вообще отсутствует (как это было во времена до Кантора). Тогда «в каждый момент времени сгенерировано k элементов одного ряда, $2k$ элементов другого, и k из них поставлено в соответствие элементам первого ряда», а другие k элементов соответствия не имеют. И такое соотношение сохраняется навсегда; установление соответствия может достигнуть любого наперед заданного k, но всегда другие k элементов останутся без соответствия – таковы уж свойства бесконечности! – и предполагаемые при этом взгляде (Взгляде 1) свойства

---

[22] **В.Э.:** Вот, этот случай и наблюдается в Примере 0 – только не при конечных, а при бесконечных множествах.

[23] Александров П.С. «Введение в теорию множеств и общую топологию». Наука, Москва, 1977, с. 12.

[24] У Вас похожая формулировка: «*...что может ей помешать каждому числу из одного ряда поставить в соответствие <u>ровно одно</u> число из другого...*». Недостаточно поставить каждому члену одного ряда в соответствие ровно один член второго ряда; надо еще каждому члену второго ряда поставить в соответствие ровно один член первого ряда – а это второе условие-то и не выполняется в Примере 0, когда мы обитаем в рамках Взгляда 1 или «зависимого соответствия».

бесконечности ничуть не противоречивее или невозможнее, чем те, которые при Взгляде 2 нам предлагает Кантор (скорее уж наоборот).

Мы не отвергаем и не запрещаем канторовский Взгляд 2, но мы требуем, чтобы наше мышление было достаточно четким и чтобы мы всегда отдавали себе отчет в том, какой именно взгляд в данный момент используется, и чтобы эти взгляды не смешивались вместе и чтобы в рассуждениях не скакали с одного взгляда на другой и обратно. (Именно в таком смешивании и перескакивании и состоит ошибка «традиционной математики» в том месте, которое мы сейчас обсуждаем).

Веданская «зависимая генерация» – это программная интерпретация Взгляда 1, и при ее анализе мы остаемся в рамках Взгляда 1, не перескакивая на Взгляд 2; для Взгляда 2 у нас есть другая программная интерпретация – «независимая генерация».

§17.1. Пример 1. Вы написали:

> Программа 1 порождает целые числа, программа 2 порождает для каждого из них удвоенное. Они работают с одинаковой скоростью, длина двух рядов в каждый момент одинаковая, все числа сразу ставятся во взаимно-однозначное соответствие. Значит, целых чисел столько же, сколько четных при «зависимой генерации», в противоположность тому, что Вы утверждаете.

Итак, здесь мы имеем случай, когда зависимая и независимая генерация дают одинаковый результат – они совпадают.

И какому же моему утверждению это противоречит?

Видимо, имеется в виду то утверждение, которое в §11.2. было подчеркнуто красным цветом: «1–1 соответствие действует ТОЛЬКО при независимой генерации; независимая генерация является определяющей предпосылкой этого соответствия».

Но это утверждение ведь не касается вопроса о том, можно или нельзя сделать зависимую генерацию эквивалентной с независимой. Это утверждение говорит о том, что когда результаты обеих генераций отличаются (как это имеет место во всех разбираемых примерах: с четными числами, множествами XY, Y^X и многими другими), то «ТОЛЬКО при независимой генерации (а не при зависимой!) мы имеем 1–1 соответствие; независимая генерация является определяющей предпосылкой этого соответствия».

И в той области, для которой оно сформулировано, это утверждение несомненно правильно. (Если хотите, то те слова, которые я подчеркнул красным цветом сейчас, добавьте к нему в качестве уточнения области действия).

§17.2. Пример 2. Вы написали:

> Программа 1 порождает целые числа, программа 2 читает их и нечетные пропускает, а четные делит пополам. Обе порождают целые числа, но ряд, порожденный программой 2 всегда вдвое короче. Следовательно, при «зависимой генерации» по Вашему определению целых чисел вдвое меньше, чем целых чисел. Иначе говоря, множество целых чисел не равномощно самому себе.
>
> Из примера 2 прямо следует, что Ваше определение равномощности – плохое, потому что любое определение должно быть таким, чтобы всякое множество было равномощным самому себе.

Любезнейший Дмитрий Юрьевич! Но я вообще никогда не давал никакого определения равномощности. Это (и связанные с ним) понятия ввел Георг Кантор, а я лишь – самое большое – цитировал его или его последователей. Совсем наоборот: я всегда выступал ПРОТИВ этих канторовских понятий и иногда (когда меня особенно допекали) утверждал даже, что всё это годится только для мусорника.

Так что Ваш Пример 2 – это аргумент в мою ПОЛЬЗУ, а не против меня, и я его возвращаю Вам назад со словами: «Видите, какие нелепости получаются, если эти канторовские понятия применять в более уточненных условиях, нежели те, в которых их обычно применяют математики! На свалку всё это, на свалку!»

§18. Диспозиция

Итак, Вы предприняли некоторую «атаку» на понятие «зависимой генерации». Но я хотел бы, чтобы мы при этом не теряли из виду и общую диспозицию. А она такова.

Даже если Вам удалось бы показать, что понятия «зависимой генерации» и «независимой генерации» представляют собой плохие интерпретации до-веданских точек зрения, обозначенных выше как Взгляд 1 и Взгляд 2, то, всё равно, это ничего не изменило бы.

Собственно Взгляд 1 и Взгляд 2 же остались бы, и Вы ведь не можете отрицать их существование или притворяться, что не понимаете разницы между этими двумя точками зрения. (Если «зависимая» и «независимая» генерации оказались бы плохими интерпретациями этих понятий, то тогда надо было бы просто искать для них другую детализированную интерпретацию или обходиться вообще без всякой детализации, удовлетворяясь теми общими словами, которыми эти точки зрения определены в §17).

В свою очередь, разделил эти точки зрения (точнее: акцентировал это разделение) я для того, чтобы показать, что в теории Кантора имеется логическая ошибка (обозначенная мною как *Homonymia* в соответствии со старинными названиями у древних логиков) и заключающаяся в том, что в рассуждениях перепрыгивают со Взгляда 1 на Взгляд 2 и обратно (видимо, сами того не замечая), и что эта ошибка делает несостоятельной всю теорию.

Следовательно, если Вы хотите защитить Канторовскую теорию, то Вам нужно «атаковать», т.е. опровергнуть именно вот ЭТО мое утверждение (и показать, что на самом деле никакого перепрыгивания нет).

После того, как я в §11.2 поместил «золотую теорему» теории множеств, которую тогда переписал из своей лекции 1981 года {TRANS1.414 = МОИ № 37, стр.54}, я обнаружил, что в той лекции она, оказывается, давалась в сокращенном виде в то время, как в моем конспекте книги Александрова имеется в полном виде. (Вот, так бывает, когда пишешь с 30-летним перерывом: уже не помнишь, что где лежит).

Теперь я воспользуюсь случаем и приведу эту теорему еще раз – теперь уже, во-первых, в полном виде, а, во-вторых, буду «вмешиваться» в нее и показывать ошибку.

Ничего страшного нет в том, что я даю ее вторично – это поистине ключевая теорема Канторовской теории множеств, всё равно что теорема Пифагора для геометрии. До этой теоремы Александров доказывает одну за другой много теорем, и во всех результат один – и такое, и такое, и этакое множество «счетны», т.е. равномощны с множеством натуральных чисел.[25] А здесь впервые (!) появляется множество, которое не счетно, т.е. («по-ихнему») превосходит счетное множество по «мощности», т.е. по количеству элементов!

И вот, если окажется, что на самом-то деле никакой превосходящей «мощности» нет, то и не начинается никакое построение всех дальнейших зданий, – а просто продолжается предыдущий серый ряд: все множества «счетны», «равномощны» и т.д.

Поэтому данная теорема поистине ключевая: от нее зависит, начнется канторовская стройка, – или не начнется. Так что не пожалеем еще немножко места и времени на столь важный вопрос!

Вот эта теорема, теперь с моими комментариями; разбираем ее на примере, когда X = {1, 2, 3, 4}, Y = {a, b}, а Y^X изображено на Рис.5 (но при этом, разумеется, имеем в виду и общий случай):

§19. Пятнадцатая теорема Александрова

Теорема 15. Пусть X и Y – два произвольных непустых множества, удовлетворяющих тому единственному условию, чтобы Y состояло более чем из одного элемента. Множество всех различных отображений множества X в множество Y имеет мощность большую, чем мощность множества X.

---

[25] Теорема 1. «Всякая часть счетного множества есть либо конечное, либо счетное множество». Теорема 2. «Сумма конечного или счетного числа конечных или счетных множеств есть конечное или счетное множество». Теорема 3. «Всякое бесконечное множество M содержит счетное подмножество». Теорема 5. «Присоединяя к бесконечному множеству A счетное или конечное множество B, получим множество $A \cup B$, эквивалентное множеству A». Теорема 7. «Множество P всех пар натуральных чисел счетно». Теорема 8. «Множество всех рациональных (т.е. целых и дробных) чисел счетно». Теорема 9. «Множество S всех конечных последовательностей, составленных из элементов данного счетного множества D, есть счетное множество». Теорема 10. «Множество всех рациональных точек *n*-мерного пространства счетно». Теорема 11. «Множество всех многочленов $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ с рациональными коэффициентами счетно». Теорема 12 (Кантор). «Множество всех алгебраических чисел счетно».

При этом мы, естественно, считаем два отображения f_1 и f_2 множества X в множество Y различными, если по крайней мере для одного элемента $x \in$ X элементы $f_1(x)$ и $f_2(x)$ множества Y различны между собою.

Доказательство. Обозначим через Y^X множество всех отображений множества X в множество Y. В соответствии с определением неравенства мощностей мы должны доказать два утверждения:

1) Существует взаимно однозначное отображение множества X на некоторое подмножество множества Y^X.

2) Не существует взаимно однозначного отображения множества X на всё множество Y^X.

Для доказательства первого утверждения[26] выберем в множестве Y два каких-нибудь различных элемента y' и y'' и для каждого элемента x_0 множества X построим отображение fx_0 множества X в множество Y следующим способом: образ данного элемента x_0 при отображении fx_0 есть $fx_0(x_0) = y'$, а образ всякого отличного от x_0 элемента $x \in$ X при отображении fx_0 есть $fx_0(x) = y''$. Различным элементам x_1, x_2 множества X соответствуют различные отображения; в самом деле

$$fx_1\,(x_1) = y'$$
$$fx_2\,(x_1) = y''.$$

Итак, нами установлено взаимно однозначное соответствие между множеством X и частью множества Y^X.

Докажем теперь, что не существует никакого взаимно однозначного соответствия между множеством X и множеством Y^X.[27]

Предположим, что такое соответствие существует, и обозначим через $f^{\,\xi}$ тот элемент множества Y^X, который в силу этого соответствия отвечает элементу ξ множества X.[28] Искомое противоречие мы получим, если найдем элемент f множества Y^X, отличающийся от всех f^{ξ}.

Такой элемент f, т.е. такое отображение множества X в множество Y, мы построим следующим образом. Рассмотрим произвольный элемент ξ множества X; образ этого элемента при отображении f^{ξ} есть элемент $f^{\xi}(\xi)$ множества Y. Определим теперь $f(\xi)$, положив $f(\xi) = \eta$, где η – произвольный элемент множества Y, выбранный под единственным условием, чтобы он был отличен от элемента $f^{\,\xi}(\xi)$[29] (это условие всегда выполнимо, так как, по предположению, множество Y содержит по крайней мере два элемента).

Мы утверждаем, что отображение f отлично от всех отображений $f^{\,\xi}$.[30] В самом деле, если бы f совпадало с некоторым определенным f^{ξ}, то, в частности, для элемента $\xi \in$ X мы имели бы

$$f(\xi) = f^{\xi}(\xi),$$ [31]

вопреки определению отображения f. Теорема этим доказана.

Замечание 1. Только что изложенная теорема, принадлежащая к числу замечательнейших предложений теории множеств, доказана, и притом приведенным здесь методом, основателем теории множеств Кантором. Самый этот метод доказательства известен под названием канторова диагонального процесса.

* * *

[26] **В.Э.:** Эту первую часть доказательства теоремы мы можем пропустить, так как не вызывает сомнений, что можно (взаимно однозначно) отобразить множество X на часть множества Y^X.

[27] **В.Э.:** То есть, что не существует ситуации, изображенной на Рис.5 в Таблице 3.

[28] **В.Э.:** Ну, например, если ξ = 8, то $f^{\,\xi}$ = {1–a, 2–b, 3–b, 4–b}, т.е. при этом отображении 1 отображается на *a*, а 2, 3 и 4 – на *b*.

[29] **В.Э.:** Ну, в нашем примере, значит, меняем местами *a* и *b*.

[30] **В.Э.:** А зря утверждаете: на Рис.5 Таб.3 же видно, что диагональный процесс не построил такого отображения f, которое не соответствовало бы ни одному X.

[31] **В.Э.:** То есть, в нашем примере, когда ξ = 8, речь идет о 8-й паре *x–y*, а такой пары вообще не существует; их всего 4. Следовательно, теорема не может считаться доказанной, если мы держимся «независимой генерации» (или Взгляда 2 – канторовского взгляда, между прочим!). Что же, попытаемся в таком случае интерпретировать это доказательство для варианта «зависимая генерация» (или Взгляда 1): см. Рис.5 Таб.2. Да – теперь не существует взаимно-однозначного соответствия между множеством X и множеством Y^X (это и на глаз видно, что Y^X длиннее чем X). Но только это ведь та точка зрения, для которой и множество XY больше, чем X, и (положительных) четных чисел меньше, чем натуральных. Утверждение теоремы можно считать верным только тогда, если перескочить на Взгляд 1.

Таблица 2. (Зависимая генерация)		
Y	X	Y^X
a	1	**1–a** 2–a 3–a 4–a
b	2	1–a **2–a** 3–a 4–b
	3	1–a 2–a **3–b** 4–a
	4	1–a 2–a 3–b **4–b**
		1–a 2–b 3–a 4–a
		1–a 2–b 3–a 4–b
		1–a 2–b 3–b 4–a
		1–a 2–b 3–b 4–b
		1–b 2–a 3–a 4–a
		1–b 2–a 3–a 4–b
		1–b 2–a 3–b 4–a
		1–b 2–a 3–b 4–b
		1–b 2–b 3–a 4–a
		1–b 2–b 3–a 4–b
		1–b 2–b 3–b 4–a
		1–b 2–b 3–b 4–b

Таблица 3. (Независимая генерация)		
Y	X	Y^X
a	1	**1–a** 2–a 3–a 4–a
b	2	1–a **2–a** 3–a 4–b
	3	1–a 2–a **3–b** 4–a
	4	1–a 2–a 3–b **4–b**
	5	1–a 2–b 3–a 4–a
	6	1–a 2–b 3–a 4–b
	7	1–a 2–b 3–b 4–a
	8	1–a 2–b 3–b 4–b
	9	1–b 2–a 3–a 4–a
	10	1–b 2–a 3–a 4–b
	11	1–b 2–a 3–b 4–a
	12	1–b 2–a 3–b 4–b
	13	1–b 2–b 3–a 4–a
	14	1–b 2–b 3–a 4–b
	15	1–b 2–b 3–b 4–a
	16	1–b 2–b 3–b 4–b

Рис.5. Два варианта при установлении «факта», что множество Y^X превосходит по мощности множество X: либо **1)** мы пользуемся Взглядом 1 (возможно, интерпретированным как «зависимая генерация»), и тогда диагональный процесс создает новый элемент, не соответствующий ни одному X; либо **2)** мы пользуемся Взглядом 2 (возможно, интерпретированным как «независимая генерация»), и тогда диагональный процесс не создает нового элемента, который не соответствовал бы ни одному X.

