



NATURA CUPIDITATEM INGENUIT HOMINI VERI VIDENDI
Marcus Tullius Cicero
(Природа наделила человека стремлением к познанию истины)

Мысли Об Истине

Альманах «**МОИ**»
Электронное издание, ISBN 9984-688-57-7

Альманах «Мысли об Истине» издается для борьбы с лженаукой во всех ее проявлениях и в поддержку идей, положенных в основу деятельности Комиссии РАН по борьбе с лженаукой и фальсификацией научных исследований. В альманахе публикуются различные материалы, способствующие установлению научной истины и отвержению псевдонаучных заблуждений в человеческом обществе.

Альманах издается с 8 августа 2013 года
Настоящая версия тома выпущена **2015-11-25**

© 2014 Марина Ипатьева (оформление и комментарии)



Е.В. Троицкий, профессор Кафедры высшей геометрии Мехмата МГУ

Декларация Троицкого

Я, нижеподписавшийся Троицкий, Евгений Вадимович, 1961 г.р., доктор физико-математических наук, профессор Кафедры высшей геометрии и топологии Мехмата МГУ, своей подписью под настоящим документом подтверждаю следующие свои заявления:

1. Я понимаю, и все мои коллеги с Кафедры понимают, что рассуждения Георга Кантора являются ошибочными и что доказательства, приведенные Мариной Ипатьевой в сборнике [МОИ № 5](#) неопровержимы.

2. Ни я лично, ни мои коллеги с Кафедры, не в состоянии привести какие-либо контраргументы против доказательств, представленных Мариной Ипатьевой в указанном сборнике.

3. И я лично, и все мои коллеги с Кафедры, понимаем, что факт признания мировым математическим сообществом «теории Кантора» правильной в течение более чем столетия является катастрофическим просчетом этого сообщества и доказательством тотальной ненадежности всех оснований современной математики и всего образа мышления, в ней используемого.

4. Однако и я лично, и все мои коллеги с Кафедры, несмотря на нашу полную неспособность что-либо возразить и как-то оспорить предъявленные нам доказательства, будем упорно отрицать факт (3), потому что речь идет о «чести мундира» нашего сословия, потому что мы боимся гнева влиятельных коллег и вообще нашего сообщества.

5. И я лично, и все мои коллеги с Кафедры, понимаем, что это представляет собой трусость, непорядочность и жульничество по отношению к Науке; мы понимаем, что наше поведение недостойно настоящих ученых.

6. Осознавая это и внутренне чувствуя свою вину, я объявляю от своего имени и от имени всех своих коллег с Кафедры: Мы согласны, что наши имена, звания и фотографии будут Мариной Ипатьевой публично использоваться в Интернете для демонстрации глупости и непорядочности профессиональных математиков, их полной неспособности защитить «официальную точку зрения».

7. Настоящая Декларация вступает в силу с даты, проставленной под ней, за исключением случая, если Кафедра до этой даты представит альманаху МОИ возражения против предъявленных ей доказательств.

Своей подписью под настоящим документом я публично – в Интернете – подтверждаю правильность всего выше сказанного,

Троицкий, Евгений Вадимович,
доктор физико-математических наук,
профессор Кафедры высшей геометрии и топологии Мехмата МГУ,

1 сентября 2014 года

* * *

Такую потрясающую декларацию профессор Троицкий подписал 1 сентября 2014 года. Переписка с ним и вообще с Кафедрой высшей геометрии Мехмата МГУ, в контексте которой данная Декларация находится, будет опубликована в одном из следующих выпусков альманаха МОИ.

А пока что в настоящий выпуск альманаха МОИ я помещаю Первую книгу «Начал» Евклида вместе с относящимися к этой книге комментариями Д.Д. Мордухай-Болтовского. Текст воспроизводится по изданию «Начала Евклида», книги I–VI, перевод с греческого и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии М.Я. Выгодского и И.Н. Веселовского, Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва–Ленинград, 1950. Комментарии Мордухай-Болтовского по сравнению с бумажным изданием книги мной перенесены по возможности ближе к тому месту древнего текста, к которому они относятся, т.е. даются сразу за соответствующей главкой Евклида.

Целью моей перепечатки НЕ является просто воспроизведение классической работы античности с блестящими комментариями из XX века. Цель моей публикации – показать несостоятельность той догмы «официальной науки», которая повторяется из раза в раз, из книги в книгу и утверждает, будто Евклид создал аксиоматический метод, будто у него геометрия выводится из аксиом (и постулатов) и т.д.¹

Этой безнадежно устаревшей – фактически средневековой – догме противопоставляется (в моих комментариях) точка зрения Веданской теории, которую в 1978 году создал мой ныне покойный наставник Валдис Эгле и которую на протяжении вот уже 36 лет толпы профессоров топчут в грязь.

Настоящее издание посвящается профессорам Кафедры высшей геометрии Мехмата МГУ и лично Евгению Вадимовичу Троицкому как моему однокласснику и главному корреспонденту. Куда уж им всем до высшей геометрии, когда они не смогли разобраться с элементарной геометрией.

Марина Ипатьева

2 сентября 2014 года²

¹ **МОИ:** Классический пример этой догмы см. в сочинении Германа Вейля о Давиде Гильберте, одна глава (под названием «Аксиоматика») из которого помещена в конце настоящего тома.

² **МОИ 2014-09-02:** Фактически всё это было написано в начале августа, и была проставлена издательская дата «2 сентября», но она случайно совпала с датой действительного закрытия этого тома.

Евклид. Начала, книга I

§1. Предисловие переводчика

Значение «Начал» Евклида трудно переоценить. В течение двух тысячелетий люди изучали геометрию по «Началам» Евклида. Все систематические школьные курсы геометрии, непосредственно или через промежуточные звенья, испытывают на себе влияние «Начал». Их перевод на русский язык является поэтому не только данью классическому произведению древности, но и событием, весьма важным для преподавания геометрии в школе.

Перевод «Начал» Евклида сделан мной с греческого текста издания Гейберга. Я старался быть как можно ближе к греческому тексту, порой даже в ущерб гладкости изложения. Так же, как Петрушевский, Энриквес и Хизс, я даю риторического Евклида, решительно отказываясь перекладывать что-либо из «Начал» на современную алгебраическую символику, как это делают другие переводчики, в том числе и Гейберг. Такая символика тесно связана с идеями, совершенно чуждыми Евклиду.

Мой перевод предназначен не только для учителя, который мог бы удовлетвориться вольным переводом вроде перевода Ващенко-Захарченко, но и для лиц, ведущих работу по истории математики, заинтересованных в получении неискажённого Евклида.

При переводе даны комментарии;⁴ большая часть материала этих комментариев взята из моего архива, накопленного в моей многолетней историко-математической работе. Многие являются результатом собственных размышлений, часть взята преимущественно из старинных комментариев, о которых я буду упоминать в своих примечаниях.

В новейших больших изданиях «Начал», осуществлённых Энриквесом и Хизсом, я нашёл мало материала, который мог бы быть мной использован. Характер комментариев Хизса совершенно другой: Хизс большой знаток истории текста, но не глубокий знаток старинных комментариев и учебников.

Между тем, главное содержание моих комментариев состоит в описании различных евклидовых положений в эволюционирующем в продолжение 400 лет геометрическом учебнике. Можно сказать, что я задаюсь целью дать «Начала» Евклида сначала такими, какими они были в прошлом, т.е. в их первоначальной форме, а затем такими, какими они становятся в процессе эволюции математической мысли, превращаясь постепенно в школьный учебник геометрии.

Конечно, я рассчитываю дать не только 6 первых книг, но все 15 книг, т.е. все «Начала» полностью, причём также с комментариями, относя арифметические книги и книгу X ко второму тому, а стереометрические книги к третьему.



Дмитрий Дмитриевич Мордухай-Болтовской³ в 1906 году

³ **МОИ:** Дмитрий Дмитриевич Мордухай-Болтовской (1876.08.09 – 1952.02.07, Павловск – Ростов-на-Дону) представитель старинного русского дворянского рода (отец был инженером путей сообщения), в 1898 г. окончил Петербургский университет, с 1899 года штатный профессор Варшавского политехнического института, с 1909 г. профессор Варшавского университета, в 1915 г. эвакуированного в Ростов-на-Дону. С 1935 года доктор наук. Во время перевода «Начал» был профессором Ростовского государственного университета в Ростове-на-Дону. Книга вышла, когда ему 74 года.

⁴ В связи с изданием «Начал» Евклида на русском языке Издательство одновременно публикует ряд статей (М.Я. Выгодского, А.И. Маркушевича и др.), посвященных «Началам». Эти статьи, помещённые в первом выпуске «Историко-математических исследований» (Гостехиздат, 1948), помогут желающим более глубоко изучить творение Евклида.

На русском языке мы в прошедшем имели следующие переводы:

1739. Сатаров. Евклидовы элементы геометрии, сокращённые проф. А. Фархварсоном, пер. с латинского. Спб.

1769. Курганов. Евклидовы элементы геометрии, пер. с французского. Спб.

1784. Пр. Суворов и Вас. Никитин. Евклидовы стихии, пер. с греческого. Спб.

1819. Петрушевский. Евклидовых Начал восемь книг, пер. с греческого. Спб.

1835. Его же. Евклидовых Начал три книги: седьмая, осьмая и девятая, содержащие общую теорию чисел древних геометров, пер. с греческого.

1880. Ващенко-Захарченко. Начала Евклида с пояснительным введением и толкованием. Киев.

Ващенко-Захарченко не указывает, сделан ли им перевод с греческого или латинского языка. Перевод его очень *вольный* и местами *неправильный*. Есть основание предполагать, что он сделан с латинского издания Р. Симсона, довольно свободно обращавшегося с текстом Евклида; отсюда и взяты большей частью его комментарии, которые пополнены замечаниями переводчика, в общем довольно поверхностными. Нельзя, однако, отрицать, что издание это, несмотря на свои недостатки, оказалось очень полезным.

Свой перевод я делал, не имея под рукой перевода Петрушевского, написанного языком XVIII в. и, конечно, в настоящее время совершенно неприемлемого. Но ознакомление с ним уже по выполнению перевода убедило меня в том, что этот перевод очень хороший; хотя местами понимание Петрушевским текста не согласуется с моим, но мне кажется, что ему нельзя отказать в хорошем понимании «Начал».

При чтении текста «Начал» нужно иметь в виду следующие обозначения.

Числа в круглых скобках () указывают номер соответствующего комментария; кроме того, в круглых же скобках даются ссылки на нужное предложение «Начал», на которое опирается доказательство⁵ в рассматриваемом месте [напр.: «(предложение 11 книги I)» или просто «(предложение 11)», когда даётся ссылка на предложение той же самой книги]; нужно иметь в виду, что соответствующие ссылки сделаны Гейбергом и в самом тексте Евклида не содержатся. В тексте Гейберга чертежи не нумерованы. Нумерация их дана нами.

В квадратных скобках [] помещены слова, принадлежность которых Евклиду Гейберг считает сомнительной, но не настолько, чтобы прямо исключить их из издаваемого текста.

В угловатых скобках < > помещены добавления переводчика, необходимые для понимания иногда слишком сжатого текста Евклида.

В кавычках « » помещены термины, представляющие буквальный перевод специфической научной терминологии Евклида во избежание недоразумений; например, прямая «из центра», – это выражение стоит там, где мы просто сказали бы «радиус»; поскольку Евклид последнего термина не употребляет, то приходится его термин ставить в кавычки, чтобы читатель не подумал, что здесь идёт дело вообще о какой-то проходящей через центр прямой.

Звёздочкой *) или цифрой, например ¹⁾, ²⁾ и т.д., обозначаются ссылки на подстрочные примечания.⁶

Я надеюсь, что мои комментарии⁷ дадут толчок как историко-математической, так и методической работе над «Началами» Евклида; дальнейшие исследователи возможно вскроют и мои ошибки, за указание которых я буду весьма признателен.

Приношу свою благодарность проф. Марку Яковлевичу Выгодскому за ряд ценных указаний и советов, использованных мною, и за любезную помощь в пользовании малодоступными источниками.

Приношу свою благодарность также проф. Ивану Николаевичу Веселовскому, затратившему совместно с проф. М.Я. Выгодским большой труд на редактирование перевода «Начал» Евклида и комментариев, в процессе которого был исправлен ряд дефектов.

⁵ **МОИ:** В моем издании ссылки на комментарии даются в болде, в отличие от вставок.

⁶ **МОИ:** У меня они заменены на обычные сноски Альманаха.

⁷ **МОИ:** В своих комментариях Мордухай-Болтовской часто приводит греческие термины в оригинальном написании. Греческий алфавит, используемый в книге 1950 года, по части диакритических знаков не совпадает с тем алфавитом, который доступен мне в современном компьютере. Поэтому я не имею возможности в точности воспроизвести то написание греческих слов, которое дано в книге, и вынуждена пользоваться написанием приближенным настолько, насколько это позволяет расхождение диакритических знаков над греческими буквами в обоих алфавитах.

Часть 1. Определения, постулаты, аксиомы

§2. Определения (1)

1. Точка **(2)** есть то, что не имеет частей.⁸
2. Линия **(3)** же – длина без ширины.
3. Концы же линии – точки.
4. Прямая **(4)** линия есть та, которая равно расположена по отношению к точкам на ней.
5. Поверхность **(5)** есть то, что имеет только длину и ширину.
6. Концы же поверхности – линии.
7. Плоская поверхность **(6)** есть та, которая равно расположена по отношению к прямым на ней.
8. Плоский же угол **(7)** есть наклонение друг к другу двух линий,⁹ в плоскости встречающихся¹⁰ друг с другом, но не расположенных по <одной> прямой.
9. Когда же линии, содержащие угол, прямые, то угол называется прямолинейным.
10. Когда же прямая, восстановленная на <другой> прямой, образует рядом углы,¹¹ равные между собой, то каждый из равных углов есть прямой, а восставленная прямая называется перпендикуляром¹² к той, на которой она восставлена **(8)**.
11. Тупой угол – больший прямого **(9)**.
12. Острый же – меньший прямого.
13. Граница¹³ есть то, что является окончечностью чего-либо **(10)**.
14. Фигура¹⁴ **(11)** есть то, что содержится внутри какой-нибудь или каких-нибудь границ.
15. Круг **(12)** есть плоская фигура, содержащаяся внутри одной линии [которая называется окружностью¹⁵], на которую все из одной точки внутри фигуры падающие [на окружность круга] прямые равны между собой **(13)**.
16. Центром же круга называется эта точка **(14)**.
17. Диаметр же круга есть какая угодно прямая, проведённая через центр и ограничиваемая с обеих сторон окружностью круга, она же и рассекает круг пополам.
18. Полукруг же есть фигура, содержащаяся между диаметром и отсекаемой им <частью> окружности. Центр же полукруга – то же самое, что и у круга.
19. Прямолинейные **(15)** фигуры суть те, которые содержатся между прямыми, трёхсторонние¹⁶ – между тремя, четырёхсторонние же – четырьмя, многосторонние же – которые содержатся между более чем четырьмя прямыми.

⁸ Точка у Евклида σημείον. Аристотель чаще пользуется словом στήνι, чем σημείον, в противоположность Платону. Этим двум греческим терминам соответствуют латинские signum и punctum, причём второй термин более распространён.

⁹ Евклидово χλίσις (склонение, наклон) Марцианом Капеллой (V в.н.э.) переводится словом inclinatio – наклонение.

¹⁰ У Евклида «касающихся» (ἀπτομένων).

¹¹ Вместо евклидовых αἱ ἐφεξῆς γωνίαι Герон употребляет термин ἀντιχέμεναι – лежащие напротив друг друга. В русской литературе установился термин «смежные углы».

¹² У Евклида «отвесная» (χάθετος – без члена). Латинский термин *perpendicularis* есть буквальный перевод этого слова; от него произошёл и наш обычный термин – перпендикуляр.

¹³ У Евклида говорится; «ὁρος ἐστίν, ὁ τίνος ἐστὶ πέρας». Слово ὁρος – граница, пограничный камень, и πέρας – край, окончечность, не соответствуют математическому термину «предел». Слово ὁρος употребляется и в смысле определения (*definitio*) и в смысле границы (*terminus*). Для греков определить какой-нибудь объект – значило отграничить его от других.