Итак, Дмитрий Юрьевич, видите, для чего нужны «зависимая генерация» и «независимая генерация» и их до-веданские прототипы «Взгляд 1» и «Взгляд 2».

Переведите глаза на рисунке 5 с одной таблицы на другую и обратно: чик – чик! чик – чик! чик – чик!... Щелкает тумблер: либо Взгляд 1 (и тогда Y^X действительно больше, чем X, но и другие множества тоже больше – или меньше), либо Взгляд 2 (и тогда Y^X ни черта не больше X, и нет тогда никаких канторовских каскадов бесконечностей, и все бесконечные множества равномощны и одинаковы как серенькие мышки!).

Вот Вам мишень для атаки – ЭТО оспорьте!

И еще один момент. Обратите внимание, что в формулировке 15-й теоремы Александрова не оговаривается, что речь идет о бесконечных множествах. (Единственное условие: чтобы Y имело минимум 2 элемента). Стало быть, всё это рассуждение и доказательство одинаково действует как на конечные, так и на бесконечные множества, и пример, изображенный на Рис.5 – вполне законный частный случай теоремы. И то превосходство в числе элементов Y^X над X, которое мы в Таб.2 видим непосредственно визуально, – это превосходство здесь, в 15-ой теореме, доказывается диагональным процессом.

Этот факт особенно отчетливо показывает, что Александров (и прочие математики, разумеется), сейчас находятся в области Таблицы 2 (а не Таблицы 3!) и рассуждают в рамках «зависимой генерации» (Взгляда 1 – неканторовского взгляда!).

Если бы они последовательно находились в области Таблицы 3 («независимой генерации или Взгляда 2), то там просто вступили бы в силу те аргументы, о которых я говорил в §11.1 и §12 – о том, что n и 2^n не могут быть[32] одинаковыми бесконечностями и поэтому диагональный процесс провести невозможно. Но они не находятся в области Таблицы 3; они диагональным процессом доказывают ту истину, которая нам «интуитивно» ясна из соображений Взгляда 1!

И поэтому я вынужден акцентировать разделение Взгляда 1 и Взгляда 2 (или «зависимой генерации» и «независимой генерации») и фиксировать перескакивание математиков с одного взгляда на другой или, иными словами, логическую ошибку *Homonymia*.

А если они в 15-ой теореме о множестве отображений Y^X рассуждают в рамках Взгляда 1, то почему они в теореме 7 (о парах натуральных чисел), в теореме 8 (о множестве всех рациональных чисел), в теореме 9 (о всех конечных последовательностях), в теореме 10 (о

[32] 2^n в случае, когда Y состоит из двух элементов; если же Y состоит из y элементов, то будет y^n.

рациональных точках *n*-мерного пространства), в теореме 11 (о многочленах с рациональными коэффициентами), в теореме 12 (об алгебраических числах) – почему они во всех этих местах тоже не рассуждают в рамках Взгляда 1?

Почему?

При этом взгляде (Взгляде 1) там тоже получится превосходящая мощность!

А при Взгляде 2 и у Y^X нет превосходящей мощности (так как диагональный процесс в этом случае не проходит; он проходит только при Взгляде 1).

§20. Объективная математическая истина у Кантора

То, что математики дальше строят после «золотой» 15-й (по Александрову) теоремы и ей подобных (выводы о том, что якобы существует мощность континуума и другие, еще бóльшие мощности, что якобы трансцендентных чисел неизмеримо больше, чем алгебраических и всё такое в этом духе), – всё это претендует на то, что оно является объективной математической истиной такого же порядка, как, скажем, математические факты, что площадь круга $S = \pi R^2$ или объем шара $V = 4/3\ \pi R^3$.

Эти последние факты существуют в (объективном!) «платоновском мире» {PENRO2.VE2 = МОИ № 14, стр.96}, а те «факты», которые якобы обнаруживаются после канторовской «золотой теоремы», в платоновском мире НЕ существуют.

Но что же в платоновском мире существует реально в том месте, где должны были находиться все эти канторовские зáмки? А находится там некоторое объективно существующее различие в структуре элементов множеств. Эти различия в некоторых случаях позволяют диагональный процесс запустить (уж чем бы он ни кончился), а в других случаях не позволяет.

Таблица 4.

X	Y	XY
1	1	**1**–1
2	2	1–**2**
3	3	2–1
		1–3
		2–2
		3–1
		3–2
		2–3
		3–3

Возьмем, например, 10-ую теорему Александрова («Множество всех рациональных точек *n*-мерного пространства счетно»). Упростим ее: вместо рациональных точек возьмем натуральные точки, размерность возьмем $n = 2$, и посмотрим всё это на конечном примере, аналогично тому, как мы это делали с множеством Y^X в Таблице 2 и Таблице 3. (Это изображено в Таблице 4; в множестве XY элементы расположены в порядке возрастания «высоты пары», как это делалось Александровым для теоремы 7: «Множество P всех пар натуральных чисел счетно»).

Попытаемся теперь (точно так же, как это делалось в 15-ой теореме для конечного случая множества Y^X) при помощи диагонального процесса доказать, что мощность множества XY больше мощности множества X, и что между ними «*не существует никакого взаимно-однозначного соответствия*» (формулировка из доказательства 15-ой теоремы).

Таблица 5.

X	Y	Z	XYZ
1	1	1	**1**–1–1
2	2	2	2–**1**–1
3	3	3	1–2–**1**
			1–1–2
			2–2–1
			2–1–2
			1–2–2
			3–1–1
			1–3–1
			1–1–3
			. . . .
			3–3–3

Диагональный процесс не удается: не хватает длины в элементах множества XY. Элементов в XY, конечно, больше, чем в X, как и в случае с Y^X, а вот длины элемента не хватает, чтобы можно было с триумфом объявить, что построен элемент, которого нет среди пронумерованных по X.

Возьмем три размерности для нашего (вырожденного) пространства. Это изображено в таблице 5. Теперь у нас диагональный процесс даже и удается! Но это, разумеется, только для конечного примера, когда в каждой размерности лишь три точки.

Вот эти различия в структурах элементов, то позволяющие, то не позволяющие запустить диагональный процесс, – эти различия и есть то объективное, что реально скрывается за построениями Кантора. И если теория множеств хочет не строить «воздушные замки», а действительно изучать математическую реальность платоновского мира, то именно эти различия структуры элементов и должны в ней фигурировать.

Но это будет уже совсем другая теория множеств.

§21. Конструктивисты

Вы написали:

> Ваши рассуждения о теореме Кантора напоминают мне конструктивизм (..) в математике. Насколько я понимаю, конструктивисты тоже не признают теорему Кантора и обходятся без теории множеств.

Да, аналогии с конструктивизмом проводили с самых первых шагов Веданской теории. Я еще не успел официально обратиться к Латвийской науке (16 февраля 1981 года), как еще 14 ноября 1980 года Гарри Гейдеман из нашего же Института электроники уже писал мне то, что запротоколировано в {NATUR3.2212 = МОИ № 36, стр.60}, а уже после обращения к Университету, 7 марта 1981 года университетские писали так (Паулис Кикуст, {NATUR3.2639 = МОИ № 36, стр.92}), что, мол, «*С конструктивизма и т.п. надо было начинать, добавляя, что нас интересуют и механизмы мозга*». (Это неверно: мое дело, с чего мне начинать и как я пришел к тому, к чему пришел, а конструктивисты в этом никакой роли не играли).

Но налицо были попытки с первых же шагов умалять самостоятельность Веданской теории и рисовать дело так, что я, мол, только повторяю то, что уже сделано конструктивистами. И в конце всей эпопеи с латвийской «наукой» тоже так и в общем-то и считалось, что я просто повторяю конструктивистов, а в чем я с ними не совпадаю, так это – неверно. Как резюмировал один из врагов (чл.корр. АН Латвии Вилнис Зариньш 13 декабря 2000 года): у меня «всё, что правильно, не оригинально, а всё, что оригинально – неправильно». (При этом, разумеется, такие заявления были абсолютно голословными, какая-либо аргументация начисто отсутствовала, а знакомство заявителей с Веданской теорией было более поверхностным, чем даже шапочное).

После слов Гейдемана (и еще до обращения в Университет) я в начале 1981 года ознакомился с концепцией конструктивистов и провел сравнение в виде «диалогов» с двумя представителями конструктивистов – А.А. Марковым {NATUR3.2308 = МОИ № 36, стр.65} и Р.Л. Гудстейном[33] {NATUR3.2356 = МОИ № 36, стр.69}. После этого я конструктивистами специально больше не интересовался – если только случайно попадались они мне в каких-нибудь книжках.

В тех «диалогах» содержится описание различий конструктивизма и Веданской теории так, как они мне виделись 30 лет назад, а здесь обрисую то, как это видится сегодня.

В первую очередь надо сказать, что я никогда не ощущал никакой «духовной близости» с конструктивизмом – ни тогда, когда Веданская теория зарождалась, ни позже, когда меня упорно и упрямо связывали с конструктивизмом. Если уж связывать меня с каким-нибудь из известных направлений математики (интуиционизмом, конструктивизмом, формализмом и т.д.), то это – с математическим платонизмом. Только с ними я сам ощущаю некоторую «духовную близость».

Я – платонист, но такой платонист, который (в отличие от других) может объяснить, откуда «платоновский мир» берется и что он из себя представляет.

Если смотреть в самый корень дела, то подход конструктивистов можно охарактеризовать так: Вот, им не нравятся те результаты, которые получаются при «теоретико-множественном подходе», и они решают всю эту область просто исключить из рассмотрения – строить рядом свое собственное здание, никак не опровергая то, что построено «множественниками». А.А. Марков заявляет: «*В конструктивной математике не применяется характерная для теоретико-множественной математики абстракция актуальной бесконечности, связанная с рассмотрением никогда не завершаемых процессов как бесконечно продолженных и тем самым как бы завершенных*» {NATUR3.2340 = МОИ № 36, стр.67}.

А у Веданской теории совсем другой подход. Я не строю «свое здание» рядом с «их» зданием; я объясняю, что на самом деле означает то, что построено ими. Я не отказываюсь от «абстракции актуальной бесконечности», не исключаю ее из теории, а объясняю, КАК, какими

[33] Это тот же Гудстейн, который придумал «гудстейнатор» из {PENRO1 = МОИ № 14, стр.9}.

программными средствами, в мозге-компьютере можно получить актуальную бесконечность (и тем самым: какими свойствами она на самом деле обладает).

Насколько мне известно, конструктивисты не тычут пальцем в 15-ую теорему Александрова, указывая, что там имеются такие-то, вот, и такие-то конкретные ошибки. Они просто отбрасывают все эти теоремы. А я, как видите, не отбрасываю, а тыкаю.

Я не отказываюсь от понятия множества; наоборот, оно в Веданской теории – одно из самых фундаментальных (см. Рис.1 выше). Просто теория множеств должна быть построена правильно (а не на основе логических ошибок и вытекающих из них фантазий).

Я не отказываюсь от платоновского «мира идей»; я объясняю, какими программными средствами его можно создать.

А.А. Марков определяет: «*Конструктивная математика – это абстрактная наука о конструктивных процессах, человеческой способности осуществлять их и о их результатах – конструктивных объектах*» {NATUR3.2309}.

В такой формулировке это очень похоже на Веданскую теорию. Но если мы начинаем смотреть конкретно (например, как понятие числа вводят конструктивисты {NATUR3.2323} и как Веданская теория), то это «день и ночь». У Веданской теории проекты систем, которые любой сколь-нибудь квалифицированный программист легко превратит в работающие программы (искусственного интеллекта). А у конструктивистов – просто спекуляции (если их рассматривать как проекты реальных программ искусственного интеллекта – на что они в общем-то даже и не рассчитаны –, то это проекты просто дилетантские).

Всё это и не дает мне возможности ощутить «духовную близость» с конструктивистами.

Их путь – неправильный.

А правильный путь – это математический платонизм, но платонизм, встроенный в компьютер на профессиональном уровне программирования искусственного интеллекта.

2011.02.24 02:25

Глава 4. Переписка «24 февраля»

§22. Письма

от Valdis Egle <egle.valdis@gmail.com>
кому Dmitrii Manin <dmanin@ix.netcom.com>
дата 24 февраля 2011 г. 13:21
тема February 24
отправлено через gmail.com

Добрый день!
Ответ в книге POTI-2 на сайте.

В.Э.

от Dmitrii Manin <dmanin@ix.netcom.com>
кому Valdis Egle <egle.valdis@gmail.com>
дата 24 февраля 2011 г. 17:53
тема Re: February 24
подписан ix.netcom.com

> *Ответ в книге POTI-2 на сайте*.

Ну знаете, Вальдис, это просто невежливо! Либо пришлите текст ответа, либо хоть ссылку дайте – не помню я адрес сайта, и грузить оттуда долго.

– М

от Dmitrii Manin <dmanin@ix.netcom.com>
кому Valdis Egle <egle.valdis@gmail.com>
дата 27 февраля 2011 г. 6:00
тема Re: February 16
подписан ix.netcom.com

Добрый день, Вальдис. Меня все-таки одолело любопытство, и я нашел Ваш ответ на мои замечания. Вижу, что мне не удалось посеять в Вас сомнение.

Давайте сделаем так:

– Вы делаете одно короткое утверждение, которое противоречит канторовской теории множеств, и показываете, каким образом оно ей противоречит.

– Я при необходимости задаю Вам дополнительные вопросы, чтобы убедиться, что мы одинаково понимаем, о чем речь.

– Я показываю, что Ваше утверждение либо неверно, либо верно, но не противоречит канторовской теории множеств, либо бессмысленно.

Но для этого нужно ограничиться каким-нибудь конкретным утверждением, потому что о философии бесконечностей можно спорить бесконечно, и это занятие мне неинтересно, потому что оно бесплодно.

– M

от Valdis Egle <egle.valdis@gmail.com>
кому Dmitrii Manin <dmanin@ix.netcom.com>
дата 27 февраля 2011 г. 13:35
тема Re: February 16
отправлено через gmail.com

Здравствуйте, Дмитрий Юрьевич.

Хорошо, самое первое такое утверждение:

«Не существует мощности континуума».

Это было требуемое краткое утверждение, противоречащее теории Кантора. Но несколько слов всё-таки вокруг этого утверждения. Не я должен доказывать, что мощности континуума не существует, а Кантор, что она существует. Он это и делает, и всё было бы хорошо, если бы в этом доказательстве не было бы ошибки. Но она есть – видимо, трудно уловимая, раз ее так долго не заметили, – но есть. И обсуждение ошибок в математических доказательствах – это не совсем философия.

В.Э.

от Dmitrii Manin <dmanin@ix.netcom.com>
кому Valdis Egle <egle.valdis@gmail.com>
дата 28 февраля 2011 г. 4:28
тема Re: February 16
подписан ix.netcom.com

Здравствуйте, Вальдис. Спасибо за быстрый ответ. Давайте уточним это утверждение. Вы говорите, что любой бесконечной последовательности цифр можно поставить в соответствие одно натуральное число так, что никакие две последовательности не будут занумерованы одним и тем же числом, верно? Если верно, то такое утверждение надо доказывать, и лучше всего – указать способ такой нумерации, т.е. вычисления порядкового номера любой заданной последовательности. Вы можете это сделать?

– M

от Valdis Egle <egle.valdis@gmail.com>
кому Dmitrii Manin <dmanin@ix.netcom.com>
дата 1 марта 2011 г. 14:54
тема Re: February 16
отправлено через gmail.com

Здравствуйте! Извините, вчера не получилось подойти к Интернету.

Да, этот вопрос очень основательно (и долго) обсуждался с преподавателями ЛГУ К. Подниексом и П. Кикустом в «Канториане» 25–30 лет назад. Дело тут обстоит так.

Как я уже упоминал также и в современном описаниии канторовской проблемы, реальное отличие «счетных» и «континуумных» множеств состоит не в количестве элементов, а в ДЛИНЕ элемента. У «континуумных» множеств эта длина становится бесконечной, в то время, как у «счетных» множеств остается конечной (из-за чего в первых можно, а во вторых нельзя запускать диагональный процесс).

Из-за того, что длина элемента бесконечна, такие множества нельзя генерировать по линейному алгоритму, т.е. такому, который генерирует 1-й, потом 2-й, потом 3-й элемент и т.д. (при такой генерации алгоритм должен был бы постоянно перескакивать через бесконечность очередного элемента).

Поэтому алгоритм генерации может быть только таким, который одновременно идет к двум бесконечностям. Он приводился уже и в POTI-2:

0
1

00
01
10
11

и т.д. – генерируется растущая матрица. (Алгоритм А).

На каждом отдельном шаге этой генерации мы можем перенумеровать все элементы, и эти номера либо закодированы в самой матрице (в нашем примере: в двоичном представлении), либо мы можем считать, что у нас есть два параллельно работающих алгоритма А1 и А2, один из которых генерирует натуральные числа (в матрице), а другой – бесконечные последовательности ноликов и единиц (тоже в матрице).

Таким образом мы можем установить взаимно-однозначное соответствие между натуральными числами и канторовским «континуумом» из 0 и 1.

Ну, и когда я это предъявил преподавателям Латвийского Университета (теперь профессоры, а тогда они еще не были профессорами), то они стали по-всякому изворачиваться и выкручиваться: утверждать, что такой алгоритм вообще не алгоритм (хотя я им даже программу на Ассемблере предъявил, которая по такому алгоритму работает), требовали, чтобы алгоритм обязательно был линейный, утверждали, что алгоритм А генерирует только конечные последовательности 0 и 1 (хотя не смогли указать, где же будет последняя сгенерированная цифра, и не смогли пояснить, что же они в таком случае понимают под терминами «бесконечный» и «конечный»).

Словом, с их стороны пошла обычная бессильная чушь.

Естественно, что я не мог признать их «аргументы» состоятельными.

Ну да, конечно, алгоритм А отличается от линейных алгоритмов, при которых уже по ходу работы можно видеть, какой имеется первый элемент, какой второй и т.д. Здесь, при алгоритме А, номера «скачут» в ходе генерации, и эта «скачка» останавливается только в актуальной бесконечности (когда бесконечно работающая программа завершила работу – но это ведь обычная математическая абстракция). (И индукция тоже: при каждом отдельном шаге все сгенерированные последовательности перенумерованы, и у нас нет оснований полагать, что с приближением к бесконечности что-то в существовании этого соответствия изменится).

Да, алгоритм А, устанавливающий 1–1 соответствие между «континуумом» и «счетным множеством», отличается нелинейностью от других алгоритмов нумерации. В этом и есть объективное различие «континуума» от «счетного множества». Но это объективное различие относится не к КОЛИЧЕСТВУ элементов в множествах (т.е. к «мощности»), а к ДЛИНЕ элемента. И надо смотреть на это трезвыми глазами и говорить так, как оно есть на самом деле (и как говорю я), а не измышлять сказки о том, что якобы в «континууме» больше элементов, чем в «счетном множестве».

В.Э.

от Dmitrii Manin <dmanin@ix.netcom.com>
кому Valdis Egle <egle.valdis@gmail.com>
дата 2 марта 2011 г. 7:42
тема Re: February 16
подписан ix.netcom.com

Здравствуйте, Вальдис. Извините тоже, что отвечаю не сразу – но у нас наконец пошел любопытный разговор, это требует обдумывания, да и времени не всегда хватает.

> Как я уже упоминал также и в современном описании канторовской проблемы, реальное отличие «счетных» и «континуумных» множеств состоит не в количестве элементов, а в ДЛИНЕ элемента. У «континуумных» множеств эта длина становится бесконечной, в то время, как у «счетных» множеств остается конечной (из-за чего в первых можно, а во вторых нельзя запускать диагональный процесс).

Я понимаю, что Вы имеете в виду. Если, например, говорить о числах, то все рациональные числа можно записать конечными последовательностями символов (хоть в виде обыкновенной дроби, хоть в позиционной записи)[34], а для записи типичного иррационального числа потребуется бесконечная последовательность символов.

Но это никак не противоречит стандартной математике, хотя и сформулировано в нестандартной терминологии. Идем дальше.

> *Таким образом мы можем установить взаимно-однозначное соответствие между натуральными числами и канторовским «континуумом» из 0 и 1.*

А вот это неверно. Ни одно сгенерированное Вашим процессом число не будет, например, точно квадратным корнем из половины. Значит, Вы перенумеруете не все числа.

– M

от Valdis Egle <egle.valdis@gmail.com>
кому Dmitrii Manin <dmanin@ix.netcom.com>
дата 2 марта 2011 г. 21:57
тема Re: February 16
отправлено черезgmail.com

Добрый день, Дмитрий Юрьевич!

«*...все рациональные числа можно записать конечными последовательностями символов (хоть в виде обыкновенной дроби, хоть в позиционной записи), а для записи типичного иррационального числа потребуется бесконечная последовательность символов*.»

Мне кажется, что это не совсем точно, и по двум пунктам:

1) Даже для «обычной» дроби типа 1/3 в позиционной записи часто требуется бесконечная последовательность цифр – только периодическая, в отличие от иррациональных, бесконечных и непериодических последовательностей.

2) Обычная «счетная» бесконечность (натуральных чисел) – она тоже «богата и хитра». Ведь «в том конце» этой бесконечности и сами натуральные числа уже требуют бесконечного количества цифр для их обозначения – во всяком случае так нам говорит наша «интуиция» или, если по Веданской теории, то бокоанализ программ генерации натуральных чисел. И что будет происходить с натуральными числами, требующими бесконечное число знаков для их записи (а, тем более, с дробями – соотношениями – таких чисел), это не такой-то простой вопрос. Мы вернемся к некоторым аспектам этого вопроса когда-нибудь потом; думаю, довольно скоро).

«*Ни одно сгенерированное Вашим процессом число не будет, например, точно квадратным корнем из половины. Значит, Вы перенумеруете не все числа*.»

Давайте я не буду спорить с этим Вашим утверждением, а попытаюсь сначала его понять, т.е. уяснить себе Вашу позицию. Это мне тем более интересно потому, что четверть века назад в похожей ситуации латвийские профессора (будущие) так и не смогли мне свою позицию объяснить (они просто не отвечали на неудобные для них вопросы).

---

[34] **В.Э.:** В позиционной записи не все рациональные числа можно записать конечными последовательностями символов (даже если речь идет о дробях, составленных из двух конечных натуральных чисел). Но говоря «*Я понимаю, что Вы имеете в виду*» и приводя далее эти утверждения, Д.Ю. Манин всё-таки неправильно понимает то, что я имел в виду в том утверждении, на которое он отвечает. Ведь как Кантор нумерует рациональные числа? Он составляет ПАРЫ натуральных чисел и потом их нумерует. Таким образом, в множестве, которое он генерирует, элемент сам всегда состоит из ДВУХ элементов (это пара натуральных чисел). А для иррациональной дроби невозможно найти такое представление, чтобы она состояла из конечного числа элементов (будь это два элемента, как у рациональных чисел, будь это пять или миллион). Вот что имелось в виду.

Итак, в целях уяснения Вашей позиции позвольте задать Вам несколько вопросов:

1) Вот, мы имеем алгоритм А (кажется, он достаточно четко определен, чтобы мы оба его понимали одинаково: в стартовой позиции он имеет две строчки – 0 и 1 –, а потом при каждом следующем шаге он каждую уже существующую строку превращает в две новые строки, добавляя к одной в конец 0, а другой в конец 1; можно также считать, что он начал работать на шаг раньше с пустой строкой в качестве стартовой). Можете ли Вы считать его генератором натуральных чисел? (Ну, абстрагируясь от того, что это на самом деле не собственно числа, а какие-то их обозначения, которые мы используем вместо самих чисел). Значит, вопрос: генерирует ли алгоритм А натуральные числа – или есть какие-то препятствия для такого взгляда?

2) Далее, можем ли мы считать тот же алгоритм А генератором двоичных представлений дробной части какого-то интервала между двумя натуральными числами, например, между 0 и 1, как в классическом примере Кантора, или между 1 и 2 (тогда в связи с ним можно будет говорить о дробной части квадратного корня из двух) или между 3 и 4 (тогда можно будет говорить о дробной части числа π) и т.д.? (Это вопрос почти риторический, поскольку пока еще не поднимается вопрос о том, генерирует ли он ВСЕ такие дроби, а просто вопрос, можно ли вообще его считать генератором таких дробей, так что ответ, видимо, будет «да»).

3) Пусть мы теперь имеем алгоритм I, который генерирует двоичное представление дробной части числа π по всем математическим правилам на основании известных рядов. Этот алгоритм I может сгенерировать данную последовательность до любого наперед заданного n-того знака. Но алгоритм А тоже может сгенерировать (среди других) такую же последовательность тоже до любого наперед заданного n-того знака (если мы абстрагируемся от требуемых ресурсов, конечно). Видите ли Вы какую-нибудь разницу между последовательностью, сгенерированной алгоритмом I и алгоритмом А до n-того знака? (Речь не идет о том, что в продуктах алгоритма А нельзя отличить дробную часть π от других сгенерированных им последовательностей; это ясно; речь идет о самих последовательностях как продуктах – битах в памяти компьютера или напечатанных знаках на бумаге и т.п.).

4) Что означают Ваши слова, что «*Ни одно сгенерированное Вашим процессом число не будет, например, точно квадратным корнем из половины*» (или, как легко понять, также и точно дробной частью π)? В каких отношениях эта «точная дробная часть» находится с последовательностями, создаваемыми алгоритмами I и А? Существует какой-то n-тый знак, до которого они не дойдут? Один из них, или оба? Или эта «точная дробная часть» каким-то образом окажется вне матрицы, генерируемой алгоритмом А? Или она вообще не последовательность нулей и единиц? Тогда что она такое? Мне просто не понятно, какова именно – та ситуация, которую Вы имеете в виду.

от Dmitrii Manin <dmanin@ix.netcom.com>
кому Valdis Egle <egle.valdis@gmail.com>
дата 3 марта 2011 г. 7:50
тема Re: February 16
подписан ix.netcom.com

Добрый день, Вальдис

> 1) Даже для «обычной» дроби типа 1/3 в позиционной записи часто требуется бесконечная последовательность цифр... 2) Обычная «счетная» бесконечность (натуральных чисел) – она тоже «богата и хитра»...

Давайте на это не будем пока отвлекаться. Если хотите, можно будет вернуться потом, а пока сосредоточимся на конкретике.

> 1) Вот, мы имеем алгоритм А (кажется, он достаточно четко определен, чтобы мы оба его понимали одинаково: в стартовой позиции он имеет две строчки – 0 и 1 –, а потом при каждом следующем шаге он каждую уже существующую строку превращает в две новые строки, добавляя к одной в конец 0, а другой в конец 1; можно также считать, что он начал работать на шаг раньше с пустой строкой в качестве стартовой). Можете ли Вы считать его генератором натуральных чисел?

Да, конечно – в двоичном представлении.

> 2) Далее, можем ли мы считать тот же алгоритм A генератором двоичных представлений дробной части какого-то интервала между двумя натуральными числами, например, между 0 и 1?

Да, опять же в двоичном представлении, если поставить десятичную точку-запятую в начале, он генерирует рациональные числа между 0 и 1. Мало того, для любого наперед заданного рационального числа можно указать, на каком шагу этот алгоритм его породит.

> 3) Пусть мы теперь имеем алгоритм I, который генерирует двоичное представление дробной части числа π по всем математическим правилам на основании известных рядов. Этот алгоритм I может сгенерировать данную последовательность до любого наперед заданного n-того знака. Но алгоритм A тоже может сгенерировать (среди других) такую же последовательность тоже до любого наперед заданного n-того знака (если мы абстрагируемся от требуемых ресурсов, конечно). Видите ли Вы какую-нибудь разницу между последовательностью, сгенерированной алгоритмом I и алгоритмом A до n-того знака?

Конечно, нет – в продукции алгоритма A будут числа, двоичное представление которых до n-го знака совпадает с двоичным представлением дробной части π. Для любого наперед заданного n.

> 4) Что означают Ваши слова, что «Ни одно сгенерированное Вашим процессом число не будет, например, точно квадратным корнем из половины» (или, как легко понять, также и точно дробной частью π)?

Квадратный корень из половины не является рациональным числом. Любая конечная последовательность нулей и единиц выражает рациональное число. Следовательно, ни одна из них не выражает корень из половины. Каждая сгенерированная алгоритмом A последовательность является конечной последовательностью нулей и единиц. Следовательно, ни одна из них не выражает квадратный корень из половины.

> Или эта «точная дробная часть» каким-то образом окажется вне матрицы, генерируемой алгоритмом A?

Именно, вне. Потому что она не выражается **никакой** конечной последовательностью нулей и единиц.

– M

от Valdis Egle <egle.valdis@gmail.com>
кому Dmitrii Manin <dmanin@ix.netcom.com>
дата 3 марта 2011 г. 17:33
тема Re: February 16
отправлено через gmail.com

Здравствуйте, Дмитрий Юрьевич!