¹⁴ Греческому слову σχῆμα отвечают два латинских *figura* и *forma*.

¹⁵ Термин «окружность» (περίφερεia – буквально «обвод») Евклид употребляет и в смысле дуги и в смысле целой окружности.

¹⁶ У Евклида τρίπλευρα. Переводить словом «треугольный» нельзя; для этого имеется специальный термин τρίγωνον, который Евклид и употребляет ниже без особого определения.

20. Из трёхсторонних фигур равносторонний треугольник¹⁷ есть фигура, имеющая три равные стороны, равнобедренный же – имеющая только две равные стороны, разносторонний¹⁸ же – имеющая три неравные стороны.

21. Кроме того, из трёхсторонних фигур прямоугольный треугольник есть имеющий прямой угол, тупоугольный же – имеющий тупой угол, а остроугольный – имеющий три острых угла.

22. Из четырёхсторонних фигур квадрат¹⁹ есть та, которая и равносторонняя и прямоугольная, разносторонник²⁰ же – прямоугольная, но не равносторонняя, ромб – равносторонняя, но не прямоугольная, ромбоид (параллелограмм) – имеющая противоположные стороны и углы, равные между собой, но не являющаяся ни равносторонней ни прямоугольной.

Остальные же четырёхсторонники будем называть трапециями²¹ (16).

23. Параллельные²² суть прямые, которые, находясь в одной плоскости и будучи продолжены в обе стороны неограниченно²³, ни с той ни с другой <стороны> между собой не встречаются²⁴ (17).

§3. Комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского

1. Евклидовы определения. Большую ошибку делают те комментаторы, которые видят в евклидовых определениях *номинальные* (чисто словесные) определения. Начало этой ошибки относится к XVII в., когда признавали только два рода определений: *реальные* и *номинальные*,²⁵ причем первые мыслились согласно общему мировоззрению того времени иначе, чем мыслились определения в античное время.

Такой взгляд проводится в XVIII в. Ламбертом.²⁶ «То, что Евклид предпосылает в определениях, – говорит он, – это только *номенклатура*; он делает не что иное, как то, что делает часовщик или какой-либо другой ремесленник, который, начиная обучать ученика, знакомит его прежде всего с названием своих инструментов».

Номинальный характер в евклидовых определениях видел и Кестнер²⁷ на том основании, что Евклид не старался оправдать своих определений.

¹⁷ У Евклида *ἰσοπλευρον τρίγωνον* – буквально «равносторонняя треугольная» (подразумевается «фигура»). Здесь и всюду мы будем переводить просто «треугольник».

¹⁸ У Евклида *σχαληνός*. На русском языке нет подходящего термина: косой или косоугольный обозначает нечто совсем другое. Специальное название для разностороннего треугольника показывает, что этот термин установился в конце исторического развития понятия о треугольнике: первоначально рассматривались лишь правильные треугольники, потом появились равнобедренные и, наконец (возможно в эпоху Евклида), разносторонние, получившие даже особое название. В современной школе при господстве убеждения о необходимости перехода от общего к частному в специальном термине для разностороннего треугольника нет надобности.

¹⁹ У Евклида *τετράγωνον*, т.е. просто «четыреугольник». Ясно, что первым четырехугольником, с которым познакомилась геометрия, был квадрат.

²⁰ У Евклида *ἑτερόμηχες* – наш прямоугольник в общем смысле. Этот термин встречается у Аристотеля. Интересно, что у Евклида в «Началах» ни этого термина, ни других («ромб», «ромбоид») более уже не встречается. Свойства ромба вообще не изучаются; вместо «ромбоида» же он пользуется термином «параллелограмм» – буквально «параллельнолинейная» (подразумевается фигура). Прямоугольники рассматриваются во 2-й и следующих книгах и называются «прямоугольными параллелограммами». У Архимеда параллелограмм употребляется в смысле нашего прямоугольника.

²¹ Трапеция (*τραπέζιον* – буквально «столик») здесь понимается в смысле четырехугольника общей формы. Герон различает *τραπέζια* (наши трапеции) и *τραπέζοειδή* (трапецевидные) – трапеции в смысле последнего определения Евклида. Интересно, что у Гиппократа Хиосского употребляются трапеции и притом именно в нашем смысле слова. Возможно, что всё определение 22 в конечном счёте восходит к первому учебнику геометрии – гиппократовым «Элементарам», откуда они и были заимствованы Евклидом непосредственно или через промежуточные обработки «Элементов».

²² *παράλληλοι* = *εὐθεῖαι παράλληλας ἡγμεναι*, т.е. прямые, проведённые друг подле друга.

²³ *Εἰς ἀπειρον* – буквально «в неопределённость». Греки избегали нашего понятия «бесконечность».

²⁴ *συμπίπτουσιν ἀλλήλαις* – совпадают, сталкиваются, встречаются друг с другом, но ни в коем случае не пересекаются.

²⁵ (Arnauld et Nicole), *L'art de penser* (порт-роялевская логика), 1662.

²⁶ Lambert, *Organon*, т. 1, стр. 32. Deutscher Gelehrter Briefwechsel, т. IV, Brief an Holland, 1764, стр. 23.

²⁷ Kästner, *Philosophisch-Mathematische Abhandlungen*, s. Was heizt in Euclid's Geometrie möglich? §13, стр. 17.

Следует обратить внимание, что в определениях 10, 11, 13, 14, 17, 18 и др. книги I стоит «есть», а «называется» только в 9, 10, 16. Уже это одно говорит в пользу того, что мы здесь имеем не номинальные определения, а *определения-описания*, которые представляют собой типичные *античные* определения, правда, смешанные с *гекетаческими* определениями более раннего типа.

Я предлагаю читателю внимательно прочесть евклидовы определения.

Определение 1: «точка есть то, что не имеет частей». Затем идёт определение линии: «длина без ширины». Всё это, конечно, *логически не действующие* определения, *описания*, не имеющие отношения к выводам, относящимся к точке и линии.

Но затем следует определение 3: «Концы же линии точки». Здесь не даётся *названия* и вовсе не исследуется *сущность* концов; это, конечно, не второе определение точки, которая уже *определена*; это просто констатирование геометрического факта; в концах линии точки.

Четвёртое определение, тоже логически не действующее, имеет явно выраженный характер *описания*: «Прямая линия есть та, которая равно расположена по отношению к точкам на ней» (см. комментарий 4).

Определение 10 прямого угла не следует толковать в том смысле, что название «прямой угол» дается тому углу, который равен своему смежному, а в том, что угол, который в таком случае получается, есть как раз тот, который называется прямым.

То же относится и к определению прямой, перпендикулярной к плоскости (предложение 3 книги XI).

Неужели определение 13, говорящее, что граница есть то, что является наиболее внешним в вещи (оконечность её), будет определенном в нашем смысле? Это опять только выявление характерного свойства того, что *известно* и что уже имеет определенное название.

Только там, где указываемыми в определении признаками вещь *вполне* определяется, и где термин такой, что можно геометру приписать его введение, можно еще видеть *номинальное* определение, а именно, в определениях 19, 20, 21, 22, 23 книги I Начал.

Выявляя характерные признаки геометрических объектов, некоторые евклидовы определения носят характер аксиом и могут быть сформулированы как аксиомы, но при этом можно прибавить: *в высшей степени очевидные*. Так, в определении 1 книги III Начал устанавливается равенство кругов по равенству диаметров, что в некоторых учебниках XVII в. выставляется как аксиома.

К числу такого рода определений я отношу и определение 11 книги III: «Подобные сегменты те, которые заключают равные углы или в которых углы друг другу равны».

То же следует думать и об определении подобия прямолинейных фигур (определение I книги VI).

В книге V имеется определение 3 отношения: *отношение – это зависимость двух однородных величин по количеству*.²⁸

Это, конечно, логически не действующее и очень общее определение. Но за ним следует определение 4: *говорят, что величины имеют отношение друг к другу, если они, взятые кратно, могут превзойти друг друга*.

Это определение тоже обнаруживает *аксиоматический* характер; оно указывает, когда такая зависимость, о которой говорит определение 3, имеет место.

Описательные определения мы находим и до Евклида, например, у Платона,²⁹ который в диалоге «Парменид» говорит, что прямая – это линия, середина которой покрывает оба конца; это сводится к *зрительному эксперименту* над прямой, при котором прямая представляется точкой.

Определения Герона³⁰ представляют развитие евклидовых описательных определений, а именно, в направлении более подробного и более лёгкого описания. Герон рассказывает, что линия не имеет ни ширины, ни глубины, что она возникает, если точка движется сверху вниз без перерыва, что она составляется из точек и ограничена точками и что она представляет границы поверхности. К тому, что Евклид говорит о прямой, Герон прибавляет то, что она (как это до него

²⁸ Д. Мордухай-Болтовской, К истории пятой книги Начал Евклида. Математическое Образование, 1916.

²⁹ Платон, Творения, диалог «Парменид». Пер. Карпова или Соловьева, Спб. 1863–1879 и 1899–1903.

³⁰ Heronis Alexandrini, Opera, bearbeitet von Schmidt, Schöne, Heiberg, Leipzig 1899–1912.

отмечает ещё Архимед) кратчайшая из линий, имеющих те же концы. К евклидову определению плоскости он прибавляет, что прямая с двумя точками на плоскости целиком оказывается на ней.

К *генетическим* определениям (т.е. определениям, дающим способ образования вещи) можно отнести только содержащиеся в книге XI определения шара (14), конуса (18) и цилиндра (21).

Но почему Евклид не даёт и окружности, а через неё и кругу, тоже *генетическое* определение?

Не проще было бы получить круг вращением прямой около неподвижной точки, чем определить окружность равенством расстояний от центра?

Я думаю, что раньше так и было. Окружность являлась кривой, проводимой циркулем; только потом произошло расслоение на определение 15 и постулат 3, утверждающий возможность получить циркулем кривую линию со свойствами определения 15.

Что же касается шара, то здесь дело обстоит как раз наоборот: для него первоначально не могло существовать генетического определения, а могло быть только *описание*; оно, вероятно, и существовало в форме, аналогичной определению плоскости, и при этом не для шара непосредственно, а для его поверхности. Вероятно, она определялась равенством расстояний от центра; генетическое же определение было вызвано предложением 18 книги XII, дающим отношение объёмов двух шаров.

Аристотель³¹ говорит обычно только о *реальных* определениях, хотя от него идет различие номинальных и реальных определений.

По Вейдлеру³² номинальные определения дают только признаки различаемых вещей, реальные же говорят о происхождении. При таком понимании негенетические евклидовы определения оказываются номинальными.

В заключение заметим, что Лейбниц³³ *номинальные* определения понимает шире, чем просто словесные; они указывают признаки, по которым можно отличить одну вещь от другой. Реальными же будут такие, которые выявляют возможность существования вещей; иначе говоря, реальными будут только оправданные определения.

Казалось бы, что с этой точки зрения следует все определения Евклида принять за номинальные. Но с точки зрения Евклида вводимые определения, по-видимому, оправдывались интуицией; поэтому и с этой точки зрения его описательные определения не являются номинальными.

2. **Точка.** Существует несколько определений точки.³⁴ Прежде всего *отрицательные*, против которых решительно выступают многие методисты. Таково евклидово определение; в нём отмечается *неделимость* точки, так что совершенно одинаково определяется и точка и *актуально-бесконечно малое* неделимое в смысле Кеплера и Кавальери; оба понятия сливаются.

Конечно, евклидово определение точки менее всего подходило к идеям того времени, когда практиковался метод неделимых. Гораздо лучше с этими идеями ладило определение Герона³⁵ – *точка то, что не имеет величины* (по нашему протяжения).

Но героновское определение, как и другие отрицательные определения, грешит тем, что под него подходит и много других вещей, ничего общего не имеющих с точкой.

В средние века подчеркивалось, что точка есть *место без протяжения*.³⁶

За положительное определение точки выставляется обычно то, которым пользуется современный учебник, заставляющий мыслить точку, согласно определению 3 Евклида (являющемуся для Евклида по существу аксиомой), как границу линии. С методической точки зрения оно является лучшим.

³¹ Aristotelis, Opera, ed. Didot. Analitica Posteriora, кн. 2, стр. 3,7, Topica, кн. 7, стр. 3. Joh. Broscius, Aristotelis et Euclidis defensio contra Petrum Ramum, Amstelodami, 1640, – Meinard, Abrégé et définitions des sciences principales et des plusieurs de leurs termes, Paris, 1694.

³² Weidlerus, Institutiones Mathematicae. Vienbergae, 1751, Prologum.

³³ Leibniz, Opera, ed. Gerhardt, т. IV, стр. 452, Lettre à Tschirnhausen.

³⁴ Aristotelis, Opera, ed. Didot. Analitica Posteriora, кн. 2, стр. 3,7, Topica, кн. 7, стр. 3. Joh. Broscius, Aristotelis et Euclidis defensio contra Petrum Ramum, Amstelodami, 1640, – Meinard, Abrégé et définitions des sciences principales et des plusieurs de leurs termes, Paris, 1694.

³⁵ Heronis Alexandrini, Opera, bearbeitet von Schmidt, Schöne, Heiberg, Leipzig 1899–1912.

³⁶ Mich. Psellus, Compendium Mathematicum Leyden, 1647. – Savllius, Lectiones mathematicae et opticae III, – Fresenius, Der mathem. Punkt. Zeitschrift der mathem. Unterricht, т. IV, стр. 350–354.

Определение точки и линии как границы находим у Бальцера, Каталана, Рушэ-Комберусса, Бланшэ. Рейхенбенгер собирает различные определения точки: 1) точка не имеет измерений, 2) не имеет ни длины, ни ширины, ни глубины, 3) единое и неделимое, наименьшее различимое.

В чисто *схоластическом* направлении идёт Патриций,³⁷ пытающийся построить основы геометрии: точка для него не только то, что не имеет частей, но ещё и то, что неделимо (ибо части могут получаться и не процессом деления, который относится к континууму). Затем точка – не количество, точка не может быть больше и не может быть меньше (возрастающее им мыслится независимо от делимости). Точка не сравнима. Она не измерима. Она не занимает никакого пространства. К этим свойствам он присоединяет ещё ряд других, причём всегда отрицательных.

3. Линия. Евклидово второе определение в несколько неуклюжей форме выражает, что линия есть протяжение *одного измерения*. Интересно отметить, что некоторые выставляют характерным свойством линии не её *одномерность*, а её *двусторонность* в том смысле, что от всякой точки она протягивается только в *две стороны*, а не в бесконечное множество сторон, как поверхность.

Такое определение, конечно, относится только к бесконечно продолженным линиям, а не к отрезкам, так как в случае ограниченности на одном конце линия протягивается только в *одну* сторону (полупрямая) или совсем не протягивается.

Обычно школьное определение линии как *границы поверхности* иногда заменяется *форономическим* (в основе которого лежит движение): *линия есть то, что описывается движущейся точкой*.

4. Прямая. Выше было отмечено, что евклидовы определения³⁸ носят *описательный* характер. Евклидов тип определений сохраняется в учебниках в большей или меньшей мере во все эпохи, и эти определения с *методической* точки зрения *неизбежны*.

Всякое не только *форономическое*, но даже *генетическое* определение использует то представление о геометрическом объекте, которое ученик имеет, хотя и в смутной форме, до начала изучения геометрии. И к этому представлению геометрический учебник должен приспособляться.

Нельзя отрицать, что некоторые форономическкe приёмы с методической точки зрения очень ценны, но форономическое определение прямой как линии, не меняющей положения при вращательном движении, с закреплёнными двумя концами совершенно не годится. Это определение приписывается Платону; оно приводится Проклом, затем Лейбницем. Определение прямой *единственностью* направления лучше, но для учебника наиболее удобно то свойство, которое намечается самим Евклидом.³⁹

Следует уяснить себе, что Евклид (в определении 4) имеет в виду *изогенность* прямой, т.е. сохранение всех её свойств и различных точках. Они здесь таковы же, как там. Совершенно неправильно выставляют окружность как опровержение евклидова определения: Евклид имеет в виду все свойства прямой, включая сюда и направление.

Но Лейбниц⁴⁰ (видимо, неправильно толкуя определение Евклида) имеет в виду *гомогенность*, т.е. то, что прямая в целом имеет те же свойства, что всякая её часть. В *малом* она то же, что в *большом*.