Ответы на первые три вопроса меня удовлетворяют и совпадают с моим мнением. Зафиксируем, что мы отныне можем считать алгоритм A одновременно генератором и натуральных чисел, и дробей в позиционном представлении. (И, так как они генерируются одним алгоритмом, то между этими множествами существует полное соответствие – что весьма важно).

Оговорка о двоичном представлении несущественна, так как двоичная система была избрана исключительно для того, чтобы рисуемые в тексте матрицы получались короче: при десятичной системе первая матрица имела бы 10 строк, вторая 100, а третья – 1000, и трудно рисовать матрицы с тысячью строк; в двоичной же системе строк соответственно лишь 2, 4 и 8. Но когда матрицы рисовать не надо, мы можем говорить и о таком варианте алгоритма A, который работает с более привычной нам десятичной системой.

Так вот, в десятичной системе обычная рациональная дробь 1/3 выражается <u>бесконечной</u> последовательностью цифр: 0,333333333333... (в двоичной, разумеется, аналогично). Соответственно, следующий вопрос к Вам:

1) Значит, алгоритм A <u>не</u> генерирует рациональную дробь 1/3 ? Или как?

Ответ на четвертый вопрос предыдущего письма мне по-прежнему не понятен. В связи с ним далее такой вопрос:

2) Что в Вашей системе понятий является определяющим признаком бесконечности? Какие последовательности Вы называете конечными и какие бесконечными?

В.Э.

от Dmitrii Manin <dmanin@ix.netcom.com>
кому Valdis Egle <egle.valdis@gmail.com>
дата 3 марта 2011 г. 18:08
тема Re: February 16
подписан ix.netcom.com

Здравствуйте, Вальдис

> Так вот, в десятичной системе обычная рациональная дробь 1/3 выражается бесконечной последовательностью цифр: 0,333333333333... (в двоичной, разумеется, аналогично). Соответственно, следующий вопрос к Вам: 1) Значит, алгоритм А НЕ генерирует рациональную дробь 1/3 ? Или как?

Нет, не генерирует. Точнее говоря, нельзя указать такое число N, что после N шагов работы алгоритма среди порожденных им чисел будет 1/3. Чем больше шагов, тем больше будет все более точных приближений к 1/3, но никогда вы не сможете остановить алгоритм, указать на одно из порожденных им чисел и гордо сказать: «Вот число 1/3!»

> Ответ на четвертый вопрос предыдущего письма мне по-прежнему не понятен. В связи с ним далее такой вопрос: 2) Что в Вашей системе понятий является определяющим признаком бесконечности? Какие последовательности Вы называете конечными и какие бесконечными?

Гм... Конечные – это такие, которые имеют конец, а бесконечные – это все остальные. Если без шуток, то конечное множество – это множество, количество элементов которого выражается (или ограничено сверху) определенным натуральным числом. Если говорить о множествах, порождаемых алгоритмами, то оно конечно, если можно указать число шагов N, за которое оно будет полностью порожденной.

Это не математически строгие определения – во-первых, я не математик, а во-вторых, тут надо очень аккуратно выражаться, если хотеть строгости. Но представление дает.

– М

от Valdis Egle <egle.valdis@gmail.com>
кому Dmitrii Manin <dmanin@ix.netcom.com>
дата 4 марта 2011 г. 19:08
тема Re: February 16
отправлено через gmail.com

Добрый день, Дмитрий Юрьевич!

1) Итак, раз алгоритм А не генерирует дробь 0,333333333333..., то, насколько я понимаю, Вы отзываете свое предыдущее утверждение, что алгоритм А генерирует только рациональные, но не иррациональные последовательности.[35] Теперь он не генерирует ни те, ни другие, если они бесконечны. Ну, это хоть немножко понятнее, потому что тогда было абсолютно непонятно, почему алгоритм А генерирует рациональные бесконечные последовательности, но не генерирует иррациональные (и, соответственно, нужно было искать различие именно в рациональности–иррациональности). Теперь по крайней мере они равноправны в своей бесконечности.

[35] **P.S.** Издержки писем, которые сочиняются в он-лайне без достаточной проверки: отзываемое утверждение, высказанное Д.Ю. Маниным в письме от 2 марта 2011 г. 7:42, на самом деле такое: «*все рациональные числа можно записать конечными последовательностями символов (хоть в виде обыкновенной дроби, хоть в позиционной записи)*».

2) Вот, Вы дали определение «*Если говорить о множествах, порождаемых алгоритмами, то оно конечно, если можно указать число шагов N, за которое оно будет полностью порожденной.*»

Очень хорошо! Совершенно совпадает с моим пониманием. Но ведь для алгоритма А, как для матрицы в целом, так и для каждой отдельной растущей последовательности, НЕЛЬЗЯ указать такое число шагов N, за которое они будут полностью порождены.

Именно поэтому я и считаю их бесконечными. А Вы утверждаете, что алгоритм А генерирует только конечные последовательности. Как это согласовать с Вашим определением?

3) Конечно, всякий алгоритм (бесконечный процесс) только приближается к своей «конечной цели», и достигает ее лишь в абстракции актуальной бесконечности. В <u>этом</u> смысле вообще ни один алгоритм – ни А, ни тот индивидуальный алгоритм I, который генерирует не все последовательности оптом (как А), а только одну последовательность, например квадратный корень от половины, ни диагональный процесс D – ни один алгоритм в <u>таком</u> смысле не генерирует ничего бесконечного.

Мне не понятна та <u>разница</u>, та, если выражаться образно, дискриминация, которую пытаются провести в отношении алгоритма А по сравнению с алгоритмами I и D. (Четверть века назад латвийские будущие профессора настаивали на том, что I генерирует бесконечную последовательность, а А нет, но не могли объяснить, почему это они так считают).

Так вот, теперь я Вас спрашиваю, есть ли по-Вашему мнению эта разница в отношении бесконечности продуктов между алгоритмами А, I и D – или нет ее?

Ведь если разницы нет, и все они генерируют только конечные приближения к бесконечности, то и D (диагональный процесс) тоже не генерирует «отсутствующую в перенумерованном множестве» бесконечную последовательность (и таким образом ничего не доказывает).

Или же мы считаем, что все эти алгоритмы генерируют бесконечные последовательности, понимая, что это, разумеется, некоторая абстракция.

А если разница (в отношении конечности-бесконечности продуктов) между этими алгоритмами есть, то в чем она заключается и чем вызывается?

В.Э.

от Dmitrii Manin <dmanin@ix.netcom.com>
кому Valdis Egle <egle.valdis@gmail.com>
дата 5 марта 2011 г. 4:57
тема Re: February 16
подписан ix.netcom.com

Здравствуйте, Вальдис

> 1) Итак, раз алгоритм А не генерирует дробь 0,333333333333..., то, насколько я понимаю, Вы отзываете свое предыдущее утверждение, что алгоритм А генерирует только рациональные, но не иррациональные последовательности.

Нет, не отзываю.[36] Этот алгоритм генерирует **только** рациональные числа, хотя и не **все** рациональные числа (только те, которые выражаются простыми дробями со степенью двойки в знаменателе). Для нас важно, что он не генерирует все числа, потому что это противоречит Вашему изначальному утверждению.

Есть и причина, почему я говорю именно об иррациональных числах. Есть другой алгоритм, который генерирует все рациональные, только не в позиционной записи, а в виде простых дробей. А вот такого, который бы генерировал вообще все вещественные числа из [0,1] нет и не может быть.

> Очень хорошо! Совершенно совпадает с моим пониманием. Но ведь для алгоритма А, как для матрицы в целом, так и для каждой отдельной растущей последовательности, НЕЛЬЗЯ указать такое число шагов N, за которое они будут полностью порождены.

---

[36] **В.Э.:** Ну, а утверждение «*все рациональные числа можно записать конечными последовательностями символов (хоть в виде обыкновенной дроби, хоть в позиционной записи)*» – это утверждение, видимо, всё-таки отзывается.

Я понял, где у нас с Вами недопонимание. Я называю «порожденным» объект, который порожден до конца. Если Ваш алгоритм должен работать бесконечно долго, чтобы породить какой-то объект, то я говорю, что он его не порождает.

Иначе говоря, мы глядим на результат работы алгоритма после N шагов – что там оказалось распечатано, то и порождено. Поэтому ясно, что ничего бесконечного никакой алгоритм породить не может.

> Именно поэтому я и считаю их бесконечными. А Вы утверждаете, что алгоритм A генерирует только конечные последовательности. Как это согласовать с Вашим определением?

Вот как: для любого объекта, порождаемого алгоритмом, можно указать число шагов, за которое он будет выведен (можно считать это определением слова «порожден»). Для любого числа вида $n/2^k$ это можно сделать. Для корня из половины – нельзя.

> 3) Конечно, всякий алгоритм (бесконечный процесс) только приближается к своей «конечной цели», и достигает ее лишь в абстракции актуальной бесконечности. В <u>этом</u> смысле вообще ни один алгоритм – ни A, ни тот индивидуальный алгоритм I, который генерирует не все последовательности оптом (как A), а только одну последовательность, например квадратный корень от половины, ни диагональный процесс D – ни один алгоритм в <u>таком</u> смысле не генерирует ничего бесконечного.

Угу.

> Мне не понятна та <u>разница</u>, та, если выражаться образно, дискриминация, которую пытаются провести в отношении алгоритма A по сравнению с алгоритмами I и D.

Алгоритм I генерирует приближения к числу π – другое счетное подмножество интервала [0,1], и в этом смысле ничем особенно не отличается.

Алгоритм D генерирует последовательность, не содержащуюся в матрице, и тем доказывает, что она не может содержать **все** возможные последовательности.

> Так вот, теперь я Вас спрашиваю, есть ли по-Вашему мнению эта разница в отношении бесконечности продуктов между алгоритмами A, I и D – или нет ее?

В смысле «бесконечности» никакой разницы нет.

> Ведь если разницы нет, и все они генерируют только конечные приближения к бесконечности, то и D (диагональный процесс) тоже не генерирует «отсутствующую в перенумерованном множестве» бесконечную последовательность (и таким образом ничего не доказывает).

Это неверно из-за одной тонкости. Диагональный процесс может ответить на вопрос «какая цифра стоит в диагональной последовательности на N-м месте?» для любого наперед заданного N. Поэтому он однозначно определяет бесконечную последовательность, не выписывая все ее члены (выписать их, конечно, невозможно за конечное время).

Вы ведь не будете возражать, что хотя десятичное представление числа 1/3 нельзя выписать за конечное время, это число и это представление однозначно определены (тем, что мы знаем, что на всех местах там стоят тройки). Так же и с диагональной последовательностью.

Но мы отвлеклись – мы ведь разбирали Ваше утверждение о том, что некий алгоритм генерирует все числа от нуля до единицы, а не диагональный процесс.

– M

от Dmitrii Manin <dmanin@ix.netcom.com>
кому Valdis Egle <egle.valdis@gmail.com>
дата 5 марта 2011 г. 5:26
тема Re: February 16
подписан ix.netcom.com

Вальдис, еще одно уточнение вдогонку: если дать ему достаточно времени, алгоритм A породит любую наперед заданную конечную последовательность.

Но он никогда не породит **все** конечные последовательности. И никогда не породит ни одной бесконечной последовательности.

– М

от Valdis Egle <egle.valdis@gmail.com>
кому Dmitrii Manin <dmanin@ix.netcom.com>
дата 5 марта 2011 г. 19:30
тема Re: February 16
отправлено через gmail.com

Здравствуйте, Дмитрий Юрьевич

Так, – если ни алгоритм А, ни алгоритм I и вообще ни один алгоритм не генерирует бесконечных последовательностей, то такая точка зрения по крайней мере не внутренне противоречива (какими мне представлялись мнения предыдущих диспутантов). Однако тогда проблема поворачивается «другим боком».

1) Согласно той «философии математики» (и вообще интеллекта), которой я придерживаюсь и которая оформлена в Веданскую теорию, все математические объекты как раз и есть порождения алгоритмов (мозга). Только через алгоритмы и определены «иррациональные числа» – как пределы, к которым эти алгоритмы стремятся (а достигают лишь через то, что в традиционной математике называется «абстракцией актуальной бесконечности», а в Веданской теории объясняется бокоанализом программ). Если соединить эти представления с Вашими объяснениями, то получается, что иррациональных чисел вообще нет, – а есть только конечные приближения к ним. Да! – при таком взгляде эти алгоритмы не порождают бесконечных последовательностей, – но не порождают просто потому, что те вообще не существуют.

Если же они все-таки по-Вашему существуют, то надо объяснить, что же это такое, так сказать, «ввести их».

2) Допустим, что Вы их «ввели», и назовем их «сущности-плюс» (т.е. некоторые сущности, существующие дополнительно к тому, что порождается алгоритмами). Тогда можно сформулировать следующий вопрос.

Выше в одном из писем мы договорились и согласились между собой о том, что алгоритм А можно рассматривать одновременно как генератор и натуральных чисел, и дробных частей какого-нибудь единичного интервала. Теперь, когда мы рассматриваем алгоритм А как генератор дробных частей, Вы утверждаете, что он не генерирует ВСЕ дроби этого интервала, а лишь часть – после этой части остается еще другая часть, состоящая из «сущностей-плюс».

Хорошо.

Но теперь рассмотрим тот же алгоритм А как генератор натуральных чисел. В таком случае в добавок к тому, что он генерирует, существует еще и такое же множество «сущностей-плюс», как и в первом случае. Ведь любой закон, по которому генерируются «конечные приближения» к иррациональной дроби, мы можем переформулировать так, что это генерируется не иррациональная дробь, а бесконечно большое натуральное число, для записи которого требуется бесконечно много цифр.

И ситуация в «счетном множестве» натуральных чисел будет точно такой же, как в «континууме» дробей: существуют натуральные числа, которые никакими алгоритмами не генерируются.

Если же Вы хотите исключить «сущности-плюс» из оборота в случае натуральных чисел, а сохранить у дробей, то это уже будет никакое не научное открытие и отражение какой-то объективной реальности, а просто волюнтарное решение: Вы <u>определили</u> «счетное множество» и «континуум» так, чтобы они отличались – и все дела.

3) Аналогия между дробью 0,333333... и алгоритмом D (диагональным процессом) всё же недостаточная. Если мы представим подпрограмму (процедуру-функцию), которая должна создавать эту дробь, то эта подпрограмма не нуждается ни в каких внешних данных: в ней достаточно зашить константу «3» и потом реплицировать ее до бесконечности. А подпрограмма для D сама по себе, конечно, проста и достаточно четко определена, однако она нуждается в таких исходных данных, которые необозримы и недостаточно четко определены. Поэтому достоверность суммарного результата этих двух подпрограмм будет различной.

В.Э.

от Dmitrii Manin <dmanin@ix.netcom.com>
кому Valdis Egle <egle.valdis@gmail.com>
дата 6 марта 2011 г. 0:07
тема Re: February 16
подписан ix.netcom.com

Дорогой Вальдис,

Давайте вернемся к нашей исходной задаче. Она формулируется так: можно ли перенумеровать все вещественные числа между нулем и единицей, т.е. поставить каждому в соответствие уникальный конечный номер?

Например, все натуральные числа можно перенумеровать: номер натурального числа N – это N. Заметьте, что для этого вообще не надо говорить ни о каких бесконечностях. Все четные числа тоже можно перенумеровать: номер числа 2N – это N. Можно перенумеровать и все рациональные числа от нуля до единицы: номер числа n/k, где $0 < n \le k$, равен $n+k*(k-1)/2$ (при такой нумерации каждое рациональное число будет пронумеровано даже многократно: 1/2, 2/4, 3/6 и т.д. получат разные номера!) И опять здесь ни слова нет о бесконечности.

А вот все вещественные числа перенумеровать нельзя – это и говорит диагональный процесс. Как ни нумеруй, останется незанумерованное число.

Давайте это тоже скажем без бесконечностей.

Предположим от противного, что у нас есть процедура, которая заданному вещественному числу может поставить в соответствие его номер. Тогда существует число, которого эта процедура не учла. Как мы докажем, что такое число есть? Мы укажем, как узнать любой его десятичный знак. Чтобы узнать N-й знак нашего числа, возьмем N-й знак числа с номером N, и если это девятка, то у нашего числа ноль, в противном случае N+1. Таким образом, если задана нумерация вещественных чисел, наше число однозначно определено, и не совпадает по построению ни с одним из пронумерованных чисел. Стало быть, оно не пронумеровано. Стало быть, пронумеровать все вещественные числа нельзя. И никаких бесконечностей.

Заметьте, Ваш алгоритм А тоже нумерует вещественные числа (номер числа – это номер шага, на котором алгоритм его выписывает). Но там было просто указать число, которое он никогда не выпишет. Доказательство Кантора гораздо мощнее: оно доказывает, что никакой алгоритм всех вещественных чисел не перенумерует. Для любого можно указать число, которое он пропустил.

> Если соединить эти представления с Вашими объяснениями, то получается, что иррациональных чисел вообще нет – а есть только конечные приближения к ним. Да! – при таком взгляде эти алгоритмы не порождают бесконечных последовательностей, – но не порождают просто потому, что те вообще не существуют.

Совершенно верно. Если считать, что существует только те числа, которые можно точно записать в позиционной системе счисления, то окажется, что куча полезных чисел не существует. Наверное, можно строить такую математику, но это будет жутко неудобно. Представьте: обходиться без π, без e. Синус 30 градусов существует, а косинус почему-то нет.

Длина диагонали единичного квадрата не существует. Кошмар.

> Если же они все-таки по-Вашему существуют, то надо объяснить, что же это такое, так сказать, «ввести их».

Элементарно: определим корень из двух как число, которое при умножении на себя дает число два. Какие проблемы?

> Теперь, когда мы рассматриваем алгоритм А как генератор дробных частей, Вы утверждаете, что он не генерирует ВСЕ дроби этого интервала, а лишь часть – после этой части остается еще другая часть, состоящая из «сущностей-плюс». Хорошо. Но теперь рассмотрим тот же алгоритм А как генератор натуральных чисел. В таком случае в добавок к тому, что он генерирует, существует еще и такое же множество «сущностей-плюс», как и в первом случае.

Натуральные числа выражаются **конечными** последовательностями цифр. Вы хотите ввести еще новые числа, которые выражаются **бесконечными** последовательностями цифр? Флаг Вам в руки. Я думаю, Вы получите так называемые «трансфинитные числа» или что-нибудь близкое к ним, каждое такое число будет больше любого натурального числа. Такая математика тоже есть, хотя я про нее почти ничего не знаю.

> И ситуация в «счетном множестве» натуральных чисел будет точно такой же, как в «континууме» дробей: существуют натуральные числа, которые никакими алгоритмами не генерируются.

Э, нет! Множество трансфинитных чисел уже несчетно. Если к натуральным числам добавить «числа», выражаемые бесконечными последовательностями цифр, их уже нельзя будет занумеровать. Никаких противоречий.

> 3) Аналогия между дробью 0,333333... и алгоритмом D (диагональным процессом) всё же недостаточная. Если мы представим подпрограмму (процедуру-функцию), которая должна создавать эту дробь, то эта подпрограмма не нуждается ни в каких внешних данных: в ней достаточно зашить константу «3» и потом реплицировать ее до бесконечности. А подпрограмма для D сама по себе, конечно, проста и достаточно четко определена, однако она нуждается в таких исходных данных, которые необозримы и недостаточно четко определены.

Мне кажется, Вы ошибаетесь. Посмотрите на дело так: чем записывать бесконечную последовательность цифр (чего всё равно сделать нельзя), гораздо удобнее сказать «на всех позициях стоят тройки». Это – словесное выражение алгоритма, на вход которого подается номер позиции, а на выходе получается цифра, стоящая в этой позиции. Точно так же можно представлять себе диагональную процедуру. На входе у нее номер позиции, а на выходе – цифра, стоящая на этой позиции у незанумерованного числа.

– M

от Valdis Egle <egle.valdis@gmail.com>
кому Dmitrii Manin <dmanin@ix.netcom.com>
дата 7 марта 2011 г. 18:40
тема Re: February 16
отправлено через gmail.com

Здравствуйте, Дмитрий Юрьевич,

Ваше письмо получил, спасибо. Но тут требуется очень обширный (и к тому же, внимательно обдуманный) ответ, а у меня тут еще и другие переписки идут, а также имеются другие дела, так что я просто не успеваю. Отвечу через некоторое время.

В.Э.

от Dmitrii Manin <dmanin@ix.netcom.com>
кому Valdis Egle <egle.valdis@gmail.com>
дата 8 марта 2011 г. 4:28
тема Re: February 16
подписан ix.netcom.com

> *Отвечу через некоторое время*.

Ничего, ничего – это дело терпит.

– M

Глава 5. Конец предварительного слушания

§23. Системы понятий

2011.03.18 17:37 пятница

Продолжение этой дискуссии требует уточнения некоторых вещей, относящихся не столько к математике, сколько к логике вообще. Я о них думал уже во время написания последних из приведенных выше электронных писем, но представлялось совершенно нереальным изложить всё это в режиме он-лайн в письмах.

В первую очередь это касается того, что я называю «системами понятий». (Терминология моя; я ее разработал, будучи студентом 1-го курса Университета в своей самой первой работе по философии, но тогда считал – и теперь считаю, – что, несмотря на мою терминологию и мою форму изложения, сущность сказанного общеизвестна и должна признаваться всеми).

В своем мышлении мы используем различные понятия. Всякое понятие как-то определяется. Определение понятия означает: установить границу: что мы в это понятие включаем, а что не включаем. (Даже сами слова «определение» происходят от слова «граница» как в русском, так и в других языках: по-русски это «о-ПРЕДЕЛ-ение»; по-латински «de-FINIT-io»; ну а от латинского уже и английское «de-FINIT-ion» и многие другие).

Каждое понятие можно определить по-разному (то есть, по-разному провести эту границу: что в понятие включено, а что нет). Если мы имеем некоторый набор понятий a_1, a_2, a_3, ..., каким-то конкретным образом определенных, то вместе они составляют систему понятий A_1. Если мы какое-нибудь понятие, скажем a_2, определим по-другому (т.е. иначе проведем его границы), то это будет уже другая система понятий A_2.

Пример различного определения понятий: зададим систему понятий N_0 так, что ноль входит в состав натуральных чисел, а систему понятий N_1 так, что натуральные числа начинаются только с единицы.

От того, как мы определяем понятия, меняются формулировки (т.е. утверждения) в устной или письменной речи или в мышлении. Но от того, как мы определяем понятия, не меняется СУТЬ вещей: в разных системах понятий эта суть всё равно останется и просто получит другую формулировку, другое словесное выражение, другую форму.

Суть вещей от выбора системы понятий не меняется, но одна система понятий может быть более, а другая – менее удобной (т.е. в одной системе понятий все построения могут получаться более компактными и изящными, а в другой – громоздкими, запутанными, требующими постоянных оговорок или дополнительных понятий и т.д.). В этом смысле системы понятий не одинаковы. Надо стараться выбирать наиболее удобную систему понятий.

Гибкое и широкое мышление заключается в том, что человек способен одновременно держать в голове многие системы понятий A_1, A_2, A_3, ..., оперировать ими и видеть, какие формулировки получат те или иные утверждения в той или иной системе понятий, и какую форму в них приобретет та или иная проблема.

Узкое и догматическое мышление заключается в том, что человек не способен держать в голове одновременно многие системы понятий A_1, A_2, A_3, ..., а настаивает на какой-нибудь одной системе понятий, скажем, на A_2, как на единственной возможной и непременно обязательно должной применяться.

Точность мышления заключается в том, чтобы не перескакивать с одной системы понятий на другую, а каждое одно рассуждение проводить в какой-нибудь одной из них (потом можно провести это же рассуждение в другой системе понятий – это уже другое дело, – но всё время нужно отдавать себе отчет в том, в какой именно системе понятий мы сейчас находимся, и не путаться между ними).

Мой многолетний опыт показывает, что люди очень редко и чрезвычайно неохотно признают то, что изложено в этом параграфе. Узкое и догматическое мышление всецело доминирует – даже среди профессоров (во всяком случае среди тех, с которыми я имел дело – среди латвийских профессоров).

Но с теми, кто здесь изложенное не признают, не то что спорить – даже просто разговаривать бесполезно.

§24. В системе понятий М

Теперь перейдем к тому, ради чего мне был нужен §23. Дело в том, что практически весь наш предыдущий разговор – это разговор о системах понятий и об определениях понятий.

Центральное понятие, которое обсуждалось, – это понятие «построено алгоритмом» или, что то же самое, «продукт алгоритма».

Вы ввели такую систему понятий (назовем ее «М» – по первой букве Вашей фамилии), согласно которой в понятие «продукт алгоритма» входят только конечные приближения к бесконечно отдаленному пределу, но не входит сам этот предел.

То есть, мы мыслим ситуацию так, что при работе бесконечных алгоритмов (I, A или других) имеется ряд конечных приближений $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n, \ldots$ и имеется предел Z, к которому эти приближения стремятся.

В системе понятий M Вы понятие «строится алгоритмом» определили так, что в него входят эти $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n, \ldots$, но не входит Z. Вы ТАК провели границу этого понятия. Тогда Вы получаете те формулировки, какие Вы высказывали. (Например, такие, как: «*Если дать ему достаточно времени, алгоритм A породит любую наперед заданную конечную последовательность. Но он никогда не породит* ***все*** *конечные последовательности. И никогда не породит ни одной бесконечной последовательности*»).

Я же пользуюсь другой системой понятий (назовем ее «E» по первой букве моей фамилии в латинском алфавите). В системе понятий E у понятия «строится алгоритмом» граница проведена иначе: оно включает не только конечные приближения $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n, \ldots$, но и сам предел Z. Тогда я получаю те формулировки, которые я высказывал. (Например: «Алгоритм A строит все бесконечные последовательности нулей и единиц»).

От того, где мы проведем границу понятия «строится алгоритмом», разумеется, ничего не изменится в окружающем нас мире.

Однако этот выбор влияет на сами системы понятий M и E, так как понятие «строится алгоритмом» не изолировано, а входит в целую систему, оно связано с другими понятиями, тоже входящими в данную систему, и если мы выбрали какое-то одно определение этого понятия, то оно, соответственно, влияет и на другие понятия системы).

Так, если (в системе понятий E) я определил продукты алгоритма (понятие «..построено алгоритмом..») так, что туда входит и сам предел Z, то тем самым это Z у меня уже «построено», «существует» и определено (как продукт данного алгоритма после конца его бесконечной работы). Теперь у меня есть все иррациональные числа (как эти пределы Z), и я могу ими пользоваться.

Если же (в системе понятий M) Вы определили продукты алгоритма (понятие «..построено алгоритмом..») так, что сам предел Z, туда не входит, то тем самым у Вас Z НЕ построен, НЕ существует, и иррациональных чисел у Вас НЕТ. (Это вообще-то не такая уж и абсурдная позиция, как может показаться с первого взгляда; такой точки зрения держался, например, знаменитый Кронекер, а также, насколько я понимаю, конструктивисты тоже. Вообще та система понятий M, которую Вы ввели, она по сути своей – явно конструктивистская)[37].

Картину, которая получается при системе понятий M (Вашей системе!) Вы сами обрисовали так:

> «Если считать, что существует только те числа, которые можно точно записать в позиционной системе счисления, то окажется, что куча полезных чисел не существует. Наверное, можно строить такую математику, но это будет жутко неудобно. Представьте: обходиться без π, без *e*. Синус 30 градусов существует, а косинус почему-то нет. Длина диагонали единичного квадрата не существует. Кошмар».

Ну, кошмар – не кошмар, а система E, конечно, удобнее и лучше (потому я ее и придерживаюсь).

Если же Вы все-таки не хотите обходиться без иррациональных чисел, то Вы должны их как-то ввести в свою систему M. (Обозначим как M+ такую систему понятий, в которой построенность определена так же, как и в M, но иррациональные числа все-таки как-то введены; теперь у нас есть уже три системы понятий: E, M и M+, но нужно только помнить, что M+ у нас пока что система гипотетическая: Вы еще не определили ее – не указали, каким именно образом у Вас появляются иррациональные числа и что они из себя представляют).

Я уже один раз Вам это говорил, и Вы ответили так:

---

[37] Напомню еще раз слова главы советской школы конструктивистов А.А. Маркова из его статьи о конструктивной математике в Большой Советской Энциклопедии (3-е издание), которые я цитировал 30 лет назад в {NATUR.2340 = МОИ № 36, стр.67}: «*В конструктивной математике не применяется характерная для теоретико-множественной математики абстракция актуальной бесконечности, связанная с рассмотрением никогда не завершаемых процессов как бесконечно продолженных и тем самым как бы завершенных*». Вот, они тоже, как и Вы, этот предел Z «не рассматривают»; он для них, как и для Вас, «не строится» алгоритмом. А для нас, платонистов – строится.

> *Если же они все-таки по-Вашему существуют, то надо объяснить, что же это такое, так сказать, «ввести их».*

Элементарно: определим корень из двух как число, которое при умножении на себя дает число два. Какие проблемы?

Проблемы в том, что если Вы находитесь в системе понятий M (чистой M, без плюсика: такой, какую Вы ее определили в своих письмах), то на вопрос: «Какое число, умноженное на самое себя, дает число два?» ответ будет следующим: «Такого числа нет. Есть только числа, дающие в квадрате всё более и более близкие приближения к числу два».

Это последовательная система понятий M. Предел Z алгоритмами (у Вас) не строится; Z не построено и не существует, другим способом Вы иррациональные числа не ввели – и квадратный корень от двух у Вас НЕ СУЩЕСТВУЕТ! Есть только всё более и более близкие конечные приближения к $\sqrt{2}$ и, следовательно, квадраты от них дают только всё более и более близкие – но конечно, а не бесконечно близкие – приближения к 2.

А в своем ответе Вы просто выскочили из системы понятий M и перескочили на M+, которая не определена (или, может быть, на E – уж не знаю, но последовательного мышления не было).