В середине XIX в. иногда приводилось определение Л. Бертрана,⁴¹ который тоже подчёркивает *изогенность* прямой; прямая характеризуется тем, что разделяет плоскость на две части, обладающие совершенно одинаковым свойством по отношению к этой прямой. Следует отметить, что это свойство, хотя и в несколько иной форме, выдвигалось Лейбницем.

³⁷ Patricius, Scientia nova, XVI в.

³⁸ H. Müller, Lehrbuch der Geometrie, Leipzig 1874.

³⁹ Kraft, Institutiones Geometricae, Tubingen, 1788. – Krause, Elemente der Geometrie, Berlin, 1875.

⁴⁰ Leibniz, Mathem. Schriften, her. Gerhardt, Abt. 2, т. III. Characteristica Geometrica, стр. 131; In Euclidis прота, стр. 183. – Zacharias, Die Definition der geraden Linie nach Cornelius und Mohrman. – Cornelius, Psychologie des Erfahrungs-Wissenschaft. Leipzig, 1892 (определение Лейбница).

⁴¹ L. Bertrand, Développement nouveau de la partie élémentaire de Géométrie, Genève, 1778. Его же, Géométrie, 1812. – Delboeuf, Prolégomènes philos. de la Géométrie 1860. Revue philosophique, т. 36–39. – Laplace, Exposition du système du monde, Paris, 1824 (есть русский перевод).

Можно сомневаться в отнесении к описательным определениям лежандрова⁴² определения прямой как *кратчайшего* расстояния между двумя точками (оно выставлялось скорее как аксиома Архимедом)⁴³.

Такое определение является чем-то вроде постулата, выдвигающего некоторые свойства, которые хотя, может быть, и очевидны, но в значительно меньшей степени, чем очевидны аксиомы. Действительно, при лежандровом определении мы постулируем, что в процессе сравнения длин бесконечного множества различных линий мы в конце концов приходим к некоторой линии, длина которой оказывается наименьшей.

Следует отметить, что неясное определение Евклида истолковывается различными лицами различно.

Я считаю близким к истине толкование Симона,⁴⁴ который понимает $\chi\epsilon\acute{\iota}\tau\alpha\iota$ как страдательную форму от $\tau\acute{\iota}\theta\eta\mu\iota$ (кладу) и разъясняет так, что прямая есть линия, равномерно данная своими точками, т.е. линия, на которой ни одна точка не отличается от другой (свойство изогенности прямой).

Другие связывают $\tau\omicron\acute{\iota}\varsigma$ $\sigma\eta\mu\epsilon\acute{\iota}\omicron\iota\varsigma$ (точками) с $\chi\epsilon\acute{\iota}\tau\alpha\iota$ и переводят так: прямая есть линия, равномерно расположенная относительно своих точек. При этом «равномерность» одними истолковывается в смысле определяемости прямой при помощи двух точек (что, по моему мнению, неправильно, ибо тогда наряду с постулатом 1 оказалась бы совершенно лишняя аксиоматизированная его форма, данная в виде определения).

Третьи понимают равномерность в том смысле, что на всём протяжении прямой найдутся отрезки, равные данному.⁴⁵ Это тоже я считаю маловероятным, потому что Евклид должен же был заметить, что аналогичное свойство присуще и окружности.

Энриквес⁴⁶ защищает ту точку зрения, на которой стоит Прокл⁴⁷ в своём толковании. Он считает тот $\sigma\eta\mu\epsilon\acute{\iota}\omicron\iota\varsigma$ определением к $\acute{\epsilon}\varsigma$ $\acute{\iota}\sigma\omicron\upsilon$ и переводит так: прямая есть линия, которая одинаково расположена относительно своих точек. Это вполне соответствует разъяснению Прокла, что прямая есть такая линия, отрезок которой между двумя её точками совпадает с расстоянием между ними.

Аналогично этому можно было бы сказать, что прямая есть единственная линия, направление которой совпадает с направлением относительного расположения двух её точек. Эта точка зрения, при которой приоритет предоставляется *направлению*, и прямая определяется как линия, во всех точках которой направление одно и то же, приводится во многих учебниках, начиная с Грассмана.

Оба эти толкования могут быть приняты только в одной из приведённых *частных* форм, так что термин «относительно» остается совершенно неопределённым. Нужно сказать, что нигде у Евклида не видно, чтобы понятия расстояния или направления он считал бы первичными, предваряющими понятие прямой. Очень часто понятие прямой вводится неявно при помощи постулата (Каталан, Бальцер, Рушэ, Дюгамель, Безу, Боссю), и тогда свойство, что она является кратчайшим расстоянием, уже доказывается.

Во всех таких толкованиях чисто *описательное* евклидово определение хотят сделать так или иначе логически действующим, возвести его в ранг рабочей аксиомы.

Заканчивая разбор евклидовского определения прямой, вполне уместно будет сопоставить и то, как вообще определялось понятие линии.

По Герону, линия есть то, что имеет измерение в одном лишь направлении (определение 8), поверхность – в двух (определение 10), тело же есть то, что имеет три измерения (определение 13).

⁴² H. Grassman, Ausdehnungslehre. Einleitung, 1844, Werke, т. I, стр. 28. – Dixon, The foundations of Geometry, Cambridge, 1891. – Bettini, Sulla definizione della retta linea. Periodico di Matematica, VIII, 1893, стр. 49. Legendre, Éléments de Géométrie. 1794. Есть русский перевод 1837.

⁴³ Arhimedes, Werke übers. Nizze-Strasburg, 1824, стр. 43.

⁴⁴ Simon, Euclidis sechis-planimetrische Bücher, Leipzig, 1901.

⁴⁵ Cornelius, Psychologie des Erfahrungs-Wissenschaft. Leipzig, 1892.

⁴⁶ Энриквес, Вопросы элементарной геометрии, 1913. Статья Амальди, О понятии прямой и плоскости.

⁴⁷ Procli, Diadochi in primum Euclidis elementorum librum Commentarium, bearb. Friedlein, Leipzig, 1873. Старое издание Barocius'a, Padova, 1560. – О Прокле см. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, т. I, стр. 463. – Hartmann, Des Proclus Diadochus Philos. Anfangsgründe der Mathematik. Philos. Abhandlungen, herausg. Rohn und Natorp, 1 тетр. Giessen, 1909.

Кривая Евклида и Лежандра – это линия,⁴⁸ не являющаяся ни прямой и ни ломаной. По Боссю и Безу, это траектория движущейся точки, меняющей направление своего движения. У Ламарля⁴⁹ кривая есть траектория, описываемая точкой, скользящей по прямой, которая вращается вокруг своего конца; это определение по существу равносильно выражению уравнения кривой не в декартовых, но в полярных координатах.

Евклид определяет линию (мы теперь сказали бы – кривую) как *длину без ширины*. В настоящее время мы выразили бы это так: кривая представляет плоское множество без *внутренних* точек. Другое свойство линии – это её связность, т.е. возможность проведения через точки множества такой ломаной линии, что все стороны последней меньше любого наперёд заданного отрезка. Г. Кантор считает все свойства кривой исчерпанными в следующем определении⁵⁰: *Кривая есть совершенное и связное множество без внутренних точек*.

В поисках обобщения иногда отходят от более естественного геометрического определения кривой и определяют её аналитически. Таково жордановское определение кривой при помощи параметрических уравнений

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

где φ и ψ представляют непрерывные функции параметра t . Это определение вполне отвечает форономическому определению линии как траектории движущейся точки: параметр t в последнем случае является временем.

Для жордановского⁵¹ определения существенно то, что если рассматриваемая кривая замкнута и не имеет кратных точек, то она делит плоскость на две части – внешнюю и внутреннюю.⁵²

5. Поверхность. О поверхности приходится повторить всё то, что сказано выше о линии. Хорошо всем известно школьное определение поверхности как границы тела. Часто оно заменяется форономическим: поверхность есть то, что описывается движущейся линией. При этом, однако, не замечают того, что линия может описывать тоже линию, а не поверхность – это в том случае, если она может двигаться по самой себе. Такова прямая,двигающаяся по своему направлению, или окружность, вращающаяся около своего центра.

6. Плоскость. Евклидово описательное определение плоскости, основанное на изогенности, не пользуется распространением. Также не пользуется распространением лейбницевское определение плоскости, основанное на гомогенности и аналогичное его определению прямой. Оно в значительной мере осложняется введением корректива: следует требовать подобия части и всей плоскости, предполагая, что и часть и целое обнимаются подобными линиями.

Л. Бертран⁵³ определяет плоскость как поверхность, делящую пространство на части, находящиеся к ней в одинаковом отношении.

Обычное наше определение плоскости как такой поверхности, с которой совмещается всякая прямая, имеющая с ней две общие точки, должно быть отнесено к форономическим; оно совершенно не евклидовского характера и более подходит к определениям геометров до Евклида.

Следует отметить *генетическое* определение плоскости как поверхности, образуемой движением прямой, проходящей через точку и пересекающей прямую.

Данное выше генетическое определение, выдвинутое Крелле,⁵⁴ было вызвано замечанием Гаусса⁵⁵ об обычном определении плоскости, которое Крелле приписывает Р. Симсону,⁵⁶ хотя оно имеется уже у Герона.⁵⁷ Гаусс замечает, что это определение содержит в себе постулат (или

⁴⁸ Legendre, *Éléments de Géométrie*. 1794, также I. Müller, *Lehrbuch der Mathematik*, Halle, 1844.

⁴⁹ Lamarle, *Exposé Géométrique du calcul diff. et integr.* Paris, 1861.

⁵⁰ Mangoldt, *Die Begriffe der Linie und Fläche*. *Encyclopadie der Mathematischen Wissenschaften*, т. III, стр. 130.

⁵¹ Jordan, *Cours d'Analyse*, 2 ed., т. I, Paris, 1893, стр. 91.

⁵² Н. Лузин, *Теория функций вещественного переменного*, Москва, 1940. – Osgood, *Lehrbuch der Functionentheorie*, Leipzig, 1906, стр. 120–121.

⁵³ L. Bertrand, *Développement nouveau de la partie élémentaire de Géométrie*, Genève, 1778. Его же, *Géométrie*, 1812. – Delboeuf, *Prolégomènes philos. de la Géométrie* 1860. *Revue philosophique*, т. 36–39.

⁵⁴ Crelle, *Zur Theorie der Ebene*, Crelle's Journal für Mathematik, т. 45, 1845. – Crelle, *Lehrbuch der Elemente der Geometrie*, Berlin, 1847.

⁵⁵ Письмо к Бесселю от 27/VII 1827.

⁵⁶ R. Simson, *Euclidis elementorum libri priores sex item undecima et duodecima*, Glasguae, 1756.

⁵⁷ Heronis Alexandrini, *Opera*, bearbeitet von Schmidt, Schöne, Heiberg, Leipzig 1899–1912.

теорему), что плоскость получается проектированием прямой из какой-либо точки, ей не принадлежащей.

Крелле пытался, но не вполне удачно, доказать, что вид получаемой поверхности не зависит от выбора точки и прямой и что прямая, имеющая две точки на этой поверхности, целиком лежит на ней.

Форонимическое определение плоскости даётся Бальцером и Уэлем. Дюгамель определяет плоскость как поверхность, описываемую прямой, вращающейся вокруг другой прямой (оси вращения) и ей перпендикулярной. Отметим в заключение ещё довольно искусственное определение, приводимое тоже Лейбницем и используемое Лобачевским и Больяй: *прямая есть геометрическое место точек, равноотстоящих от двух заданных точек*.

7. Угол. Герон⁵⁸ определяет угол несколько иначе, чем Евклид: угол – это сжатие поверхности в точке, производимое ломаной линией (определение 11). Плоский угол – это сжатие в точке (определение 12).

Евклидово определение угла⁵⁹ как наклонения было наиболее распространено в школе XIX в. Интересно, что параллельно ему даётся и другое определение, которое, как чисто номинальное, выдвигается уже и современной формально гипотетической геометрией, например у Гильберта.⁶⁰ Угол здесь сводится просто к *паре прямых*. Это определение даётся и другими авторами только с целью «выдержать систему», а именно, до изучения фигуры, образованной *тремя* прямыми, рассмотреть фигуры, образованные сперва одной, затем *двумя* прямыми.

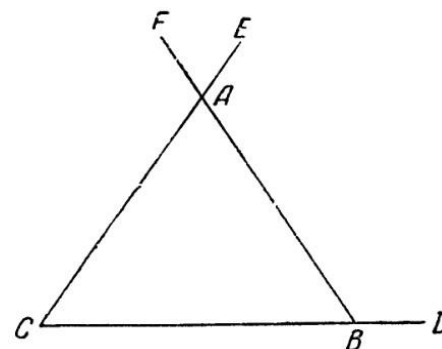
Там, где прямая определяется как линия *одного направления*, и угол определяется как различие направлений.⁶¹ Это определение впервые встречается у Арнета⁶² и Винтера⁶³ и усваивается многими учебниками.

У форонимистов угол перестаёт быть евклидовым наклонением: он даже *не мера вращения*⁶⁴ (так как мера вращения – число, а форонотмисты предпочитают оперировать образами) – это просто отклонение направления при вращении.

Угол и угловое пространство. Бертран определяет угол как неопределённую часть плоскости, ограниченную двумя прямыми, пересекающимися в одной точке.

Некоторые учебники рассматривают оба понятия – угол в евклидовском смысле (Winkel) и угол в бертрановском смысле (Winkelraum – угловое пространство)⁶⁵.

Бертран сравнивает углы и угловые пространства: они могут быть больше и меньше. Более того, он сравнивает их с параллельными полосами. Часть плоскости между параллельными потому меньше угла, что плоскость заполняется конечным числом углов, но бесконечным числом полос.



Черт. 1m.

То, что внешний угол больше внутреннего, с ним не смежного, т.е. что $\angle ABD > \angle ECB$ (черт. 1m.)⁶⁶, следует из того, что первый составлен из части EABD и угла EAF, а второй из той же части EABD и конечного треугольника ACB.⁶⁷

⁵⁸ Tannery, Quelques fragments d'Apollonius de Perge (определение Герона). Bulletin des sciences mathem., 2 série, 5, 1881.

⁵⁹ См. также Wernicke, Geometrie des Maasses, Braunschweig, 1874.

⁶⁰ D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, Leipzig, 1899–1930. Есть русский пер. под ред. П.К. Рашевского, 1948.

⁶¹ Величины отклонения: Wagner (1874), Fabiani (1871). – Изменение направления: Schlömilch, Geometrie des Maasses, 1874. Martus (1890), Milinowski (1881).

⁶² Arneth, System der Geometrie, Stuttgart, 1840.

⁶³ Winter, Die Elemente der ebenen Geometrie, Leipzig, 1840. Также August (1852), Kunze (1857), Salomon (1857), Fischer (1873), Fresenius (1853), Baltzer, Beck и др.

⁶⁴ L. Bertrand (1812), Crelle (1826), Francoeur (1841), Schlegel (1872), Spiecker, Ebene Geometrie, Baltzer, Die Elemente der Mathematik 1874. Polster (1877), Korner (1879), Heger (1882), Kommerell-Finck (1882), Noack (1890). – Simon, Die Elemente der Geometrie, Strassburg, 1890, Шохор-Троцкий (1891).

⁶⁵ Евклидово определение у Schweins (1808), Forstner (1826), van Swinden (1834), Becker (1859), Snell (1857), Brockman (1871), Kambly (1884), Fischer (1877), Hartmann, Helmes (1874).