Итак, подведем некоторый итог. Утверждая, что алгоритмами (I, A и другими) не строятся никакие бесконечные объекты, Вы по-другому, чем я, определяете построенность объектов, т.е. – вводите другую систему понятий (M). Разумеется, такую систему понятий ввести можно, и тогда получатся Ваши формулировки (утверждения), но также разумеется, что система M не единственная, которую можно ввести; сущность вещей от того, какую систему понятий мы избираем, не меняется, а в смысле удобства Ваша система не очень удобна, потому что в ней надо либо обходиться без иррациональных чисел, либо вводить их как-то дополнительно, в то время как при моей системе понятий (E) иррациональные числа строятся алгоритмами, и этими продуктами алгоритмов можно пользоваться без дополнительного их ввода в систему.

§25. Ненумеруемость вещественных чисел

2011.03.19 12:01 суббота

Перейдем теперь к другим Вашим утверждениям из последнего письма и разберем их прямо по порядку. Вот, Вы написали:

> А вот все вещественные числа перенумеровать нельзя – это и говорит диагональный процесс. Как ни нумеруй, останется незанумерованное число. Давайте это тоже скажем без бесконечностей. Предположим от противного, что у нас есть процедура, которая заданному вещественному числу может поставить в соответствие его номер. Тогда существует число, которого эта процедура не учла. Как мы докажем, что такое число есть? Мы укажем, как узнать любой его десятичный знак. Чтобы узнать N-й знак нашего числа, возьмем N-й знак числа с номером N, и если это девятка, то у нашего числа ноль, в противном случае N+1. Таким образом, если задана нумерация вещественных чисел, наше число однозначно определено, и не совпадает по построению ни с одним из пронумерованных чисел. Стало быть, оно не пронумеровано. Стало быть, пронумеровать все вещественные числа нельзя. И никаких бесконечностей.

Здесь Вы просто повторили ту парадигму (тот образ мышления, ход мыслей), которой держится теперешняя «официальная математика» и которую я бесчисленное количество раз критиковал (в том числе и в §11 и §12 этого тома), указывая, что этот ход мыслей путанный, неточный и в итоге – несостоятельный. Вы никак не отреагировали на эту критику, не опровергли ее (единственное, что Вы сделали: это по-другому переопределили понятие построенности, от чего, разумеется, ничего в сущности вещей не меняется), а теперь Вы этот ход мышления просто повторяете, похоже, ожидая, что теперь я с ним соглашусь.

Мне не хочется (да и бессмысленно) копировать сюда еще раз всё то, что я против этого хода мыслей наговорил в разных местах, но, хорошо!, давайте рассмотрим эту вещь под еще одним – другим по сравнению с предыдущими – углом зрения.

Вдумайтесь в то, что Вы написали, а я только что процитировал!

Вот, я бывший профессиональный программист; Вы, похоже, тоже хорошо знакомы с компьютерным делом. Давайте посмотрим на Вашу цитату глазами компьютерных программистов!

В чем сущность того, что Вы мне предлагаете как доказательство ненумеруемости вещественных чисел? Сущность в том, что у Вас есть программа (по предыдущим обозначениям: программа D), которая меняет цифру либо на 0, либо прибавляя единицу. Хорошо, программа, разумеется, есть. Но Вы хотите, чтобы я само существование этой программы признал уже доказательством того, что она отработает именно так, как Вы ожидаете. Но она не отработает так, как Вы ожидаете!

Чтобы понять, как она на самом деле отработает, нужно смотреть не только на само наличие этой программы, но и на те исходные данные, над которыми она будет запущена.

Запустите ее над конечной матрицей цифр, содержащей ВСЕ комбинации десятичных цифр длиной n (такая матрица, как легко понять, будет иметь 10^n строк). Ваша программа D отработает, пройдясь по первым n строкам матрицы – и построит строку, отличающуюся от всех тех строк, которые она охватила (от первых n). Но она не охватит остальные ($10^n - n$) строки матрицы (так как $10^n > n$ для всех тех n, которыми мы измеряем количество знаков в строке), и построенная Вашей программой строка ЕСТЬ в матрице – в той ее части, которую Ваша программа не проверила. А дальше пускать Вашу программу (для остальных $10^n - n$ строк) Вы не можете, потому, что для нее уже не существует исходных данных (нет строк такой длины).

Поэтому само наличие Вашей программы D никаким доказательством ненумеруемости не является. Ситуация требует уточнения: которые строки матрицы Вы предполагаете пронумерованными – первые n или все 10^n?

Если Вы предполагали перенумерованными лишь те первые n строк, над которыми Вы можете запустить свою программу, то и без всякого диагонального процесса ясно, что Вы перенумеровали не все строки (потому, что всего их 10^n). Если Вы предполагали перенумерованными все 10^n строк, то Ваша программа D не построила такую строку, которой не было бы среди перенумерованных.

Дальше Ваши предложения какие-то противоречивые. С одной стороны, Вы говорите: «Давайте это тоже скажем без бесконечностей! Никаких бесконечностей!». То есть, мне вроде как бы предлагается бесконечности не трогать и остановиться на том результате, который мы только что получили относительно конечной матрицы. С другой стороны, если все-таки переходить к случаю, когда n растет до бесконечности, то мне вроде бы предлагается считать, что при переходе к бесконечности ситуация коренным образом изменится, и программа D внезапно каким-то чудом начнет охватывать уже все строки...

Очевидно же, что точка зрения «официальной математики» в этом вопросе (которую Вы – совершенно напрасно! – взялись защищать) построена на чрезвычайно смутном представлении о том, как всё это будет происходить. Она не допускает никакой конкретизации, никакой детализации, и единственный способ, как эту точку зрения защищать, – это во что бы то ни стало настаивать на сохранение смутного представления и ни за что не переходить к детализации и уточнению.

У них всё простенько: «Предположим, что у нас есть процедура C, которая заданному вещественному числу может поставить в соответствие его номер. Тогда существует число, которого эта процедура не учла – и строится оно процедурой D». Всё! Вот, эти установки – и за их рамки не выходи! В этих рамках и сиди! Как в деталях могут работать эти процедуры C и D (что перенумеровала C: n строк или все 10^n? что охватила D: n строк или все 10^n?) – не разбирайся! Табу! – так ведь еще – не дай Бог! – не получишь того результата, который заранее указан, чтобы профессора могли спокойно спать после лекций по теории множеств.

(Да только истина и правда такими способами никогда не защищается. Истина должна допускать любое уточнение и проверку).

§26. Бесконечные натуральные числа

Возьмем следующую Вашу цитату:

> «Натуральные числа выражаются **конечными** последовательностями цифр. Вы хотите ввести еще новые числа, которые выражаются **бесконечными** последовательностями цифр? Флаг Вам в руки. Я думаю, Вы получите так называемые «трансфинитные числа» или что-нибудь близкое к ним, каждое такое число будет больше любого натурального числа. Такая математика тоже есть, хотя я про нее почти ничего не знаю».

Нет, – никаких новых чисел я вводить не хочу; я хочу просто исследовать множество натуральных чисел – но, возможно, что я взглянул на это множество под несколько нетрадиционным углом (который, быть может – но не мне об этом судить –, окажется неожиданным для «традиционных математиков»).

«Трансфинитные числа» – это совсем другое. Это когда Кантор обнаруживает, что одно бесконечное множество якобы имеет мощность бо́льшую, чем другое (как в Пятнадцатой теореме Александрова, §19); тогда эти множества считаются принадлежащими разным «порядковым типам», но от большего множества можно опять образовать (хотя бы тем же способом, что в §19) еще большее, и так считают эти «порядковые типы» вперед и вперед до бесконечности – и получают «трансфинитные числа». Но, так как на самом деле все бесконечности одинаковы (если принято понятие «взаимно-однозначного соответствия», т.е. «постулат Кантора»), то все эти построения – полная фикция, и никаких «трансфинитных чисел» не существует – как не существует и «торсионных полей».

А то, что предлагаю и делаю я, – это просто несколько глубже задуматься над теми же вещами, о которых мы всё время рассуждали.

Вот, Вы сказали: «*Натуральные числа выражаются* ***конечными*** *последовательностями цифр*». Но вдумайтесь: всякое число, выраженное конечной последовательностью цифр – это <u>конечное</u> число (каким бы громадным оно ни было). Значит, бесконечных чисел для Вас нет вообще. (Что же, – это вполне соответствует установкам Вашей конструктивистской системы понятий M: всякий алгоритм может сгенерировать только конечные приближения к иррациональному числу и только конечные натуральные числа – сколь угодно большие).

Однако обратите внимание на симметрию, которая наличествует между дробями и натуральными числами. Эта симметрия как раз и принадлежит к тем вещам объективного мира, которые не меняются от того, какую мы принимаем систему понятий – M или E. Эта симметрия всё равно остается.

Если мы находимся в конструктивистской системе понятий M, в которой алгоритмы строят лишь конечные приближения, то нет ни иррациональных чисел (и вообще бесконечных дробей), ни бесконечных натуральных чисел.

Если же мы находимся в платонистской системе понятий E, где считается, что алгоритмы строят также и конечный продукт Z бесконечного процесса, то существуют как иррациональные числа (и бесконечные дроби рациональных), так и бесконечные натуральные числа.

В обоих случаях (M и E) как дроби, так и натуральные числа могут быть сгенерированы по одному и тому же алгоритму A (разница только в том, что в системе M мы окончательный продукт Z бесконечного процесса не считаем построенным, а в системе E – считаем построенным).

Взглянем еще раз на матрицы этого алгоритма (и, раз рисуем матрицы, то в целях экономии места – опять в двоичном представлении):

0	00	000	. . .
1	01	001	
	10	010	
	11	011	
		100	
		101	
		110	
		111	

Пусть мы находимся в системе понятий E и считаем, что в конце концов этот процесс приведет к построению актуально бесконечной матрицы нулей и единиц, содержащей все возможные их комбинации. Теперь: если мы считаем, что это был процесс генерации натуральных чисел, то мы можем сказать, какое будет первое число в этой матрице: .....0 (впереди бесконечно много нулей). Мы можем сказать, какое будет второе число в этой матрице: .....1 (впереди бесконечно много нулей). Мы можем сказать, какое будет третье число в этой матрице: .....10 (впереди бесконечно много нулей). И так далее – мы можем перенумеровать всю матрицу (все натуральные числа).

Теперь представим, что это была генерация дробей, и что впереди последовательностей стоит «0,». Мы можем сказать, какая будет первая дробь в этой матрице: 0,00000... . Однако со второй дробью возникает проблема: мы не можем ее определить столь точно, как хотелось бы; она получается что-то вроде: 0,0......01 (в середине бесконечно много нулей). Это происходит от того, что в натуральных числах ведущие нули – не значащие, а в дробях – значащие. И у нас появляется ощущение ненумеруемости дробей.

Но генерация ведь производилась одним и тем же способом; это одна и та же матрица – и только наш взгляд превращает ее то в матрицу натуральных чисел, то в матрицу дробей (мысленным добавлением впереди «0,»). И чем-то вроде зрительной иллюзии является то обстоятельство, что одно лишь мысленное добавление или удаление впереди «0,» превращает ведущие нули то в незначащие (и матрицу в нумеруемую), то в значащие (и матрицу в ненумеруемую). Я думаю, что эта зрительная иллюзия играет большую роль в формировании Ваших взглядов и точки зрения «официальной математики».

Как бы там ни было, но теперь перед нами стоит вопрос: что считать более важным и решающим: ощущения, порожденные тем, что я здесь назвал «зрительной иллюзией», – или то обстоятельство, что матрицы генерируются одинаковым способом и фактически это одна и та же матрица?

Ну, и излишне, видимо, будет отвечать, что я второе обстоятельство нахожу решающим, а «иллюзии» отбрасываю.

Переход от системы понятий E к системе понятий M тут ничего не меняет. Симметрия между дробями и натуральными числами (как продуктами одного алгоритма) всё равно сохраняется. Иррациональные числа в системе M не определены, и утверждение, что алгоритм A не строит иррациональных чисел, превращается в тривиальное – этих чисел и нет в системе M.

Ну и далее: коли есть полная симметрия между дробями и натуральными числами, то любой процесс, который мы проводим в одном множестве, автоматически проецируется на другое. Строим в множестве дробей иррациональное число – это мы автоматически строим также и бесконечно большое натуральное число. (И всё равно, находимся ли мы в системе понятий E или M: в первом случае мы просто считаем оба эти объекта до конца построенными, а во втором случае – также оба объекта! – не построены до конца, а происходит просто приближение к ним).

Математики (даже не только конструктивистские, а традиционные – те, кто допускают актуальную бесконечность) почему-то, видимо, не задумывались над этим свойством бесконечных чисел. А следовало бы!

§27. Другие высказывания

Берем следующее Ваше утверждение:

> «Если к натуральным числам добавить «числа», выражаемые бесконечными последовательностями цифр, их уже нельзя будет занумеровать. Никаких противоречий».

Можно занумеровать. (Но противоречий действительно нет). Если мы находимся в системе понятий E и считаем, что алгоритм A генерирует <u>бесконечные</u> последовательности 0 и 1, то он генерирует и громадное (бесконечное) количество бесконечных последовательностей цифр со значащими цифрами впереди (в двоичном представлении половина всех последовательностей будет иметь 1 в самом первом разряде). Тем не менее, я только что показал, как их все перенумеровать по всем канторовским правилам.

Так что это множество – полностью эквивалентное «континууму» дробей! – остается <u>СЧЕТНЫМ</u>! «Счетно» оно – как и сам «континуум»!

* * *

Об аналогии между дробью 0,333333... и алгоритмом D (диагональным процессом). Вы сказали:

> «Посмотрите на дело так: чем записывать бесконечную последовательность цифр (чего всё равно сделать нельзя), гораздо удобнее сказать «на всех позициях стоят тройки». Это – словесное выражение алгоритма, на вход которого подается номер позиции, а на выходе получается цифра, стоящая в этой позиции. Точно так же можно представлять себе диагональную процедуру. На входе у нее номер позиции, а на выходе – цифра, стоящая на этой позиции у незанумерованного числа».

Верно, обе эти процедуры сами по себе хорошо определены. Процедуру, выдающую 0,333333..., можно организовать и так, что Вы на входе спрашиваете: «каков 16-й знак?», а она отвечает: «3»; Вы спрашиваете: «каков 5-й знак?», а она отвечает: «3»; Вы спрашиваете: «каков 9735634524356-й знак?», а она отвечает: «3». Но всё равно она не обращается ни к каким внешним данным, и Вы не пытаетесь ее результат интерпретировать для выводов такого типа, как «содержится или не содержится среди перенумерованных?».

А диагональный процесс, чтобы ответить на вопрос «каков 9735634524356-й знак?», должен обратиться к внешним данным и посмотреть, какой знак стоит там. Эти данные могут не существовать. Например, если Вы запустите диагональный процесс над двоичной матрицей – продуктом алгоритма A после его 844-го шага, то матрица будет иметь ширину 844 знака, и строк в ней будет 117 304 950 450 073 441 093 299 338 992 332 138 457 996 243 649 210 992 760 592 177 980 666 118 165 925 495 436 678 284 352 817 677 825 758 656 549 761 022 853 424 729 541 660 972 550 965 022 826 666 248 518 125 620 733 165 482 852 770 884 817 967 017 897 067 499 683 873 717 228 533 661 411 547 573 197 142 488 509 591 988 118 713 532 416.

Если Вы будете перебирать для диагонального процесса подряд все строки, то для первых 844 номеров данные у Вас будут существовать, а для остальных 117 304 950 450 073 441 093 299 338 992 332 138 457 996 243 649 210 992 760 592 177 980 666 118 165 925 495 436 678 284 352 817 677 825 758 656 549 761 022 853 424 729 541 660 972 550 965 022 826 666 248 518 125 620 733 165 482 852 770 884 817 967 017 897 067 499 683 873 717 228 533 661 411 547 573 197 142 488 509 591 988 118 713 531 572 строк данных не будет.

Если же Вы прекратите диагональный процесс после 844-го номера,[38] то построенный этим процессом элемент <u>БУДЕТ</u> среди тех 117 304 950 450 073 441 093 299 338 992 332 138 457 996 243 649 210 992 760 592 177 980 666 118 165 925 495 436 678 284 352 817 677 825 758 656 549 761 022 853 424 729 541 660 972 550 965 022 826 666 248 518 125 620 733 165 482 852 770 884 817 967 017 897 067 499 683 873 717 228 533 661 411 547 573 197 142 488 509 591 988 118 713 531 572, которые Вы не перебрали.

Итак, первая процедура МОЖЕТ ответить на вопрос «каков 9735634524356-й знак?» (это «3»), а вторая – в общем случае НЕ может (например, не может при тех исходных данных, какие ей предлагались в этом параграфе, – хотя строка с таким номером существует!).

§28. Об установке

2011.02.20 14:07 воскресенье

В заключение мне хотелось бы сказать несколько слов по поводу общих установок в этой переписке.

Вы вошли в нее с предвзятым мнением, полагая, что канторовская теория множеств непременно верна, а я говорю глупости.

1 декабря 2010 г. в 2:43 Вы писали: «*Если вопрос стоит таким образом* [что верна либо канторовская, либо Веданская теория], *то я готов поспорить на что угодно, что Веданская теория неверна*».

3 декабря 2010 г. в 2:07 Вы писали: «*Вы* (..) *сказали, что теория множеств неверна. Такое утверждение для меня есть сильнейшее свидетельство неадекватности и неразумности*».

В соответствии с этой установкой Вы видели свою задачу лишь в том, чтобы продемонстрировать, что та истина, которая у Вас заранее в кармане, действительно верна.

Для начального периода дискуссии такую установку можно считать оправданной. Действительно: вылез неизвестно откуда, из каких-то дебрей Интернета, какой-то Валдис Эгле, и начинает утверждать, что неверно то, что тысячи профессоров математики уже столетие преподают в сотнях университетов мира! Что за чушь?!

---

[38] Может быть, Вас интересует, почему я избрал именно 844-й шаг алгоритма A? Очень просто. В свое время я написал программу, которая упомянута в {PENRO1.363 = МОИ № 14, стр.30} и которая работает с числами длиной до 255 знаков включительно. Поэтому у меня есть все степени двойки (а также тройки и других чисел), длина которых в десятичном представлении не превышает 255 знаков. 2^{844} – это первая степень двойки, имеющая длину 255 знаков (а 2^{847} – последняя). Так что все эти числа я могу просто скопировать из файла. А чтобы получить бóльшие степени, пришлось бы писать новую программу. Но, я думаю, 255 знаков тоже уже впечатляют.

Но теперь начальный период дискуссии, пожалуй, можно считать оконченным. Вы убедились (надеюсь, убедились), что взгляды, противоположные канторовским, просто так «шапками не закидаешь». В них есть своя логика – и логика крепкая.

Поэтому я Вам предлагаю теперь поменять установку. Не считайте более, что «истина у Вас в кармане», а считайте отныне, что Вы ее еще только должны выяснить.

Примите такую установку, что 50 : 50 о том, правы ли профессора, или прав Валдис Эгле, и что Ваша задача – в этом разобраться (а не утвердить заранее предвзятую истину).

Предвзятость никогда не приносила ничего хорошего никому – ни тому, кто ее использовал, ни его противникам.

Если Вы не поменяете установку, то дальнейший разговор в общем-то становится уже бессмысленным и уходит в то же русло, что и с латвийскими профессорами.

Вопрос о том, строят или не строят алгоритмы бесконечные продукты, – это вопрос определения понятий. Умные люди об определениях не спорят.

Канторовская теория множеств представляет собой (причудливый) продукт мышления, к которому исторически пришли окольными (и запутанными) путями.

Если разбирательство (и построение учения) на том месте, где теперь стоит канторовская теория, начинать с нуля и проводить его наиболее естественным и логичным образом, то к канторовской теории придти невозможно – это возможно было только по тем историческим тропинкам, по которым брела мысль математических мыслителей 19-го века.

Представим себе, что никакой канторовской теории нет, и на нас не давят никакие традиции и никакие желания спасти «честь мундира» профессоров. Мы хотим разобраться, как обстоят дела с последовательностями знаков какого-то алфавита. Если этот алфавит состоит из 0 и 1, то мы можем считать эти строки записями двоичных чисел; если алфавит состоит из десятичных цифр, то десятичными записями чисел, а в общем случае мы можем рассматривать также и просто фразы английского, русского и других алфавитов.

Если мы хотим что-то решить и сказать о <u>ВСЕХ</u> (!) возможных строках таких алфавитов, то первый естественный и логичный шаг: это получить ВСЕ возможные строки, комбинируя каждый знак в каждой позиции с каждым знаком.

Это и есть «алгоритм A»; он не выдуман ради опровержения Кантора, а просто представляет собой естественный способ получения ВСЕХ возможных строк данного алфавита. И при нем очевидно, что если в алфавите S знаков, то при длине строки n количество возможных строк будет S^n.

Далее, если мы хотим что-то решить и сказать о всех <u>БЕСКОНЕЧНЫХ</u> (!) строках таких алфавитов, то (уже второй) естественный и логичный шаг – это смотреть, что будет происходить, когда длина строки $n \to \infty$.

Всё! Два шага, и вопрос решен! Если на нас не давят никакие канторовские теории, никакие традиции и страсти вокруг мундиров, то никому (в том числе и Вам) даже и в голову не придет ЭТО оспорить. Все выводы относительно <u>ВСЕХ БЕСКОНЕЧНЫХ СТРОК</u> будут сделаны на основании вот этих двух шагов – естественных и логичных.

Если потом начинать (зачем-то) интересоваться возможностями нумеровать эти строки и проводить над ними процедуру D (диагональный процесс), то и это сделают на основании тех же двух шагов (и получат те результаты, о которых я рассказываю).

Все возражения (искусственно выдумываемые) начинаются только потому, что в свое время не посмотрели ТАК, подошли к вопросу окольными и запутанными путями, понастроили всего вокруг, а теперь надо спасать это понастроенное, чтобы не получилось, что строили напрасно, и чтобы «не ударить лицом в грязь».

Кому-то, может быть, жалко того, что они понастроили, – а мне не жалко. «Честь мундира» надо было спасать тогда, когда впервые подошли к этим вопросам: ТОГДА надо было посмотреть на вещи просто и естественно, а не бродить по запутанным тропинкам. И раз не посмотрели тогда, то сегодня приходится платить гораздо дороже.

А вопрос, стоящий перед НАМИ сегодня, это выбор: продолжать ли их блуждания – или же наконец начинать смотреть на вещи естественным и логичным образом?

Глава 6. Конец диалога

§29. Письма

от Valdis Egle <egle.valdis@gmail.com>
кому Dmitrii Manin <dmanin@ix.netcom.com>
дата 22 марта 2011 г. 14:41
тема March 22
отправлено через gmail.com

Здравствуйте, Дмитрий Юрьевич,
продолжение в книге POTI-2 на сайте: http://ve-poti.narod.ru/

В.Э.

от Dmitrii Manin <dmanin@ix.netcom.com>
кому Valdis Egle <egle.valdis@gmail.com>
дата 22 марта 2011 г. 17:19
тема Re: March 22
подписан ix.netcom.com

> *продолжение в книге POTI-2 на сайте*:

Вот с чем мне трудно иметь дело, к сожалению – это с Вашим многословием, дорогой Вальдис. Очень жаль, что Вы не в состоянии формулировать свои мысли коротко, потому что так гораздо труднее Вам возражать – как из-под стога сена выкапываться. Можно, но очень долго.

Вообще-то, многословие обычно свойственно не ученым, а философам, а с ними я дела стараюсь не иметь.

Может быть, Вы все же можете подытожить Ваши аргументы в объеме одной страницы текста? Выкинув все второстепенное и оставив четкие, неопровержимые доводы.

– М

от Dmitrii Manin <dmanin@ix.netcom.com>
кому Valdis Egle <egle.valdis@gmail.com>
дата 22 марта 2011 г. 17:39
тема Re: March 22
подписан ix.netcom.com

Впрочем, пожалуй, я знаю, в чем Ваша ошибка. Если Вы по-прежнему утверждаете, что Ваш алгоритм перенумерует все вещественные числа натуральными, скажите мне, какой именно номер он присвоит числу 1/3.

Только и всего.

– М

от Valdis Egle <egle.valdis@gmail.com>
кому Dmitrii Manin <dmanin@ix.netcom.com>
дата 22 марта 2011 г. 18:43
тема Re: March 22
отправлено через gmail.com

Мой текст не содержит ничего, кроме четких и неопровержимых доводов, и в нем столько слов, сколько необходимо для того, чтобы объяснить Вам, что на вещи можно смотреть и иначе, чем это делаете Вы.

Число 1/3 в десятичной системе счисления получит бесконечный номер 333333...

В.Э.

от Manin family <manin@ix.netcom.com>
ответить Manin family <manin@ix.netcom.com>
кому Valdis Egle <egle.valdis@gmail.com>

дата 22 марта 2011 г. 19:15
тема Re: March 22
подписан ix.netcom.com

> *Число 1/3 в десятичной системе счисления получит бесконечный номер 333333...*

Но это утверждение не противоречит теореме Кантора, которая утверждает, что бесконечные цепочки цифр (вещественные числа) нельзя перенумеровать конечными (натуральными числами).

– M

от Dmitri Manin <dmanin@ix.netcom.com>
ответить Dmitri Manin <dmanin@ix.netcom.com>
кому Valdis Egle <egle.valdis@gmail.com>
дата 23 марта 2011 г. 1:08
тема Re: March 22
подписан ix.netcom.com

Еще одно небольшое пояснение:

>> Число 1/3 в десятичной системе счисления получит бесконечный номер 333333...

> *Но это утверждение не противоречит теореме Кантора, которая утверждает, что бесконечные цепочки цифр (вещественные числа) нельзя перенумеровать конечными (натуральными числами).*

Вы пытаетесь переопределить понятия и сказать, что бесконечные цепочки цифр тоже представляют натуральные числа. Это не соответствует общепринятому определению, но суть дела отнюдь не в этом, и не с этим я спорю.

Суть дела в том, что все бесконечные цепочки нельзя поставить во взаимно-однозначное соответствие со всеми конечными. Поэтому множество всех бесконечных цепочек не равномощно множеству всех конечных, и мощность континуума, таким образом, не равна счетной.

– M

от Valdis Egle <egle.valdis@gmail.com>
кому Dmitri Manin <dmanin@ix.netcom.com>
дата 23 марта 2011 г. 12:55
тема Re: March 22
отправлено через gmail.com

Но множество КОНЕЧНЫХ натуральных чисел же будет КОНЕЧНЫМ множеством (вдумайтесь: ведь если самое большое число-номер в нем конечно, то и само их число-количество конечно). А с тем, что конечное множество нельзя поставить в 1–1 соответствие с бесконечным – кто же будет спорить? Для установления такого факта никакой диагональный процесс не нужен.

Рассуждения Кантора приобретают смысл ТОЛЬКО в том случае, если оба множества бесконечны. А раз множество натуральных чисел бесконечно, то в нем есть и бесконечно большие числа. И тогда встает вопрос о том, каковы же свойства этих бесконечно больших чисел и как они соотносятся с бесконечными дробями. Вот, одну точку зрения на этот вопрос я и представил.

И вспомните все-таки те обстоятельства, о которых я говорил в §26. Матрица дробей и матрица натуральных чисел при этой точке зрения – одна и та же матрица, и отличает одно от другого только мысленное добавление «0,» впереди.

При этом матрица без «0,» (когда ведущие нули рассматриваются как незначащие) несомненно нумеруется.

В.Э.

от Dmitrii Manin <dmanin@ix.netcom.com>
кому Valdis Egle <egle.valdis@gmail.com>
дата 23 марта 2011 г. 16:26
тема Re: March 22
подписан ix.netcom.com

> *Но множество КОНЕЧНЫХ натуральных чисел же будет КОНЕЧНЫМ множеством (вдумайтесь: ведь если самое большое число-номер в нем конечно, то и само их число-количество конечно).*

Господь с Вами, Вальдис, это же азы! Множество натуральных чисел бесконечно, потому что в нем нет самого большого числа: к любому числу N можно прибавить единицу, и получится опять конечное натуральное число, которое больше N. Сами же числа, конечно, конечны по той же самой причине: для любого можно указать большее.

– М

от Valdis Egle <egle.valdis@gmail.com>
кому Dmitrii Manin <dmanin@ix.netcom.com>
дата 24 марта 2011 г. 16:38
тема Re: March 22

2011.03.24 14:52 четверг

Опять Вы противоречия, присущие ВАШИМ взглядам, пытаетесь приписать моим (это уже по крайней мере третий раз). Разумеется, это азы, что множество натуральных чисел бесконечно, но у ВАС (у Вас!) оно получается конечным. Бесконечное множество не может состоять только из конечных чисел – такое представление очевидно противоречиво: ведь каждое число одновременно является и его номером в множестве, и либо этот номер остается конечным, либо он все-таки становится бесконечным.

А Вы хотите, чтобы мы считали его и бесконечным (когда он характеризует бесконечность множества), и одновременно конечным (когда он характеризует сам себя).

Ваши слова настолько нелепы, что на них просто нет смысла отвечать.

Если Ваши слова воспринимать всерьез, то сейчас нужно было бы опять вдаваться (по второму кругу) в новое обсуждение того, чтó же Вы в таком случае считаете конечным и что бесконечным. Но Вы уже показали, что Вы не вникаете в то, что Вам говорят, то ли не в состоянии, то ли не желаете понять это и отвечать по существу аргументов, а просто повторяете одно и то же, игнорируя сказанное оппонентом.

Такая «дискуссия», разумеется, и мне не интересна, и, тем более, читателям.