⁶⁶ **МОИ:** В перепечатываемой нами книге имеются две серии рисунков: в собственно текстах Евклида они перенумерованы от 1 до 48, а в комментариях Мордухай-Болтовского перенумерованы от 1 до 40. В книге 1950 года обе эти серии находятся в разных местах, поэтому путаница возникнуть не может. У

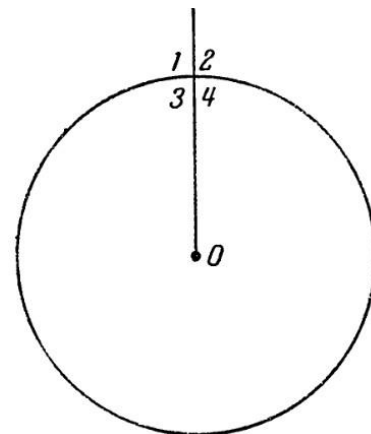
Рессель подчёркивает, что угол следует мыслить не как часть плоскости, но как часть пучка. Угол в пучке лучей аналогичен отрезку на прямой линии. Но Энриквес различает *область угла* как часть плоскости и угол как часть пучка.⁶⁸

8. Перпендикуляр. Евклид не имеет термина «смежный угол». Мы начинаем с определения смежного угла и определяем прямой угол как равный своему смежному. Рамус,⁶⁹ стараясь всегда раньше определить *род*, а затем перейти к *виду* (например, от общего понятия перпендикулярности и параллельности перейти к этим понятиям в отношении к прямой), даёт такое определение перпендикулярности: «прямые или вообще линии взаимно перпендикулярны, если одна, падая на другую, равномерно лежит между отрезками другой».

Рамус не может определить перпендикулярность с помощью смежных углов, ибо согласно его плану общие свойства линии следует излагать раньше, чем свойства углов.

Как следует понимать слово: равномерно (*aequaliter*)? Конечно, не в смысле равенства смежных углов. Оно означает: по одну сторону падающей кривой или прямой то же, что по другую (см. бертрановское определение прямой). Это безусловно верно для каждой из двух пересекающихся перпендикулярных прямых.

Но радиус круга и окружность удовлетворяют этому требованию лишь наполовину: пространства в смежных углах 1 и 3, образованных окружностью с прямой, отличаются между собой, но пространства 1 и 2, образованные прямой с окружностью, одинаковы (черт. 2m).



Черт. 2m.

По Рамусу, радиус перпендикулярен к окружности, но не наоборот.

9. Развёрнутый угол. Многие учебники вводят понятие *развёрнутого* угла, отвечающего случаю, когда одна сторона служит продолжением другой.⁷⁰ Прямой угол тогда определяется как половина развёрнутого угла. Равенство прямых углов есть тогда прямое следствие 6-й аксиомы Евклида. Вывод предложения 13 о сумме смежных углов упрощается. Но развёрнутый угол может появиться только в том случае, если угол мыслится как *поворот*; для Евклида же, у которого угол есть *наклонение*, развёрнутый угол не имеет смысла.

10. Тринадцатое определение. Является ли это определение чисто номинальным? Сводится ли оно к тому, что одно слово «оконечность» заменяется другим «граница»? Я думаю, что это не так: оно, как и определение 3 Евклида, утверждает, что то, что ограничивает что-либо, вполне его определяя, является в нём самым крайним.

Оконечность является *родом*, граница – *видом*. Лейбниц определяет границу как общий член, присущий двум, не имеющим общих частей объектам.

11. Фигура. Следует обратить внимание на то, что Евклид мыслит фигуру не как совокупность точек и прямых, как, например, понимаются в проективной геометрии треугольники. Для Евклида треугольник вовсе не является совокупностью трёх прямых, не пересекающихся в одной точке, а ограниченной этими прямыми частью плоскости. Проективный треугольник остаётся треугольником, если изъять внутри него всю или часть плоскости; евклидов же треугольник перестаёт в этом случае быть треугольником.

Очень далеко от Евклида *логистическое* определение фигуры у итальянского геометра второй половины XIX в. Пиери. Для него фигура есть *класс* точек. Две фигуры тождественны или совпадают, если они построены из одних и тех же точек.

нас же комментарии перенесены ближе к комментируемому тексту, поэтому рисунки обеих серий чередуются. Во избежание путаницы номера рисунков, относящихся к тексту Евклида, мной дополнены буквой «е», относящиеся к комментариям Мордухай-Болтовского дополнены буквой «m», а номера моих собственных рисунков буквой «i».

⁶⁷ L. Bertrand, Développement nouveau de la partie élémentaire de Géométrie, Genève, 1778. Его же, Géométrie, 1812. – Delboeuf, Prolégomènes philos. de la Géométrie 1860. Revue philosophique, т. 36–39.

⁶⁸ Подробности см. Schooten, Die Planimetrische Unterricht Leipzig, 1890.

⁶⁹ Petri Rami, Geometriae libri 27, Basileae, 1567. Scholarum mathematicarum libri unus et triginta, Basileae, 1569.

⁷⁰ См., напр., Долгушин, Систематический курс геометрии, СПб, 1912.

12. Круг и окружность. Круг для античной мысли имел важное философское значение. По Аристотелю,⁷¹ лёгкие тела прямолинейно двигаются вверх, тяжёлые вниз, к центру земли (тяжёлыми элементами являются земля и вода, лёгкими – воздух и огонь). Небесная же материя, из которой состоят планеты и звёзды, как *совершенная* должна двигаться по *совершенной* линии – окружности. Платон много говорит о круге и определяет его так же, как Евклид (диалог Парменид, «Круглое есть то, оконечности которого везде одинаково отстоят от середины»).

То, что Евклид очень много говорит о круге, объясняется не только тем, что круг проще других кривых и легче поддаётся исследованию, но и тем, что он более интересен.

Античная проблема о квадратуре круга,⁷² т.е. о разыскании квадрата, равновеликого кругу, совершенно обходится Евклидом не только как ещё не разрешённая, но и как не имеющая отношения к основной цели, которую он себе ставит.

Комментатор Прокл,⁷³ который жил в эпоху упадка античной математики, больше всего распространяется о круге; метафизические понятия в его время приобретают уже магическое значение. Он много говорит о простоте прямой и круга и старается опровергнуть мнение о большей сложности окружности в сравнении с прямой. Даже его толкование евклидовского определения прямой (прямая линия есть та, которая равна расстоянию между её концами), выражающее совсем не то, что хотел сказать сам Евклид, приводится, чтобы получить основу по существу для магических выводов.

Комментаторы, начиная с Прокла, долго останавливаются на круге. В то время как из земных тел тяжёлые падают к центру земли, лёгкие же поднимаются вверх, небесные тела уже по своей природе двигаются по совершенным линиям – окружностям. Эта мысль очень крепко засела в головах учёных и направила астрономию по неверному пути. Вместо эллиптических орбит старались заставить планеты двигаться по кругам (эпициклам), центры которых в свою очередь двигались по другим кругам (деферентам); так продолжалось вплоть до Кеплера, показавшего, что планеты движутся по эллипсам, в фокусе которых находится Солнце.

13. Слова «которая называется окружностью» и «на окружность круга» Гейберг считает позднейшей вставкой, почему они и поставлены в квадратные скобки. Правда, они имеются в большинстве дошедших до нас рукописей, но их нет у античных комментаторов, а также и в папирусе, найденном при раскопках Геркуланума и содержащем отрывок из евклидовых «Начал». По сути дела они излишни, так как греческий термин *περιφέρεια* (наше «периферия»), означающий у Евклида как всю окружность, так и её часть – дугу, в обиходном языке значит просто «обвод». Необходимость дать перевод, который читался бы как с этими словами, так и после их исключения, объясняет несколько тяжелую конструкцию фразы.

14. Центр. Слово *τό κέντρον* обозначает колющее орудие, которым в древности подгоняли животных в упряжке (старое русское слово «рожон»). В нашем случае речь идёт об остром ножке циркуля, закреплявшейся при вычерчивании круга. Этим термином пользовался ещё автор первых «Элементов» Гиппократ. Латинский термин *centrum* возникает не сразу. У Марциана Капеллы (5 в. н. э.) ещё говорится «*punctum circuli*» (точка круга) и «*media nota circuli*» (средняя метка круга).

15. Класс линий. Деление линий на *εὐθείαι* (прямые), *περιφέρειαι* (круговые) и *μικταί* (смешанные), по Проклу, следует относить к Платону и Аристотелю. Кривые линии греки делили ещё на *ἐλλοειδεῖς* (винтовые, или спиральные – вообще кривые, получаемые движением точки) и *χαμπύλαι* (изогнутые – кривые, получаемые в результате сечения кривой поверхности – например, конические сечения).

16. Род и вид фигур. Для нас параллелограмм – это *род*, прямоугольник – *вид*, другой вид – ромб. Прямоугольник – это параллелограмм с прямыми углами, квадрат – это прямоугольный ромб. По Евклиду, ромбоид (параллелограмм) считается таковым только при условии, что он не равнобедренный и не прямоугольный, т.е. не ромб и не прямоугольник. Впрочем, подведение прямоугольника под параллелограмм, а в особенности квадрата под ромб, вовсе не является совершенно бесспорным с методической точки зрения приёмом, и школьная практика

⁷¹ Aristoteles, Opera, ed. Didot (De Coelo).

⁷² Рудио, О квадратуре круга, М.–Л., 1934.

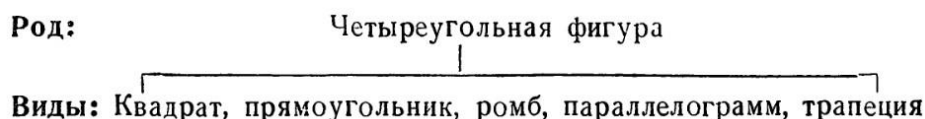
⁷³ Procli, Diadochi in primum Euclidis elementorum librum Commentarium, bearb. Friedlein, Leipzig, 1873. Старое издание Barocius'a, Padova, 1560. – О Прокле см. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, т. I, стр. 463. – Hartmann, Des Proclus Diadochus Philos. Anfangsgründe der Mathematik. Philos. Abhandlungen, herausg. Rohn und Natorp, 1 тетр. Giessen, 1909.

совершенно определённо указывает на большие затруднения при проведении другого деления, чем у Евклида.

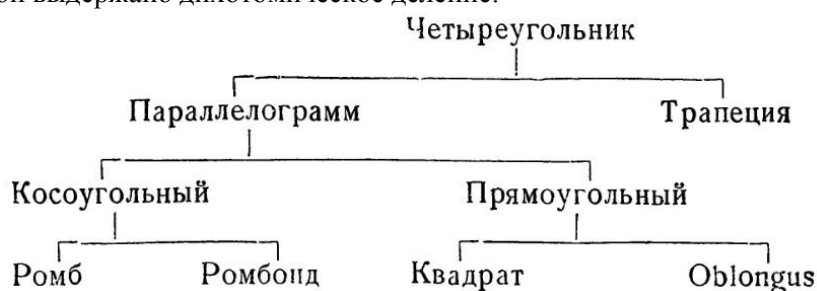
Следует отметить, что под трапецией Евклид понимает не то, что мы, а четырёхугольник, не подходящий ни под одно из четырёх вышеприведённых определений.

Но как это ни странно, Евклид в стереометрических книгах в противоречие со своими определениями говорит о прямоугольнике как о прямоугольном параллелограмме и о ромбе как о равностороннем параллелограмме.

Рамус, исправляя Евклида, заменяет евклидову схему⁷⁴:



другой, в которой выдержано дихотомическое деление:



У него ромбоид нечто отличное от параллелограмма и прямоугольника; но, как у нас, прямоугольник не противопоставляется параллелограмму, а мыслится как вид параллелограмма. Он создаёт особый термин *oblongus* (продолговатый) для прямоугольника – не квадрата, евклидовского *ἑτερόμυχες*.

17. Параллельные прямые. Недостаток евклидова определения параллельных состоит в том, что такое определение *не может быть проверено*; оно включает некоторый признак, в отсутствии которого мы можем убедиться только без конца продолжаемым процессом. Это определение совершенно не соответствует настроению античного ума, отвергавшего бесконечное. Представляется вероятным, что искать доказательство 5-го постулата древних заставляла вовсе не недостаточная очевидность этой аксиомы, а только её *неприемлемая в то время форма*.

Определению параллельных вполне соответствует и евклидов постулат параллельности. И в этом случае возможно, что прямые встретятся на таком большом от нас расстоянии, что мы не будем в состоянии это установить.

Все эти дефекты отпали бы, если бы мы определили параллельные как две равноотстоящие друг от друга прямые и, кроме того, добавили бы положение, что при этом получаемые в пересечении с третьей прямой соответственные углы равны. Такое определение параллельных предлагалось в древности Посидонием, затем горячо защищалось Рамусом⁷⁵ и Схоутоном и в последствии проводилось в некоторых учебниках.

Введение такого определения, конечно, должно быть оправдано, иными словами, должно быть доказано, что геометрическое место точек, расстояния которых до данной прямой равны, тоже будет представлять некоторую прямую. В неевклидовой геометрии такое положение, как известно, уже не будет справедливым.

Определение параллельных прямых как равноотстоящих затемняет аксиоматическую конструкцию геометрии, ибо требует введения в качестве аксиомы положения, которое не только не очевидно, но в неевклидовых геометриях и неверно. Поэтому, в то время как в других местах выявляются аксиомы более высокой степени очевидности, эту «аксиому» приходится затушёвывать и обходить молчанием. Затем, если бы мы всё-таки попытались явно формулировать эту аксиому, то при дальнейшей разработке встретились бы с рядом серьёзных затруднений. Вводя понятие о расстоянии между параллельными, мы должны были бы предположить аксиому, что прямая, перпендикулярная к одной из параллельных, будет перпендикулярна и к другой, или какую-нибудь другую, ей эквивалентную.

Таким образом, до теоремы о параллельных можно говорить лишь о расстоянии точек прямой l' до прямой l, опуская из них перпендикуляры на l.

⁷⁴ Ramus, Geometria, Basileae, 1569. – Ch. Wolff, Elementa Matheseos, 1732, т. I, § 78.

⁷⁵ См. также Lambert, Briefwechsel, т. I, стр. 23.

Но тогда параллельность будет односторонняя: если $l' \parallel l$, то остаётся открытым, будет ли $l \parallel l'$?

Несмотря на свои недостатки, евклидово определение параллельных остаётся всё-таки *лучшим*. Если определять параллельные как прямые, образующие равные углы с *определённой* трансверсалью, то приходится доказывать, что то же свойство имеет место и для других трансверселей.

До доказательства этого положения определение включает элемент произвола; остаётся невыясненным, как следует выбирать эту одну определённую трансверсаль. Правда, можно в качестве этой трансверсали брать перпендикуляр и определить параллельные как перпендикулярные к одной прямой; но в этой форме признак, выдвигаемый в определении, является наименее характерным. На неевклидовой плоскости такие прямые являются сверхпараллельными; они расходятся в обе стороны от общего перпендикуляра.

В некоторых учебниках параллельные определяются как прямые *одного направления*.⁷⁶ Конечно, существует доматематическое понятие о направлении, но оно не может быть математизировано и вложено в аппарат логической геометрии.

Такая перетасовка, т.е. возведение направления в первичное понятие, а параллелизма в производное, выходит совершенно из рамок интуитивно-логической геометрии Евклида.

§4. Постулаты⁷⁷ (18)

Допустим:

1. Что от всякой точки до всякой точки <можно> провести прямую линию.
2. И что ограниченную прямую <можно> непрерывно продолжать по прямой⁷⁸ (19).
3. И что из всякого центра и всяким раствором (20) <может быть> описан круг (21).
4. (Акс. 10.) И что все прямые углы равны между собой (22).
5. (Акс. 11.) И если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, меньшие двух прямых⁷⁹, то продолженные эти две прямые неограниченно⁸⁰ встретятся с той стороны, где углы меньшие двух прямых (23).

§5. Общие понятия (24)

(Аксиомы)

1. Равные одному и тому же равны и между собой.
2. И если к равным прибавляются равные, то и целые⁸¹ будут равны.
3. И если от равных отнимаются равные, то остатки будут равны.
- [4. И если к неравным прибавляются равные, то целые будут не равны.
5. И удвоенные одного и того же равны между собой.
6. И половины одного и того же равны между собой] (25).
7. И совмещающиеся друг с другом равны между собой (26).
8. И целое больше части (27).
- [9. И две прямые не содержат пространства (28).]

⁷⁶ Kosack (1857), Gerneth (1853), Polster (1878) – прямые равного направления. – Schlegel, Systematische Raumlehre, Leipzig, 1872 – прямые равного положения.

⁷⁷ У Евклида αἰτήματα – требования; соответственно этому Боэций говорит о «petitio» и «postulata».

⁷⁸ У Евклида ἐπ' εὐθείας – почти что в смысле наречия. Петрушевский образно переводит это одним словом «впрямь», которое в современном языке, к сожалению, получило другой смысл.