Сейчас в этой книге (POTI-2) на протяжении примерно 60 страниц дано по-русски современное изложение «Канторовской проблемы», какое не существовало ранее. Это, конечно, не академический текст – есть в нем и небольшие украшения, освежающие текст для «обычного» читателя, и есть некоторая (реальная) дискуссия – но в целом это не сумбурный, хаотический материал, а последовательное раскрытие проблем и их решений – и такой материал не стыдно показывать людям.

Дальнейшие Ваши препирательства – и затеянная Вами бесконечная пляска вокруг понятий «конечно» и «бесконечно» – могут этот материал только ухудшить, и поэтому я не заинтересован в дальнейшем включении такого рода материалов в эту книгу.

Ведь ясно же, что Вы уже не скажете ничего путного по СУЩЕСТВУ проблемы.

Вам (и Юрию Манину) была дана возможность высказать свои возражения против представленной здесь концепции, но никто из Маниных таких возражений не высказал. (Ну, или сформулируем так: пусть читатели сами судят, можно ли считать серьезными возражениями то, что Вы здесь говорили).

А то, что Вы не приняли представленную здесь концепцию, – это обычное дело: все защитники лженаук ведут себя точно так же и продолжают упорно настаивать на своем вопрекки всем разумными аргументам – и Акимов, и Шипов, и Фоменко, и другие. И если я буду разговаривать с каким-нибудь священнослужителем, то он тоже никогда не согласится с моими доводами и будет упорно защищать догматы христианской веры.

Но это не наука, а религия. Вы верите, что «континуум» имеет мощность большую, чем «счетное множество» – ну и верьте дальше.

А научный подход заключается в выборе «парадигм» с минимизированными системами постулатов. И Вам была представлена «парадигма», более простая и естественная, чем та, которая сейчас используется в «официальной математике». Но Вы эту парадигму обсуждать отказываетесь, просто игнорируете ее, пытаясь во что бы то ни стало утвердить существующую парадигму.

Если Вы можете что-то сказать по существу вопроса – т.е. о сравнении парадигм – то говорите – я опубликую.

А то, что к существу дела не относится, я больше публиковать не буду (и отвечать тоже).

В.Э.

от Dmitrii Manin <dmanin@ix.netcom.com>
кому Valdis Egle <egle.valdis@gmail.com>
дата 24 марта 2011 г. 17:34
тема Re: March 22
подписан ix.netcom.com

Дорогой Вальдис, пожалуйста не горячитесь. Ровно сейчас, когда мы, кажется, докопались до сути противоречия, Вы пытаетесь дать отбой. Нет уж, я не хочу, чтобы время было потрачено зря,[39] давайте копать до конца.

> *Бесконечное множество не может состоять только из конечных чисел – такое представление очевидно противоречиво: ведь каждое число одновременно является и его номером в множестве, и либо этот номер остается конечным, либо он все-таки становится бесконечным.*

У каждого отдельного числа этот номер остается конечным, естественно. А по множеству в целом самого большого номера нет, поэтому мы называем множество бесконечным. (Само множество, а не номер какого бы то ни было числа в нем.)

Или давайте возьмем числа, обратные натуральным. Они все помещаются между нулем и единицей, каждое из них вполне себе конечно[40], рационально, записывается простой дробью. Но их множество бесконечно.

Конечно, бесконечное множество может состоять из конечных элементов.[41]

Но если Вы настаиваете на существовании «бесконечных натуральных чисел», то извольте указать мне хотя бы одно такое число.[42] Правда, тогда Вам придется и отвечать на следующие вопросы: какое число получится, если к нему прибавить 1, поделить на 7, какой у него остаток от деления на 11, и т.п., так что подготовьтесь заранее.[43]

---

[39] **В.Э.:** Время потрачено не зря в том смысле, что существует протокол этого диалога, который можно дать кому-то почитать, цитировать его и ссылаться на него. Время всегда потрачено зря в том смысле, что Земная цивилизация всё равно погибнет, и напрасным окажется всё, что она творила. А в более мелких масштабах: время потрачено зря потому, что мы всё равно не достигнем согласия.

[40] **В.Э.:** В каком смысле конечно? В том смысле, что «по значению» оно меньше единицы? В таком смысле они, разумеется, все конечны. Или в том смысле, что для их записи требуется конечное число знаков? В этом смысле свойства (относительно конечности–бесконечности) числа 1/N будут в точности такими же, как и свойства самого числа N.

[41] **В.Э.:** Конечно, бесконечное множество может состоять из конечных элементов. Но не тогда, когда элемент одновременно является также и номером элемента в множестве. ЭТО обстоятельство стягивает вместе обе «ипостаси» натурального числа, не дает им жить каждой самостоятельно и заставляет принимать либо конечные, либо бесконечные значения одновременно в обеих ипостасях. Если количество элементов в множестве становится бесконечным, значит, бесконечным становится и номер элементов; если номер остается конечным, значит, и количество элементов остается конечным. (Такова наиболее естественная система понятий в данной области; переопределение понятий, разумеется, теоретически возможно, но оно ничего не изменит по существу, а уведет в обширное, необозримое и бесплодное крохоборство).

[42] **В.Э.:** Ну, одно-то я уже указал – забыли, что ли? Это было бесконечное число 333333...

[43] **В.Э.:** Это интересные вопросы, потому что тренируют мышление. Вообще точный и исчерпывающий ответ на них потребовал бы возврата к «философии математики» и к уточнению того, что же всё-таки это такое – число, математические операции и т.д. (см. §5 настоящего тома и окружающее). Не знаю, как Вы, но я не забыл, что мы вообще-то сейчас обсуждаем не собственно числа, а их нотаты в определенной системе представления (конкретно: матрицы, генерируемые алгоритмами типа алгоритма A). Но если я возьмусь за такое уточнение, то наверняка услышу от Вас что-то наподобие этого: «*Очень жаль, что Вы не в состоянии формулировать свои мысли коротко, потому что так гораздо труднее Вам возражать – как из-под стога сена выкапываться. Вообще-то, многословие обычно свойственно не ученым, а философам, а с ними я дела стараюсь не иметь. Может быть, Вы все же можете подытожить Ваши аргументы в объеме одной страницы текста? Выкинув все второстепенное и оставив четкие, неопровержимые доводы*». А у меня нет желания выслушивать от Вас такое, и, стало быть, нет и желания преподносить Вам вещи, подробно и основательно разбирающие ситуацию. Поэтому я ограничусь таким ответом. Ведь мы

> *А Вы хотите, чтобы мы считали его и бесконечным (когда он характеризует бесконечность множества), и одновременно конечным (когда он характеризует сам себя).*

Это не так, я никакое число не считаю бесконечным. Мощность множества натуральных чисел не выражается натуральным числом, поэтому она и называется отдельным словом: счетная бесконечность. Ни одно натуральное число не выражает счетную бесконечность, хотя все вместе они ее в некотором смысле выражают. Но только все вместе.[44]

> *Ваши слова настолько нелепы, что на них просто нет смысла отвечать.*

Я мог бы Вам сказать то же самое, но я не теряю надежды на продолжение разумного диалога.

> *Ведь ясно же, что Вы уже не скажете ничего путного по СУЩЕСТВУ проблемы.*[45]

Очень-очень жаль, что Вы решили прибегнуть к этому экстренному выходу. Неспортивно, Вальдис. Может быть, все-таки передумаете?

> *А то, что к существу дела не относится, я больше публиковать не буду (и отвечать тоже).*[46]

Ах, вот даже как? Я-то думал, у Вас твердые принципы...

Ну, прощайте тогда.

– М

§30. Ответ Маниным

2011.03.31 12:05 четверг

Я употребил слово «Маниным» во множественном числе потому, что в «официальном обращении» 16 февраля это обращение было к Ю.И. Манину и к Д.Ю. Манину. Первый из них здесь не высказал ни слова, хотя мне почему-то кажется, что он все-таки читал эти материалы. В любом случае заключительное слово к обоим, потому что обращение было к обоим.

Я уже принял решение закрыть эту дискуссию, потому что «*Ведь ясно же, что Вы уже не скажете ничего путного по СУЩЕСТВУ проблемы*». Это было сказано с намеренной резкостью возмездия, но оно правильно по существу: я действительно не верю, что Манины поменяют свою позицию (а только в этом случае дискуссию есть смысл продолжать; крутиться же и дальше вокруг «конечно–бесконечно» смысла нет).

В последнем письме Д.Ю. Манин мне говорит: «*если Вы настаиваете на существовании «бесконечных натуральных чисел», то (..) Вам придется и отвечать на следующие вопросы: какое число получится, если к нему прибавить 1, поделить на 7, какой у него остаток от деления на 11, и т.п., так что подготовьтесь заранее*», а я ему в сноске отвечаю: «*Это интересные вопросы (..), точный и исчерпывающий ответ на них потребовал бы возврата к «философии математики» и к уточнению того, что же всё-таки это такое – число, математические операции и т.д.*».

Любопытная особенность этой (и далеко не только этой) дискуссии состоит в (умышленном или неумышленном) использовании приема, который я мог бы назвать «переворачиванием позиций». Это когда то, что на самом деле принадлежит позиции самого оппонента, он приписывает мне и потом на это нападает.

Я позволю себе напомнить, как всё-таки позиции сторон выглядят глобально.

разбираем матрицы, генерируемые алгоритмом A, причем одну и ту же матрицу интерпретируем попеременно то как бесконечные дроби, то как натуральные числа. Поэтому любой вопрос, который Вы задаете относительно «бесконечного натурального числа», можно переформулировать в отношении бесконечной дроби. Что будет, если к иррациональной дроби прибавить число 0,000....0001 (где «...» обозначает бесконечно много нулей)? И так далее. Формулируйте и отвечайте!

[44] **В.Э.:** Верно, ни одно натуральное число не выражает счетную бесконечность, но вопрос состоит в том, одинаково ли $N \to \infty$, когда оно (N) является номером элемента и когда оно (N) является самим элементом. Почему-то при первом $N \to \infty$ Вы говорите «бесконечно», а при втором $N \to \infty$ говорите: «конечно».

[45] **В.Э.:** Это уплата по квитанциям типа «*Вы не в состоянии формулировать свои мысли коротко*» (22 марта 2011 г. 17:19), «*Ну знаете, Вальдис, это просто невежливо*» (24 февраля 2011 г. 17:53), «*это довольно смехотворно*» (16 февраля 2011 г. 4:19) и другим подобным. Не люблю оставаться в долгу.

[46] **В.Э.:** А это страховка от возможного грубого ответа. (Ответ, однако, был приличным).

Я начал эту книгу (а также другие изложения, такие как в Предисловии к книге {PENRO2 = МОИ № 14, стр.92}) – начал с описания сущности чисел и всей математики с позиций Веданской теории. Согласно Веданской теории числами являются таксоны классификации множеств и соотношений множеств. (Обозначим этот мой тезис как Тезис 1).

Цифры же и всякие их комбинации по Веданской теории являются нотатами (обозначениями), а операции над ними – вторичными операциями. Я говорил, что в традиционной математике это различие проводится недостаточно четко и назвал услышанным от Юрия Манина словом «реификация» {POTI-1.Reifikacija = МОИ № 41, стр.95} тот подход, когда числами считают цепочки цифр, – подход, восходящий к Вейерштрассу и Кантору, повторенный Пенроузом и, видимо, Маниными. Лишь с «определенной натяжкой» {PENRO2.Chislo_i_notata = МОИ № 41, стр.106} я согласился принять и рассматривать этот подход Вейерштрасса–Кантора–Пенроуза–Маниных. Я согласился рассматривать этот подход, но это никогда не было моим тезисом; это было вашим тезисом, господа Вейерштрасс, Кантор, Пенроуз и Манины! (Обозначим этот ваш тезис как Тезис 2).

Кантор начал рассматривать ВСЕ возможные последовательности цифр (в рамках Тезиса 2 считая их числами), и тогда я выдвинул свой тезис (обозначим его как Тезис 3), и он звучал так: «Если вы хотите рассматривать ВСЕ (!) возможные последовательности знаков алфавита, состоящего из S знаков, то вы должны учитывать, что при длине строки n количество строк будет S^n, и диагональный процесс не может быть проведен корректно; для того, чтобы диагональный процесс был корректным, требуется, чтобы имело место $n = S^n$.»

На протяжении всей этой дискуссии Маниными ни разу не был атакован ни один из моих тезисов (ни Тезис 1, ни Тезис 3). Дмитрий Манин их вообще никак не касался, не упоминал в своих ответах, не возражал – как будто их и не было. (И в самом деле: а что тут возразишь?).

Вся атака была сконцентрирована на Тезис 2 (то есть – на их собственный тезис), правда, не прямо, а косвенно, всякими окольными путями и при этом приписывая следствия этого тезиса мне, как будто это моя точка зрения.

Итак: моя точка зрения заключалась в тезисе 1: «Числа есть таксоны классификации множеств».

Вейерштрасс, Кантор, Пенроуз и Манины ввели тезис 2: «Числа есть цепочки цифр».

Тогда в ответ я ввел Тезис 3: «Если введен тезис 2, то цепочки цифр должны рассматриваться на базе алгоритма А, и нет принципиальной разницы между натуральными числами и дробями».

Теперь Дмитрий Манин говорит: «Нет, при такой интерпретации плохо получается с бесконечными натуральными числами – непонятно, сколько будет в остатке, если бесконечное 33333... разделить на 11»!

А что я должен отвечать? Я что ли ввел Тезис 2 с его отождествлением числа и нотаты? Плохо получается? Не нравится? – Ну так выкиньте в мусорник все эти построения Кантора вокруг бесконечных цепочек цифр, которые якобы числа, с его диагональным процессом, который никогда не может быть проведен корректно и никогда ничего не доказывает, потому что момент $n = S^n$ никогда не наступает!

И даже если вы сохраните Тезис 2 (с его отождествлением числа и нотаты), если вы в матрице алгоритма А отбросите бесконечные цепочки, когда мы интерпретируем эту матрицу как натуральные числа, но сохраните, когда мы интерпретируем ее как бесконечные дроби, и если таким образом получите горячо желаемый результат (что невозможно множество дробей поставить во взаимно однозначное соответствие с натуральными числами), – даже и в таком случае этот результат будет получен НЕ ПУТЕМ ДИАГОНАЛЬНОГО ПРОЦЕССА – и всё равно надо будет корректировать парадигму официальной математики.

Научно-популярное издание
«Мысли об Истине»
Выпуск № 42
Сформирован 27 января 2016 года

Все читатели приглашаются принять участие в создании альманаха МОИ и присылать свои статьи и заметки для этого издания по адресу: Marina.Olegovna@gmail.com. Если присланные материалы будут соответствовать направлению Альманаха и минимальным требованиям информативности и корректности, то они будут опубликованы в нашем издании.

Основной вид существования Альманаха МОИ – в виде PDF-файлов в Вашем компьютере. Держите все выпуски МОИ в одной папке. Скачать PDF-ы можно с разных мест в Интернете, и не важно, откуда номер скачан. В Интернете нет одной фиксированной резиденции МОИ.

Содержание