⁷⁹ Мы сказали бы «углы в сумме меньше двух прямых». Здесь и в дальнейшем мы сохраняем евклидов способ изложения.

⁸⁰ **МОИ:** «Неограниченно встретятся» – это бессмыслица. При всем моем уважении и расположении к Мордухай-Болтовскому, я вынуждена констатировать, что, видимо, здесь у него ошибка перевода. Должно быть: «...то продолженные неограниченно эти две прямые встретятся с той стороны...». Обидно, что такая ошибка имеет место именно в Пятом постулате – самом знаменитом месте всех «Начал» Евклида, месте, которое чаще всего должно цитироваться.

⁸¹ У Евклида τάβλα, что вполне точно переводится «целые», а не «суммы»; Евклид не мыслит сложения величин и получаемых после сложения сумм.

§6. Комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского

18. Постулаты. Евклид не задавался целью вывести все свои положения *силлогистически* из немногих высказанных им определений, постулатов и аксиом.⁸² Его целью было лишь *убедить читателя в определённых истинах*, и он вовсе не считал единственным способом убеждения формально логический вывод положений из признанных читателем в начале изложения истин, но считал, что убедить можно специальной операцией, вызывая в уме образ с непосредственно очевидным свойством.

Очевидность только рационалистами XVII в. вполне определённо признана за критерий истинности положений, в аристотелевской же логике она не играет этой роли.

За правильность предпосылок, с которых начинается цепь доказательств, говорит только их общепризнанность, вследствие чего аксиомы и называются *κοινὰ ἐννοιαί* (общие понятия).

Доказательства Евклида вполне отвечают схеме, выработанной софистикой.⁸³ Вначале софист приводит противника к признанию некоторых положений, отнюдь не апеллируя к очевидности, ибо противник мог бы поднять вопрос об *относительности* понятия очевидности и признать для себя не очевидным то, что для противника вполне очевидно.

Более сильным фактором является *общепризнанность* положений, приводящая к тому, что отрицающий их противник рискует попасть в смешное положение.

Этим и объясняется то, что аксиомы стягивались к самому началу сочинения, а не вводились по мере надобности при дальнейшем развитии излагаемых теорий.

Но что такое постулаты, выставленные Евклидом рядом с аксиомами?

Неправильно было бы относить к аксиомам только очевидные положения общего характера (например, касающиеся общих свойств величин, как аксиомы 1, 2 и др.), а постулаты отождествить только со специально геометрическими положениями. Действительно, хотя аксиома о параллельных фигурирует у Гейберга как постулат 5, но аксиома 7, говорящая о равенстве налагающихся фигур, носит определённо геометрический характер.

Далее, гейберговская классификация аксиом и постулатов не может всё-таки быть общепризнанной. Ведь установил же Пейрард другую классификацию, пользуясь, по-видимому, в основном теми же источниками, которые были известны и Гейбергу. По крайней мере по моему глубочайшему убеждению, аксиома о параллельных определённо была ранее аксиомой, а не постулатом, как она фигурирует в издании Гейберга.

Только отказавшись от проектирования в прошлое современных формально логических понятий, мы будем в состоянии понять, что представляли для самого Евклида постулаты.

Евклид вовсе не приписывал идеального существования геометрическим объектам, как это делал Платон. При доказательстве какой-нибудь теоремы производилось построение нужной геометрической фигуры, которая, таким образом, и вызывалась к существованию. Возможность существования прямой, круга и т.д. обуславливалась признанием возможности производящего их акта, мы сказали бы – построения.

Более того, признание возможности этого акта вынуждало к признанию некоторых истин; так, признавая согласно постулату 3 возможность описывания кругов, мы тем самым приходили к признанию необходимости пересечения кругов, проходящих через центры друг друга.

Гемин даёт объяснение, вполне согласное с предлагаемым: «постулат, – говорит он, – представляет требование найти и сделать то, что достигается просто и непосредственно, в чём ум не затрудняется ни в понимании, ни в построении».

Прокл, говоря о различии теорем и проблем и отмечая, что целью первых является *познать*, а целью вторых – *сделать*, приводит в соответствие с первыми аксиомы, а со вторыми – постулаты, определяя последние близко к Гемину.

Гоббс⁸⁴ вполне ясно выражает ту же мысль. По его мнению, то, что называется постулатом, – это основа не *доказательств*, а *построений*, не знания, а возможности существования.

⁸² **МОИ:** Иными словами, Евклид не собирался ни создавать, ни применять Аксиоматический метод. Прошу это запомнить как чрезвычайно важный момент. Евклид описывал совсем другую реальность, а отнюдь не систему аксиом и вытекающих из нее теорем. Что это была за реальность, Евклид, разумеется, не мог точно сказать ввиду уровня тогдашней науки (даже и понятия не имевшей о компьютерах и информатике), но подлинный предмет учения Евклида покажу я в своих комментариях ниже.

⁸³ О софистах см. диалог «Протагор» Платона: Гиляров, Греческие софисты, Москва, 1870. – Ягодинский, Протагор, Казань, а также любой курс истории греческой философии.

⁸⁴ Hobbes, Opera, London, 1839, De corpore. VI, § 13, стр. 22.

Правда, в XVII в. постулаты эволюционировали в аксиомы: они сделались просто *менее очевидными* аксиомами, причём и в настоящее время многие держатся этой точки зрения, совершенно неправильно толкуя Аристотеля. В учебниках XVII в. можно также встретить определение постулатов как не вполне очевидных, но не нуждающихся в подтверждении истин, основанных на *соглашении*.

У Арно⁸⁵ постулаты совершенно определённо становятся аксиомами. Изложив ряд аксиом о величинах *вообще*, он переходит к видам величин; после аксиомы о том, что прямая – кратчайшее расстояние между двумя точками, он приводит уже как аксиомы три евклидовых постулата; после них идут аксиомы о том, что прямые, имеющие общий отрезок, совпадают, что две прямые могут пересекаться лишь в одной точке, что две сближающиеся прямые, продолженные в одну сторону, пересекаются.

В учебниках XVIII в. большей частью аксиомы, следуя Евклиду, отделяются от постулатов. Аксиомы – это те предложения, истинность которых настолько очевидна, что они всякому мыслящему уму тотчас выявляются, вследствие чего никем не могут отрицаться и поэтому не нуждаются в доказательстве. В этом определении *непосредственность выявления* выставляется как признак аксиомы. Но при развитии геометрии аксиомы высокой степени очевидности выплывают только постепенно; можно даже сказать, что чем более очевидной являлась аксиома, тем позднее она включалась в систему геометрии. Кроме того, характерным свойством аксиомы считалась её *недоказуемость*. Что же касается постулатов, то они содержат то, что должно быть *сделано* или *принято* для того, чтобы какая-нибудь теорема могла быть выведена. Таким образом, в разряд постулатов попадают и не вполне очевидные положения, истинность которых только *принимается*.

В школьном Евклиде Тодгентер⁸⁶ даёт такое определение евклидовых постулатов:

«Постулаты устанавливают, что принимаемая нами операция даёт результат, например, что мы можем провести прямую между двумя точками, продолжить её, описать круг данным радиусом».

В евклидовой системе недостаёт положения взаимного первого: две прямые пересекаются только в одной точке. В геометрии Гильберта это положение доказывается, а у Евклида даже не выставляется как аксиома, а просто остаётся скрытым под порогом сознания положением, которым Евклид, сам того не замечая, пользуется.

Указанный выше сдвиг в понимании постулатов резко выявляется в «Характеристике» Лейбница. Его комментарии и дополнения к системе постулатов Евклида ясно обнаруживают сдвиг последних в сторону аксиом.

Первый постулат о возможности проведения прямой между двумя точками уже не является требованием *возможности построения*; он просто утверждает, что построенная таким образом прямая является единственным геометрическим местом уже существовавших точек, обладающих определённым свойством.

Х. Вольф уже совершенно открыто обращает первый постулат в аксиому: между двумя точками проходит только одна прямая.

То же следует сказать и о втором евклидовом постулате, утверждающем возможность продолжения прямой. По Вольфу, этот постулат тотчас же вытекает из *определения* прямой как линии, часть которой подобна целому, ибо если часть продолженная образует целое, то и целое продолжением может дать большее (т.е. новый отрезок).

Особое место среди постулатов занимают 4 и 5. Мне представляются неубедительными объяснения Цейтена правильности отнесения их к постулатам, а не к аксиомам. Ему приходится отказаться от определения постулатов как требований возможности построений, из которых, по Евклиду, вытекает существование фигур, получившихся в результате этих построений. Вместо этого он определяет постулаты как утверждения существования того, что желательно допустить без всякого доказательства и проверки. Таким образом, забыв то, что он сам раньше говорил, и не обращая внимания на форму первых трёх единственно совершенно бесспорных постулатов, Цейтен уклоняется в сторону псевдоаристотелева понимания постулатов как истин меньшей степени очевидности. Цейтен подчёркивает *экзистенциальный* характер постулатов, которые,

⁸⁵ Arnould, Nouveaux éléments de Géométrie, Paris, 1687.

⁸⁶ Todhunter, Euclid for the use of schools and colleges 1869.

таким образом, утверждают не наличие некоторых свойств у объектов, а существование самих этих объектов, причём существование это понимается уже не в евклидовом смысле^{87, 88}.

В постулате 4 Цейтен видит утверждение существования и, кроме того, единственности существующего объекта, в то время как сама форма выражения ясно говорит об общем свойстве всех прямых углов – их равенстве. В постулате 5 он усматривает утверждение о существовании пересекающихся прямых. То обстоятельство, что в постулатах 1 и 2 нет указания на единственность возможного построения, он считает их определённым дефектом. Однако дефект этот полностью пропадает, если понимать постулаты исключительно лишь в смысле утверждения возможности описываемого построения. Не говорят ли эти тщетные попытки оправдания подобного разделения постулатов и аксиом за то, что такое разделение является позднейшим ошибочным исправлением того, что находилось в тексте самого Евклида или в более ранних его копиях.

В заключение должно отметить, что постулаты ограничиваются употреблением линейки и циркуля. Линейка предполагается не градуированной, исключающей возможность числового измерения расстояний. С циркулем невозможны другие операции, кроме описания окружности из данной точки радиусом, равным данному раствору, который во время операции предполагается неизменным. При таком понимании геометрия перестаёт быть чисто логической дисциплиной: линейка и циркуль с дозволенными операциями служат для убеждения так же, как и силлогизм.

19. Предки аксиом сочетания. Лежандр доказывает, что две прямые, имеющие две общие точки, совпадают на всём своем протяжении. По Мансиону, его доказательство представляет ложный круг, так как без этого положения нельзя установить понятия смежного и прямого угла. Каталани, Руше и др. выбрасывают эту теорему из «элементов» Лежандра.⁸⁹

Из евклидовых постулатов развились позднее аксиомы сочетания Гильберта.⁹⁰

Плоскостными аксиомами сочетания являются следующие:

- I₁. Две различные точки A и B всегда определяют прямую a .
- I₂. Любые две различные точки прямой определяют эту прямую.
- I₃. На прямой всегда существуют по меньшей мере две точки.

Аксиомы, отвечающие 1 и 2 евклидовым постулатам, получаются, разбивая I₁ на две части: «точки A и B определяют отрезок AB » и « A , B определяют продолжение отрезка».

По Гильберту, существует *бесконечная прямая*, к ней и относится аксиома I₁, по Евклиду, её нет. Всякая прямая является конечной, но *она может быть продолжена*.

Постулат 1 говорит об операции, дающей объект целиком. Постулат 2 говорит о процессе, дающем потенциальную бесконечность.

20. В тексте Евклида стоит διάστημα (от корней διά-ίστημι рас-ставляю). Этот термин вполне возможно было бы перевести словом «расстояние», если бы последнее не включало в себя определённый метрический оттенок. Евклидово διάστημα есть отрезок, начинающийся в данном центре, но никоим образом не числовая мера этого отрезка, прочно связанная с нашим термином «расстояние».

Точно так же было бы ошибочным переводить его словом «радиус», поскольку, как видно из дальнейшего (предложение 2), в него вкладывается более узкий смысл.

21. Постулат 3. Этот постулат для своего правильного понимания требует нескольких разъяснений. Дозволенные у Евклида операции с циркулем несколько отличаются от современных. Постулат 3 разрешает описывать окружность из точки A радиусом, равным заданному отрезку AB , начинающемуся в точке A . Это объясняется тем, что циркуль заменил собой верёвку, с помощью которой описывается окружность радиусом, равным всей верёвке или только её части.

Перенос отрезков циркулем является операцией недозволенной, как это видно из анализа первых трёх предложений книги I «Начал».

22. Равенство прямых углов. Это положение в настоящее время во всех учебниках доказывалось.

⁸⁷ Zeuthen, Om Konstruktions Existensbevis in den Græske Mathematik, Nyt Tidsskrift for Mathematik. – Цейтен. История математики в древности и в средние века, М.–Л., 1932.

⁸⁸ Hinton, Euclide et constructions, Scientia 30, 1926.

⁸⁹ Legendre, Éléments de Géométrie. 1794. Есть русский перевод 1837.

⁹⁰ D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, Leipzig, 1899–1930. Есть русский пер. под ред. П.К. Рашевского, 1948.

Кажется, Вольф⁹¹ первый начал доказывать это положение. Следует отметить, что доказательство Лежандра зависит от аксиом непрерывности, так как он мыслит, что углы образуют систему непрерывных величин, между тем Гильберт даёт доказательство, не зависящее от аксиом непрерывности.

23. Эквиваленты аксиомы о параллельных. Ещё в античное время делались попытки доказать эту аксиому, пользуясь (большой частью *скрытыми*) более очевидными положениями — аксиомами.

Можно привести ряд положений, использованных при этих доказательствах: обычно они являются эквивалентными аксиоме Евклида, т.е. вводимое положение может быть выведено при помощи других аксиом из евклидовой, и обратно, евклидова аксиома может быть выведена при помощи других аксиом из вводимого положения.

Эти аксиомы весьма различны.

На первом месте следует поставить аксиомы, выражаемые вполне точными математическими понятиями и обладающие степенью очевидности более высокой, чем евклидова аксиома.

Такова аксиома Лоренца.⁹²

1) Всякая прямая, проходящая через точку внутри угла, пересекает по крайней мере одну его сторону.

Лежандр берёт частный случай аксиомы Евклида:

2) Наклонная и перпендикуляр при своём продолжении пересекаются.

Обычно берётся аксиома, эквивалентность которой евклидовой была отмечена ещё Проклом:

3) Через данную точку можно провести только одну прямую, параллельную данной.

Она является единственной в гильбертовой группе аксиом параллелизма. Следует отметить, что положение о возможности проведения через взятую точку прямой, параллельной данной, может быть выведено из других евклидовых аксиом, если только не прибавлять слова «одну». Больше того, можно постулировать, что из какой-нибудь точки M_0 , параллельно какой-либо прямой P_0Q_0 , можно провести только одну прямую, параллельную данной, и после этого можно доказать, что положение это будет верно для *всякой точки M и всякой прямой PQ* .

4) В качестве эквивалента евклидовой аксиомы можно взять, следуя Остроградскому⁹³ свойство транзитивности параллелизма: если l параллельна l' и l' параллельна l'' , то и l параллельна l'' .

Сюда же, пожалуй (поскольку она обладает меньшей степенью очевидности, чем вышеупомянутые), можно отнести аксиому Вольфганга Больяй⁹⁴:

5) Через всякие три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность.

Бесспорно, высокой степенью очевидности обладает аксиома Плейфэра,⁹⁵ которой пользуется Лежандр: две пересекающиеся прямые AP и AQ не могут быть отделены прямой MN , т.е. не существует прямой MN , не пересекающей ни AP , ни AQ .

На втором месте будут стоять положения, которые кажутся убедительными, если не стараться раскрывать точного смысла содержащихся в них выражений; если же истолковывать последние математически, то высказанные положения изменяют свой смысл, вследствие чего очевидность их понижается.

Такова аксиома:

6) Параллельные прямые равно отстоят друг от друга.⁹⁶

Расстояние между прямыми не есть вполне ясное понятие. Если мы хотим подойти математически точно к его определению, то должны доказать, что понятие расстояния между прямыми есть понятие взаимное, т.е. что расстояние первой прямой от второй будет то же самое, что и расстояние второй прямой от первой. Для определения расстояний *точек* первой прямой от второй мы опускаем из этих точек перпендикуляры на вторую прямую. Нам следует доказать, что результаты будут одинаковы, будем ли мы опускать перпендикуляры из точек первой прямой

⁹¹ Ch. Wolfius, Compendium elementaris Matheseos, Venetiis, 1713.

⁹² Lorenz, Grundriss der reinen und angewandten Mathematik. Helmstadt, 1791–1792, стр. 102.

⁹³ Остроградский, Руководство к геометрии для военных учебных заведений, СПб, 1855.

⁹⁴ См. Бонола, Неэвклидова геометрия, СПб, 1910.

⁹⁵ Playfair, Elements of Geometry, стр. 364.

⁹⁶ Ch. Clavii, Euclidis elementorum libri XV, Roma, 1574.

на вторую или, наоборот, из точек второй прямой на первую. В результате математической формулировки этого понятия мы должны прийти к наличию общего перпендикуляра для обеих прямых, что возможно только при справедливости евклидовой или какой-нибудь из эквивалентных ей аксиом о параллельности.

Такова же аксиома, которой скрытно пользуется Прокл:

7) Расстояние между параллельными не может быть меньше некоторого предела.

И в этом случае к понятию расстояния между параллельными можно подойти только через понятие о расстоянии их точек, которое отсчитывается по перпендикуляру к одной из прямых (чего, между прочим, у Прокла нет – понятие о расстоянии так и остаётся невыясненным до конца).

Такова же аксиома и Томаса Симпсона⁹⁷:

8) Если две точки какой-либо прямой не одинаково отстоят от другой прямой, лежащей в одной с ней плоскости, то эти две прямые при бесконечном продолжении пересекаются в той стороне, где расстояние меньше.

И, наконец, аксиома Роберта Симсона,⁹⁸ сводящаяся к описанию поведения одной прямой относительно другой:

9) Невозможно, чтобы какая-либо прямая сперва приближалась бы к другой, а затем удалялась, чтобы затем снова ближе подойти. Прямая всегда должна сохранять своё направление.

На третьем месте следует поставить аксиомы, в которых пользуются понятиями, не поддающимися полной математизации и содержащими в большей или меньшей степени интуитивные элементы. Сюда, например, относятся все аксиомы, говорящие о *направлении*.⁹⁹

10) Аксиома Валлиса¹⁰⁰ постулирует возможность построения на данной прямой треугольника, подобного данному.

Это положение получает убедительность, если только признать гомогенность пространства, иными словами, ввести общую аксиому, не поддающуюся математизированию: пространство в малом является тем же, чем и в большом.

11) Совершенно такого же рода и аксиома Ламберта о невозможности *абсолютной меры* длины.

24. Генезис евклидовых аксиом. Чрезвычайно интересным является вопрос о происхождении аксиом евклидовых Начал.

Высказываются три различных мнения:

1) Одни приписывают Евклиду все постулаты и аксиомы, кроме тех, которые Гейберг¹⁰¹ исключил в своём издании, признав их включёнными позднейшими авторами.

2) Другие оставляют за Евклидом все признаваемые Гейбергом постулаты, но исключают аксиомы. При этом они включают в число постулатов четвёртый и пятый, исключая их из числа аксиом.

3) Третьи отрицают принадлежность Евклиду двух последних постулатов и всех аксиом, т.е. оставляют только постулаты 1, 2 и 3.

Таннери¹⁰² защищает последнее мнение, приводя в пользу его ряд аргументов, причём его рассуждение наводит на ряд очень интересных мыслей, относящихся к геометрии доевклидова периода.

Он обращается к Аристотелю¹⁰³ и не находит у него, как и у других философов, термина *νοτιαι έννοιαι* (notiones communes).

Аристотелем употребляется термин «аксиома», но только не в современном смысле. Следует отметить, что к основным *недоказуемым* положениям Аристотель предъявляет требование не столько очевидности, сколько *общепризнанности*. При этом за положениями, называемыми аксиомами, по-видимому, ещё не признаётся основным признаком их *недоказуемость*, которая выставляется Паскалем и др. в качестве характерного свойства аксиом наряду с их очевидностью. Очевидность как признак истинности аксиомы вполне определённо выставля-

⁹⁷ Thomas Simpson, Elements of Geometry, т. I, стр. 14.

⁹⁸ R. Simson, Euclidis elementorum libri priores sex item undecima et duodecima, Glasgae, 1756.

⁹⁹ Thibaut, Grundriss der reinen Mathematik, Göttingen, 1827.

¹⁰⁰ Wallisii, Opera, т. II, Oxoniae. De postulato quinto.

¹⁰¹ Heiberg, Litteraturgeschichtliche Studien über Euklid.

¹⁰² Tannery, Sur l'authenticité des axiomes d'Euclide, Bulletin des sc. math, de Darboux, 1888, т. 8, стр. 152.

¹⁰³ Взгляды Аристотеля на математику: Görland, Aristoteles und Mathematik, Marburg, 1899. – Michaud, Aristoteles et les mathématiques, Archiv der Philosophie, т. 16, 1913.

ется Декартом, а за ним другими рационалистами. У Аристотеля же ἀξίωμα – положение, не нуждающееся в доказательстве и лежащее в основе доказательства. Об очевидности он не говорит (см. *Метафизика*, кн. 4, гл. 13; *Физика*, кн. 8, гл. 3).

По моему мнению, не так далеко отстоят от Аристотеля и стоики, допускающие в качестве аксиом как верные, так и неверные положения, но с признаками *общности* и *фундаментальности*, из которых выводятся следствия, быть может даже уничтожающие эти положения.

Совершенно прав Таннери, утверждая, что до Евклида не было жёсткого разграничения *определений* от *аксиом*. Так как вся наука в аристотелевском смысле сводилась к разысканию определений, то общие основные положения, т.е. аксиомы, должны были сперва явиться тоже как определения. Само слово *ἐννοια* – понятие, слово, появляющееся лишь ко времени Аристотеля, указывает на то, что смешение аксиом и определений продолжается и после Евклида. Даже у Архимеда в книге «О сфере и цилиндре» аксиомы по существу – определения, а леммы являются постулатами.

Особенно убедительное место Таннери приводит из сочинения Автолика «О движущейся сфере». Последний в качестве первого определения даёт то самое определение равномерности движения, которым мы пользуемся и в настоящее время. Но в качестве второго он даёт такое положение, которое в настоящее время уже никто не назовёт определением:

«Если точка,двигающаяся по прямой, пробегает равномерно две линии, то отношение между временами, в которые она их пробегает, таково же, как и отношение между этими двумя линиями».

Аристотель различает в геометрии следующие элементы:

1) То, что полагается как определённым образом существующее, – в геометрии, – это точки и линии.

Под этим разумеются определения, говорящие о том, как существуют определяемые вещи. Они по существу сливаются с аксиомами, никоим образом не являясь *номинальными* определениями.

2) Общепризнанные истины, с которых начинается доказательство.

3) Свойства (*τά πάθη*) – элементы, поясняемые на первом месте, смысл которых поясняется определениями. Конечно, приведённые слова Аристотеля не могут считаться вполне ясными; по-видимому, он подразумевает здесь *доказуемые* положения.

Интересно, что в этой связи Аристотель говорит, что некоторые науки обходят молчанием некоторые из этих элементов вследствие их очевидности; так, в число «общепризнанных положений» не включают того, что «вычитая из равных равные, получаем равные же», поскольку это познаётся *непосредственно*.

Я не решаюсь делать отсюда, как Таннери, вывод, что древние не имели обыкновения ставить аксиомы в *начале* изложения; я только заключаю отсюда, что они позволяли себе выставлять не все употреблявшиеся ими положения, но только те, про которые можно было сказать, что они *должны быть* признаваемыми, но могли и не признаваться при софистическом настроении того времени.

Что ряд аксиом был введён позднейшими авторами, в этом не может быть сомнения. Среди этих аксиом можно различать две категории. Одни дают более полное воспроизведение евклидова положения; в этом случае исправляющий, или, лучше сказать, пополняющий Евклида, мало думал о сущности вводимой им аксиомы. Ко второй категории относятся аксиомы, над которыми думали, но думали плохо. В качестве примера таких Таннери приводит аксиому 8 – «целое больше части», – которая, как он думает, не принадлежит Евклиду. Действительно, последний употребляет вовсе не эту аксиому, а другую, когда говорит (в предложении 6 книги I и др.): «меньшее равно большему, что нелепо». Этой аксиомы не знает Герон, но она находится у Прокла.¹⁰⁴

25. Арифметические аксиомы. Первые шесть аксиом – родоначальницы системы арифметических аксиом.

В течение времени эта группа подвергалась наибольшим изменениям; она то сокращалась, когда замечали логическую зависимость одних от других, то, наоборот, пополнялась.

Систему, которая извлекается непосредственно из первых шести евклидовых аксиом и выражается формулами

¹⁰⁴ Mansion, Sur les postulats et axiomes d'Euclide, Annales de la Soc. de Bruxelles, 14, 1889.

- 1) если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $a = b$,
- 2) $\left\{ \begin{array}{l} \text{если } a = b \\ c = d, \end{array} \right.$ то $a \pm c = b \pm d$,
- 3) $\left\{ \begin{array}{l} \text{если } a > b \\ c = d, \end{array} \right.$ то $a \pm c > b \pm d$.
- 4) $\left\{ \begin{array}{l} \text{если } a > b \\ c = d, \end{array} \right.$ то $a \pm c > b \pm d$.
- 4') $\left\{ \begin{array}{l} \text{если } a > b \\ c = d, \end{array} \right.$ то $a \pm c > b \pm d$.
- 5) если $a = b$, то $2a = 2b$,
- 6) если $a = b$, то $\frac{1}{2} a = \frac{1}{2} b$,

интересно сравнить с гильбертовой.¹⁰⁵

Аксиомы сочетания постулируются существованием определённого

- 1) c , такого, что $a + b = c$ или $c = a + b$,
- 2) решения $a + x = b$ и $y + a = b$,
- 3) нуля, такого, что $a + 0 = a$, $0 + a = a$,
- 4) c , такого, что $ab = c$ и $c = ab$,
- 5) решения $ax = b$ и $ya = b$,
- 6) единицы, такой, что $a \cdot 1 = a$ и $1 \cdot a = a$.

Правила счёта:

- 7) $a + (b + c) = (a + b) + c$,
- 8) $a + b = b + a$,
- 9) $a(bc) = (ab)c$,
- 10) $a(b + c) = ab + ac$,
- 11) $(a + b)c = ac + bc$,
- 12) $ab = ba$.

Предложения порядка:

- 13) если a, b различны, то или $a > b$ или $a < b$,
- 14) если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$,
- 15) если $a > b$, то $a + c > b + c$,
- 16) если $a > b$, $c > 0$, то $ac > bc$.

Предложение Архимеда:

Если $a > 0$, $b > 0$, то существует целое число n , такое, что $na > b$.

В системе Гильберта первая евклидова аксиома исчезла как арифметическая, но остаётся как геометрическая аксиома группы конгруэнтности; если

$$\begin{aligned} AB &\equiv A'B', \\ AB &\equiv A''B'', \end{aligned}$$

то

$$A'B' \equiv A''B''.$$

Равенство чисел есть тождество чисел, и поэтому аксиома 1 в числах ничего не выражает.

То же следует сказать и о 2-й евклидовой аксиоме: она не выражает больше, чем аксиома 1 сочетания.

5-я отпала как следствие 2-й, а 6-я заменилась более общей, которая в системе Гильберта сводится к 5-й.

Таким образом, только 4-я осталась в современной системе.

Законов счёта Евклид не рассматривал.

В середине XVIII в.¹⁰⁶ существовала довольно стройная система основ арифметики или, лучше сказать, алгебры, так как она относилась не к числам (иррациональных чисел тогда ещё не было), а к величинам вообще, над которыми оперирует Алгебра.

¹⁰⁵ D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, Leipzig, 1899–1930 (гл. III).

¹⁰⁶ См. Ch. Wolfius, Compendium elementaris Matheseos, Venetiis, 1713, а также Karsten, Mathesis theoretica, Rostock, 1761, стр. 701.

Законы арифметики тогда представлялись очевидными положениями (и в этом смысле аксиомами), но тем не менее *доказуемыми*, причём среди них были далеко не все, которые в настоящее время являются таковыми. Эти доказательства все основывались на лейбнианском определении равенства.

Тождество не определялось, а равенство определялось с помощью тождества.

Два количества a и b признавались Лейбницем и др. равными, если всякое выражение $\Phi(a)$ оставалось *таким же* и по подстановке b вместо a .

Сложение мыслилось как одновременная, совершенно одинаковая в отношении обоих членов операция над этими членами; поэтому закон *коммутативный* являлся лишним. Очевидно, то же следует сказать и о законе *ассоциативном*.

Но закон *транзитивный*:

$$\text{если } a = c, b = c, \text{ то } a = b,$$

выражаемый первой евклидовой аксиомой, доказывался и Лейбницем и Вольфом.

Вследствие равенства b и c по самому определению везде величиной b можно заменить величину c , в частности и в равенстве $a = c$, вследствие чего $a = b$.

Таким же образом доказывалась и вторая евклидова аксиома.

В истории этой группы евклидовых аксиом интересно сравнить два момента, отделённых между собой столетием – аксиоматику в *Cursus Mathematicus* Херигона¹⁰⁷ и такую же аксиоматику в учебнике Хр. Вольфа.

У первого мы имеем чрезмерное раздутие всей аксиоматической системы. Это какое-то *коллекционирование очевидных истин* без всякого анализа их взаимной логической зависимости. У второго, как мы только что отметили, имеем явное намерение строить геометрию *без аксиом* в том смысле, что всё выводится из определений и логической аксиомы противоречия.

Если Вольф их перечисляет, то не потому, что они очевидны, и не потому, что они недоказуемы, но потому, что это *основные простейшие* положения, на которые чаще всего приходится ссылаться.

Херигон за первой евклидовой аксиомой ставит другую, ей аналогичную, и из неё выводит (знак $\rightarrow$ обозначает: «следует, получается»)

$$1a \cdot b \quad c = d \quad a = c \quad b = d \rightarrow a = b,$$

которую он пишет в своём идеографическом обозначении:

$$\begin{aligned} \text{hyp. } c2 \mid 2d, \\ \text{hyp. } a2 \mid 2c, \\ \text{hyp. } b2 \mid 2d, \\ 1a \cdot b \quad a2 \mid 2b \end{aligned}$$

обозначая через $2|2$ равенство, через *hyp.* – гипотезу: «если», $1a \cdot b$ – нумерация аксиом у Херигона.

(Следует обратить внимание, что эта аксиома выводит 1-ю евклидову с присоединением к ней рефлексивного свойства равенства $a = b \rightarrow b = a$.)

Другие херигоновы аксиомы:

$$\begin{aligned} 1a \cdot d \quad a = b, \quad a > c &\rightarrow b > c, \\ 1a \cdot e \quad b > c, \quad a > b &\rightarrow a > c, \\ 1a \cdot f \quad a + b = c + d, \quad b = d &\rightarrow a + d = c + b, \\ 2a \cdot 1 \quad a = b, \quad c = d &\rightarrow a + c = b + d, \\ 3a \cdot 1 \quad a = b, \quad c = d &\rightarrow a - b = c - d, \\ 3a \cdot b \quad c > \frac{1}{2} a \rightarrow a - c < \frac{1}{2} a, \quad c < \frac{1}{2} a &\rightarrow a - c > \frac{1}{2} a, \\ 4a \cdot 1 \quad a > b, \quad c = d &\rightarrow a + c > b + d, \\ 4a \cdot b \quad a = b, \quad c > d &\rightarrow a + c > b + d, \\ 4a \cdot c \quad a > b, \quad c > d &\rightarrow a + c > b + d, \\ 5a \cdot 1 \quad a > b, \quad c = d &\rightarrow a - c > b - d, \\ 5a \cdot b \quad a = b, \quad c > d &\rightarrow a - c < b - d, \\ 5a \cdot c \quad a > b, \quad c > d &\rightarrow a - d > b - c, \\ 6a \cdot 1 \quad a = 2c, \quad b = 2c &\rightarrow a = b, \end{aligned}$$

¹⁰⁷ Herigonius, *Cursus mathematicus*, Parisiis, 1632.

$$\begin{aligned}
6a \cdot b \quad a > b &\rightarrow 2a > 2b, \\
6a \cdot c \quad a = 2b, \quad b = c &\rightarrow a = 2c, \\
6a \cdot d \quad a = b, \quad a = 2c &\rightarrow b = 2c, \\
7a \cdot 1 \quad a = \frac{1}{2}c, \quad b = \frac{1}{2}c &\rightarrow a = b, \\
7a \cdot b \quad \frac{1}{2}a > \frac{1}{2}b &\rightarrow a > b, \\
7a \cdot c \quad b = c, \quad a = \frac{1}{2}b &\rightarrow a = \frac{1}{2}c, \\
7a \cdot d \quad a = b, \quad b = \frac{1}{2}c &\rightarrow b = \frac{1}{2}c.
\end{aligned}$$

Чтобы понять наличие такого большого числа аксиом у Херигона, следует обратить внимание на то, что все эти аксиомы понимались не в *числовом смысле*. Удвоение и деление понимали так же, как у Евклида понималось в геометрическом смысле умножение или деление пополам площади и отрезка, производимое рядом операций.

Следует отметить, что умножение отрезков здесь уже не понимается в чисто геометрическом евклидовом смысле построения a , b прямоугольника.

Вольфианские аксиомы следующие:

$$\begin{aligned}
1) \quad a = a, \quad 2) \quad a = c, \quad b = c &\rightarrow a = b, \quad 3, 4) \quad a = b, \quad c = d \rightarrow a \pm c = b \pm d, \\
5) \quad a = b, \quad c = d &\rightarrow ac = bd, \quad 6) \quad a = b, \quad c = d \rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}, \quad 7) \quad a = b, \\
a > c &\rightarrow b > c.
\end{aligned}$$

26. Аксиомы конгруэнтности.¹⁰⁸ Первые семь евклидовых аксиом являются также родоначальницами группы аксиом конгруэнтности.

Прежде всего следует отметить правильное понимание аксиомы 7. *Равенство* Евклид всегда понимает в смысле *равновеликости*. Ныне же мы обычно понимаем равенство в том смысле, как это понимали в XVII в., в смысле одинаковости формы и размеров, т.е. равные фигуры отличаются только положением. При такой точке зрения смысл аксиомы 7 тот, что если фигуры при наложении совпадают, то они отличаются *только положением*.

Евклид хотел сказать совершенно другое: то, что площади двух совпадающих при наложении фигур равны.

Некоторые математики вводили предложение, обратное евклидову, хотя в его постановке оно, вообще говоря, не обратимо: равновеликие фигуры могут и не совпадать друг с другом при наложении. Однако Евклид в своих доказательствах пользуется частными видами такой обращенной аксиомы 7, т.е. признаёт наложимость равных отрезков и углов.

Это было отмечено всеми комментаторами Евклида, которые дополнили его систему аксиом группой аксиом конгруэнтности.

Некоторые авторы обращали аксиому в определение, определяя равенство наложимостью.

В формально логической системе Гильберта нет *определения равенства*. Конгруэнтность берётся как символ $\equiv$ и устанавливается группа знаков операций с этими символами так, чтобы по замене этих форм конкретным содержанием получились конкретные теоремы геометрии.

Аксиомы Π_2 , Π_3 Гильберта тогда превращаются в аксиомы 1 и 2 Евклида.

Основная часть аксиомы Π_1 превращается в постулат 1 о переносе отрезка. (Другие её элементы $AB \equiv AB$, $AB \equiv BA$ теряют смысл с евклидовой точки зрения.)

В системе Веронезе выдвигаются другие аксиомы:

$$\begin{aligned}
1) \quad AB = AB, \quad 2) \quad AB = A'B' &\rightarrow A'B' = AB, \\
3) \quad AB = A''B'', \quad A'B' = A''B'' &\rightarrow AB = A'B', \quad 5) \quad AB = BA.
\end{aligned}$$

К этому прибавляется частная форма евклидовой аксиомы 8, что 4) отрезок не конгруэнтен ни с одной из своих частей, и 6) устанавливается возможность откладывания от A равных отрезков в различные стороны, возможность переноса отрезка на любую прямую в любую точку.

Понятие *конгруэнтности*, в которое обращается неопределяемое Евклидом равенство, понимаемое самим Евклидом как равновеликость, а иногда как тождество формы и размеров при различии положения, Гильбертом берётся как *форма*, заполняемая содержанием только после

¹⁰⁸ D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, Leipzig, 1899–1930 (гл. I, § 5).

развёртывания всей формально-гипотетической геометрии как системы связей между этими формами.

У Веронезе¹⁰⁹ понятие о конгруэнтности отрезков – простое понятие, которое если не вполне логизировано, то больше всего может на это рассчитывать. Что касается конгруэнтности фигур, то это сложное понятие сводится к простому, а именно, к конгруэнтности отрезков, причём это сведение производится логистически, выражая связь в чисто логических понятиях. «Две фигуры называются конгруэнтными, если каждой точке одной фигуры соответствует одна и только одна точка второй фигуры так что отрезки, соединяющие пары соответственных точек в обеих фигурах, конгруэнтны».

Конечно, равенство (конгруэнтность) треугольников понимается совершенно различно Евклидом, Лейбницем, форономическим учебником Веронезе, резко подчёркивающим наложимость как определение равенства (в его логическом определении), и Гильбертом, который, исключая внутреннее содержание, остаётся только при одном символе $\equiv$.

Понятие о равенстве в нашем смысле этого слова создаётся только в XVI и XVII вв., для него Лейбниц употребляет термин «конгруэнция». Лейбниц говорит, что две величины конгруэнтны, если они различаются только положением, т.е. в чисто внешнем отношении. Он прибавляет, что при наложении они должны совпасть, так что аксиома 7 Евклида выставляется Лейбницем как непосредственное следствие его определения конгруэнтности. Далее Лейбниц подчёркивает, что конгруэнтность есть подобие плюс равенство в евклидовом смысле слова. Таким образом, подобие является более широким понятием, чем конгруэнтность, и некоторые методисты (например, Дистерверг) раньше выставляют подобие фигур, а затем путём ограничения приходят к равенству в нашем смысле этого слова.

27. Целое и части. Аксиома 8 бесспорно имеет позднейшее происхождение.

Интересно отметить, что современные математики, оперируя с *актуальной бесконечностью*, ставят характерным свойством для бесконечного множества именно *равенство целого части*, что для конечного не имеет места.

Собственно говоря, около этой евклидовой аксиомы и сосредоточивались споры инфинитистов с финитистами.

Достаточно вспомнить парадокс Галилея¹¹⁰: число членов ряда

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

с одной стороны, не равно числу членов ряда $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \dots$, так как *целое не может равняться своей части*, с другой стороны, равно, так как между членами этих рядов существует *взаимно однозначное соответствие*: каждому члену первого ряда отвечает только один член второго и обратно.

К аксиоме 8 комментаторы прибавляют другую «целое равно всем своим частям вместе взятым».

Обе указанные аксиомы объемлются следующей:

Из неполной совокупности частей нельзя составить целого.

В современной теории эта аксиома, понимаемая соответствующим образом, играет важную роль. Это известная аксиома Цольта,¹¹¹ которую он формулирует так:

Если разложить многоугольник прямыми линиями на несколько частей и устранить одну часть, то с помощью остающихся, как бы мы их ни располагали, нельзя покрыть многоугольник.

У Паолиса¹¹² стоит аксиома в формулировке, совершенно аналогичной формулировке Евклида: часть многоугольника не может равняться целому, а Ризенбергер, наоборот, даёт в форме, ещё более отклоняющейся от евклидовой, чем формулировка Цольта:

Если доказана с помощью какого-либо разложения равновеликость двух фигур, то нельзя произвести другого разложения их так, чтобы одна фигура содержала все части данной и ещё другие части.

К цольтовой аксиоме относится ряд работ Штольца,¹¹³ Шура, Киллинга,¹¹⁴ доказывающих, что аксиома Цольта является следствием архимедовой (Евдокса).

¹⁰⁹ Veronese, Elementi di Geometria, Padova, 1904.

¹¹⁰ Галилео Галилей, Беседы и математические доказательства, Москва, 1937. День первый, стр. 95. См. также Couturat, L'infini Mathématique, Paris, 1905.

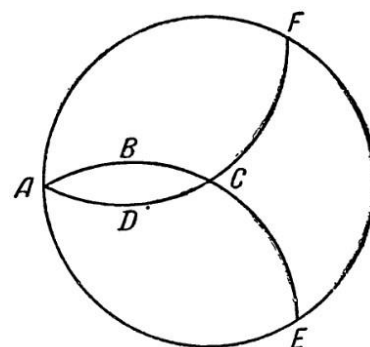
¹¹¹ A. de Zolt, Principii della equalita del poligoni, Milano, 1883.

¹¹² R. de Paolis, Elementi di Geometria, Torino, 1883.

¹¹³ O. Stolz, Vorlesungen über allgemeine Arithmetick, Leipzig, 1885, стр. 75. – Monatshefte der Mathem. und Physik, т. 5 (1894), стр. 234.

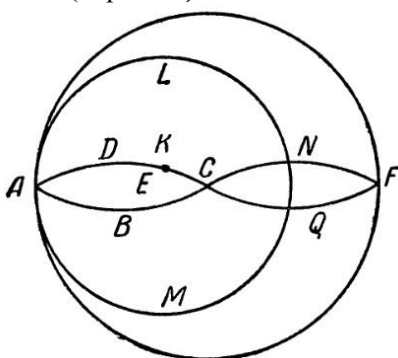
28. Девятая аксиома. Эту аксиому, которую Гейберг не считает принадлежащей Евклиду, Прокл пытается доказать в своих комментариях к книге I «Начал».

Если предположить, что две прямые ABC и ADC (черт. 3m) заключают пространство, сходясь в точке C, то, описывая окружность из C радиусом CA, получим две точки E и F пересечения наших прямых ABCE и ADCF с этой окружностью. Дуги AE и AF, как отсечённые диаметрами ACE и ACF, будут полуокружностями и как таковые должны быть равны в сумме всей окружности, в то время как они составляют лишь её часть EAF.



Черт. 3m.

Клавий¹¹⁵ правильно замечает, что возможен ещё случай, когда прямые сходятся второй раз на окружности, и пополняет доказательство Прокла, описывая из точки K радиусом KA, меньшим чем AC, окружность ALM, пересекающую прямые ABC и ADC уже в двух не совпадающих точках N, Q, и повторяя те же рассуждения для окружности ALM (черт. 4m).



Черт. 4m.

Здесь аксиома, на которой основывается доказательство, зарыта довольно глубоко. Мы имеем пересечение с окружностью в двух точках прямой, проходящей через центр, и утверждение необходимости существования не совпадающих точек пересечения N и Q на двух одинаковых расстояниях.

Отметим, что в XVII в. эта аксиома пополняется другими. По Схоутену, мало сказать, что две прямые не заключают пространства, необходимо ещё указать, что они не имеют общего отрезка; в самом деле, линии, заключающие и не заключающие пространства, можно мыслить и с общим отрезком и без него. Далее, вместо общего отрезка можно

взять и общую точку. Поскольку из аксиомы 9 ещё не следует, заключают ли эти прямые пространство, или нет, то Схоутен выдвигает ещё одну аксиому: две прямые, сходящиеся в одной точке, необходимо должны в этой точке пересекаться.

§7. Комментарии Марины Ипатьевой

§7.1. Введение

Эти комментарии адресованы в первую очередь всему набору профессоров (и преподавателей прочих званий, для простоты мной тоже причисляемых к профессорам) с Кафедры высшей геометрии и топологии Механико-математического факультета Московского государственного университета, а среди них в первую голову профессору Евгению Вадимовичу Троицкому, которого, ввиду того, что мы с ним одноклассники и по переписке почти уже друзья, я именую просто «Женя».

Итак, Женя и остальные профессора МГУ! Я была 19-летней студенткой, когда в начале 1981 года впервые ознакомилась с Веданской теорией, разработанной в 1978 Валдисом Эгле, для меня просто дядей Валдисом, мужем сестры моей матери; как раз в феврале 1981 года он стал свою теорию преподносить вашему брату – университетским профессорам.

С тех пор много воды утекло, 33 года прошло, я перевидала много профессоров – сначала просто наблюдая за действиями дяди Валдиса, а потом и самостоятельно. И то, что я перевидала, не дает мне оснований уважать вашего брата – университетских профессоров математики. Все, с кем я имела дело на этом поприще, были глупы. И главное – их апломб и высокомерие были всегда обратно пропорциональны их уму.

Скорее всего, Женя, ты тоже глуп и высокомерен, как и твои товарищи по Кафедре. Однако пока что я этого не утверждаю, и даю тебе и твоим товарищам возможность проявить свой ум. Я

¹¹⁴ Killing, Einführung in die Grundlagen der Geometrie, Paderborn, 1898, стр. 23.

¹¹⁵ Ch. Clavii, Euclidis elementorum libri XV, Roma, 1574.

говорю тебе те же слова, которые двадцать с половиной столетий назад говорил некоему Меммию римский поэт, так почитаемый моим покойным дядей:

Ты же теперь напряги свой слух и свой ум прозорливый
Освободи от забот, достоверному внемля ученью,
Чтобы дары, приносимые мной с беспристрастным усердьем,
Прежде чем их оценить, с презрением прочь не отринул.
Ибо о сущности высшей небес и богов собираюсь
Я рассуждать для тебя и вещей объясняю начала...¹¹⁶

Да, Женя, «напряги свой слух и свой ум освободи от забот», иначе не поймешь «дары, приносимые мной с беспристрастным усердьем». Глупость твоих предшественников – всей той оравы профессоров математики, которую я перевидала, – их глупость заключается в первую очередь в том, что они даже и не пытались понять то, что им говорили, а сразу «с презрением прочь отринали».

Итак, мой Женя-Меммий, я начинаю «рассуждать для тебя и вещей объясняю начала».

§7.2. Основания математики

Математика в ее современном виде зародилась в Древней Греции (вот, лежащие сейчас перед нами «Начала» Евклида – пожалуй, самый мощный краеугольный камень в фундаменте ее здания). Профессор Дмитрий Мордухай-Болтовской в своих замечательных комментариях очень ярко обрисовал различные перипетии на пути развития ее идей от Евклида до Гильберта.

Самым важным для нас сейчас моментом при обозрении этого пути – это вопрос: Как люди представляли себе умственную деятельность человека? Ведь несомненно математика в целом и геометрия в частности – это было проявлениями умственной деятельности человека.

А представляли они ее практически одинаково от древних Афин через Средневековье и до вашей Кафедры в МГУ. Что древнегреческий софист, что средневековый схоласт, что профессор с Мехмата – вы все почти тождественно представляете себе суть человеческого мышления, т.е. – на самом деле никак ее не представляете.

В ваших представлениях, вот, есть «ум», он там (как-то, неизвестно как) производит мыслительные операции, вы пытаетесь уловить какие-то принципы этих операций, в результате чего у вас появляются аксиомы, вы стараетесь отследить взаимную зависимость этих принципов-аксиом и думаете, что уже постигли глубины сущности математики и математического мышления. (И даже более того, в своей тотальной ограниченности при непомерном апломбе и характерном чванстве вы ни о чем другом, кроме аксиом, и слышать не желаете, фыркая, что это, мол, не математика).

У вас даже и речи не может быть о том, чтобы взять и встроить математическое мышление в искусственный субъект типа робота или куклы Доллии.¹¹⁷ Перед такой задачей вы стоите как неандерталец, вылезший из пещеры с каменным топором в руке, стоял бы перед телевизором. У вас с вашим неандертальским мышлением даже мысль не появляется, что такую задачу можно ставить – и, более того, можно ее и решить – хотя бы в принципе.

Вот, такую задачу поставил перед собой в конце 1960-х и решил в 1978 году Валдис Эгле – что и означало появление теории, позже названной Веданской. Как должен быть устроен и как должен работать мозг искусственного субъекта (а равно, значит, и субъекта естественного), чтобы в нем появились понятия о числах, точках, прямых и т.д., чтобы он начал о них рассуждать, узнал какие-то истины о них, начал строить – и в конце концов построил – всё здание математики.

Женя! Общеизвестно, что для того, чтобы защитить докторскую диссертацию, ума не надо. Но ведь мы с тобой окончили еще советскую школу, и это была школа не такая, как теперь, где только торгуют наркотиками и прыгают по дискотекам. Нам, чтобы окончить школу, ум требовался. Так вот, я обращаюсь к тем остаткам разума советского школьника, которые, возможно, еще сохранились в твоей голове: ты соображаешь вообще, КАКАЯ дистанция лежит между тем пониманием сущности и оснований математики, какое имеется у вас, профессоров МГУ, и тем пониманием, которое дает Веданская теория?

¹¹⁶ Тит Лукреций Кар. Поэма «О природе вещей». Книга I, стихи 50–55. Поэма посвящена Гаю Меммию, современнику поэта. Русский перевод Ф. Петровского.

¹¹⁷ См. <http://ve-poti.narod.ru/A015.PDF>.

Вы не способны ничего построить, ничего сконструировать, вы способны только разглагольствовать. Веданская теория же указывает ПРИНЦИПЫ, по которым можно создать мыслящее существо, в том числе – мыслящее о математике и мыслящее математически. Глубина понимания у вас и у Веданской теории просто несравнимы. Вы перед ней – сущие папуасы или питекантропы. У вас понятия об умственной деятельности такие же, как в Средние века – и более того – как в Древнем Вавилоне.

Я в этой вставке и в дальнейших хочу осветить с точки зрения Веданской теории те вещи, о которых говорят Евклид и Мордухай-Болтовской. Это задача довольно трудная, но трудная не потому, что я не знаю, как всё это выглядит в Веданской теории, а трудная потому, что ВЫ лишь в очень слабой степени можете представить себе всю ту кухню мозговых программ, какая требуется для сотворения математического мышления у искусственного субъекта (и у естественного тоже). Могу поспорить, что у вас весьма небольшой опыт компьютерного программирования, что вы никогда не создавали операционных систем реального времени, тем более – самопрограммирующихся.

Вот, в этом-то и состоит главная проблема – в вашей некомпетентности. К сожалению, вы не профессионалы, а дилетанты.

Тем не менее, я попытаюсь. Если даже и вы, профессора, окажетесь неспособными понять, то, может быть, хотя бы ваши студенты поймут как более образованные в информатике.

§7.3. Предмет геометрии

После общих вводных слов, сказанных в предыдущих двух подпараграфах, перейдем теперь ближе к нашему предмету – к геометрии.

Что вообще является предметом этой науки под названием «геометрия» (пока берем ее только в том размере, в каком она сейчас лежит перед нами – в «Началах» Евклида). Что эта наука изучает?

Я не буду перечислять все те определения геометрии, какие можно было услышать в разное время. (Что их перечислять, если их авторы всё равно не были способны создать искусственного геометра и поэтому по уровню компетентности и близко не могут к нам стоять?) Перейду сразу к изложению вопроса так, как его понимает Веданская теория (ВТ).

Вот, возьмем и рассмотрим, скажем, окружность. Замкнутая линия, всем хорошо известная. Но что она такое? ВТ выделяет за этим (в общем-то довольно смутным) термином «окружность» три различных объекта:

1) Круглая траектория какого-нибудь физического объекта или круглая линия его формы, словом, окружность, которая существует во внешнем мире и возникла естественным путем, без участия человека.

2) Окружность, которую взял и нарисовал или другим каким-нибудь образом создал человек.

Третий объект пока оставим на потом, а приглядимся попристальней ко второму. Чтобы искусственный субъект (кукла Доллия или робот) могли нарисовать окружность (или иным путем ее создать), им нужна программа, которая и осуществит эту операцию. ВТ постулирует, что такая программа нужна и естественным субъектам (людям), вводит понятие «мозговой программы» и в дальнейшем оперирует этим понятием по всем правилам информатики. Программу, создающую окружности группы (2) обозначим через *C*. Тогда всякая данная окружность группы (2) является конкретным продуктом программы *C*.

Но помимо конкретных продуктов различных программ, реально созданных ими, ВТ рассматривает и потенциальные продукты программ. Потенциальный продукт программы – это то, что она МОГЛА БЫ создать. То есть, ситуация тогда такая: в наличие имеется программа (например, *C*), но она не работает (пока не работает или вообще не работает – не важно), а рассуждение идет о ее потенциальном продукте. И это очень важный момент, потому что именно этим путем на арену выходят абстрактные вещи – нигде реально не существующие, но, тем не менее, обсуждаемые и изучаемые.

3) Окружность как потенциальный продукт программы *C*. Это окружность нигде не существующая, «абстрактная», а на самом деле определенная наличием программы *C* в мозге субъекта.

Вот те три типа окружностей, о каких мы можем думать. Теперь зададим себе вопрос: КОТОРЫЕ из этих трех типов окружностей изучает геометрия Евклида? Конечно, в каком-то первом порыве мы можем ответить, что все три. Но тогда мы можем уточнить вопрос

следующим образом. Если мы отбросим типы (2) и (3) и оставим только тип (1), останется ли геометрия Евклида прежней? Можно ответить однозначно: НЕТ! У нас нет даже уверенности, существуют ли вообще в реальном мире окружности, не созданные человеком. Даже если бы Луна двигалась бы вокруг Земли не по эллипсу, а по кругу, то и тогда траектория ее фактического движения была бы какой-то замысловатой спиралью, учитывая движение Земли вокруг Солнца и Солнца среди галактик. Кроме того, по современным представлениям Вселенная ограничена, значит, окружностей произвольного радиуса в ней быть не может – а Третий постулат Евклида не имел бы смысла, потому что мы вообще никаких кругов ни с каким раствором не описываем.

Итак, ясно, что окружности типа (1) ни в коем случае не являются предметом для геометрии Евклида. Теперь отбросим окружности типа (1) и типа (3) и оставим только тип (2) – только реально нарисованные человеком круги. Останется ли геометрия Евклида прежней? Опять же мы можем ответить однозначно: НЕТ! Всякий реально нарисованный (или другим путем созданный) круг имеет дефекты; при ближайшем рассмотрении (например, под микроскопом) окажется, что он вовсе не круг, что его границы расплывчаты, что он теряет линию между атомами; отношение его окружности к диаметру будет вовсе не бесконечное иррациональное число π , и само π потеряет смысл уже после нескольких цифр за десятичной запятой.

Итак, предметом геометрии могут быть ТОЛЬКО окружности типа (3) – потенциальные продукты программы С, нигде реально не существующие, «абстрактные», «идеальные» и т.д.

Вы скажете, что вы давно знали, что предметом геометрии являются абстрактные, идеальные линии и фигуры, а не те, которые существуют в реальном мире, всё равно, созданные естественным образом или человеком. Верно, вы так говорили. Но вы только именно ГОВОРИЛИ, и не более того. Вы никогда не были в состоянии объяснить природу «абстрактного» и «идеального». Вы никогда не были в состоянии даже подумать о том, КАК это «абстрактное» и «идеальное» встроить в робота. И именно поэтому жалки, отвратительны и презренны тот апломб и та спесь, которые ваша братия профессоров при ее тотальном невежестве проявляла в течение 33 лет к тем, кто это объяснить мог тогда и может сейчас.

То рассуждение, которое мы провели в отношении окружности, можно повторить в отношении любой другой геометрической линии и фигуры как на плоскости, так и в пространстве. И после этого подытожить результат в следующей форме:

Факт 1. Предметом геометрии являются потенциальные продукты мозговых программ определенной группы, а именно: программ конструирования линий, фигур и тел.

Вот это, Женя, заруби себе на носу как самую основную и самую фундаментальную истину по геометрии, и остальные профессора тоже зарубите! Если вы это не поняли и не усвоили, то никакие вы не геометры в XXI веке, а схоласты, вылезшие из Средневековья.

Напомню, что речь пока что у нас идет о геометрии в том объеме, в каком она дана Евклидом. О неевклидовых геометриях речь должна пойти отдельно.

§7.4. Некоторые объяснения

Обсудим теперь Факт 1 несколько подробнее. Отметим следующие моменты:

1. «Предметом геометрии являются потенциальные продукты мозговых программ» (объекты группы 3), но конечно, «каким-то боком» геометрия затрагивает и объекты групп (1) и (2) – т.е. естественные фигуры и фигуры, не потенциальные, а конкретно созданные мозговыми программами. Факт 1 нужно понимать не так, что геометрия вообще не касается объектов групп (1) и (2), а так, что только в группе (3) сохраняются ВСЕ свойства евклидовой геометрии; только в группе (3) диаметр и длину окружности можно сравнивать с бесконечной точностью, и только там число π и вправду иррационально и имеет бесконечное цифровое разложение.

2. Мозговых программ очень много, и они очень разные. Для любого действия требуется своя программа. (И они создаются на ходу, но в этот вопрос мы не можем здесь углубляться; если вы не понимаете, откуда эти программы берутся, то и не надо пока понимать: удовлетворитесь временно тем, что есть аппарат, который их создает). Так вот, мозговых программ очень много, но геометрия изучает потенциальные продукты не всякой мозговой программы, а только программ определенной группы (которую можно назвать «программами пространственного конструирования»).

3. Так как предметом геометрии являются потенциальные продукты мозговых программ, то обсуждение любой геометрической истины или проблемы, чтобы оно было проведено с надлежащей глубиной, требует привлечения аппарата мозговых программ – т.е. должно быть

указано, какие именно программы здесь задействованы, что каждая из них делает, и т.д. Мои комментарии к конкретным местам Евклида и Мордухай-Болтовского в основном к этому и будут сводиться – к обсуждению тех мозговых программ, которые в данном деле задействованы.

4. Разумеется, ни Евклид, ни более поздние геометры вплоть до наших дней не могли рассуждать о геометрических вещах, привлекая к этому делу понятие мозговой программы. Это было принципиально невозможно вплоть до второй половины XX века, когда появилась информатика и компьютерные науки. Поэтому они рассуждали в таких категориях, какие были доступны в их время.

5. Однако рассуждения Евклида есть рассуждения именно о мозговых программах – НЕ об аксиомах, НЕ о их следствиях, – а именно и только о мозговых программах и о их продуктах (вообще о потенциальных, а о реальных или конкретных лишь постольку, поскольку эти программы иногда на самом деле выполнялись и сотворяли рисунки-чертежи).

6. Постулаты и аксиомы («общие понятия») Евклид присоединил к своему сочинению не как основу изложения, а для борьбы с софистами. В своем тексте Евклид никогда не ссылается на постулаты и аксиомы. Все такие ссылки у Мордухай-Болтовского стоят в скобках и, как он сам поясняет в Предисловии, присоединены публикатором греческого текста Гейбергом. Собственно изложение Евклида было сделано БЕЗ привлечения постулатов и аксиом. Лишь потом уже к готовому тексту был приставлен список постулатов и аксиом.

7. Софисты – это были люди, которые в греческих городах за деньги брались доказать или опровергнуть любой тезис. Каждый богач мог заплатить софисту, чтобы тот (потехи ради) опроверг рассуждения геометра. Поэтому геометры были вынуждены разработать средства борьбы с софистами. Разработка эта пошла в двух направлениях. Во-первых, были выделены αἰτήματα – «требования» (ныне называемые латинским словом «постулаты»). Перед рассуждением геометр со слушателями заключали соглашение считать эти положения истинными, и поэтому софист уже не мог их оспаривать. Например, на самом деле НЕвозможно вокруг любого центра описать круг с любым раствором, и софист мог эту невозможность использовать в своих нападках. Но если предварительно принято соглашение Третьего постулата, то у софиста это оружие уже отнято. Второе направление борьбы с софистами было выделение таких «общепринятых истин», оспаривание которых софистом привело бы к тому, что слушатели его просто высмеяли бы (например, если у него получалось бы, что равные одному и тому же между собой не равны (первая аксиома)).

8. Изложение Евклида дедуктивно – каждая следующая истина вытекает из предыдущих, ранее доказанных истин. Однако в начале этой дедуктивной цепочки у Евклида стоят НЕ постулаты и аксиомы, а знания об элементарных свойствах мозговых программ – подлинного предмета изучения.

9. Сам Евклид и не пытался выдавать постулаты и аксиомы за начало дедуктивной цепочки; такая мысль ему показалась бы просто дикой и смешной. (Ну как можно вывести всю геометрию из того, что перечислено выше в §4 и §5 – тем более, что половина там вообще не принадлежит Евклиду и стоит в квадратных скобках; это ж надо быть просто слабоумным, чтобы полагать, что из ЭТОГО вот вытекает вся геометрия!).

10. Только рационалисты XVII века, как правильно указывает Мордухай-Болтовской, одержимые идеей «выведения всего мира» из одного «общего принципа», стали рассматривать евклидовские постулаты и аксиомы не как приставку для борьбы с софистами, а как фундамент всего изложения и отправную точку дедуктивной цепочки. А еще через некоторое время Гильберт и другие математики пошли у них на поводу – потому что не видели истинного предмета математики вообще и геометрии в частности.

11. Оттого и пошел у них поиск аксиом и подобных принципов. Если бы уже тогда были доступны рассуждения в категориях мозговых программ, никто никакие аксиомы не стал бы искать – как никто не ищет аксиом при рассуждениях об «обычных» компьютерных программах и, говоря о их продуктах, никто не строит никаких аксиоматических систем. Аксиоматические системы – это порождение НЕЗНАНИЯ и БЕССИЛИЯ. (Подобно религии).

12. Веданская теория раскрывает подлинный предмет математики (в данном случае геометрии), но не надо думать, что это просто один из вариантов «построения» математической теории: вот, мол, можно строить формально-логическую систему, можно строить конструктивную математику и т.д. ВТ имеет совершенно другой статус. Это не специфически математическая теория. Это теория интеллекта вообще. Математику она объясняет лишь заодно с множеством других вещей. (Например, в выпуске альманаха [МОИ № 13](#) дается объяснение

гипноза; уж казалось бы, что общего между гипнозом и геометрией? Однако, вот, одна и та же теория объясняет и сущность гипноза, и сущность геометрии. Никакая «конструктивная математика» или другая ветвь математики на ТАКОЕ не способна – как и никакая ветвь психологии).

§7.5. Созидающие, воображающие и распознающие программы

Мозговые программы составляются (генерируются) аппаратом самопрограммирования тогда, когда у субъекта появляется намерение что-нибудь сделать. (Само появление намерения есть возникновение программы будущего действия и, наоборот, появление программы интерпретируется в бытовых понятиях как «намерение»).

Это означает, что даже у одного субъекта этих программ чрезвычайно много, и они очень разнообразны – даже если мы отсеиваем все прочие программы и оставляем только те, что относятся к геометрии, – всё равно их всё ещё очень много, и они разнообразны. Ведь субъект один только треугольник (не говоря о других фигурах и линиях) может рисовать за свою жизнь сотни и тысячи раз – и каждый раз он будет генерировать новую мозговую программу для этого действия – генерировать, правда, по всё более и более отточенной заготовке, но всё же каждый раз создавать новую, каждый раз учитывая конкретные условия, как и где надо рисовать этот треугольник. И таких субъектов – миллиарды.

Поэтому, когда мы приступаем к изучению геометрии, мы должны понимать, что предметом ее являются (потенциальные) продукты всех этих программ, однако самих этих программ мириады, и мы эти мириады заменяем одной, абстрактной, «обобщенной» программой какого-нибудь дела (например, черчения окружности), и эта абстрактная программа тогда и фигурирует в наших рассуждениях. Мы ее обозначаем той или иной буквой того или иного алфавита, и она выступает для нас представительницей всего множества подобных (уже не абстрактных, а реальных) мозговых программ у многих похоже мыслящих субъектов.

Таким образом, в дальнейшем мы будем иметь дело с абстрактными программами, являющимися представителями обширного множества подобных программ у многих субъектов. Но всё же в этих программах целесообразно выделить два класса:

1) программы, представляющие собой намерение нарисовать (или иным путем создать) геометрический объект в реальном мире;

2) программы, выполняющие конструирование геометрического объекта «в уме».

Оба эти класса мозговых программ на самом деле тесно связаны, потому что класс (2) есть проведение бокоанализа программ класса (1) – см. ниже §7.7 о бокоанализе. Но мы всё же для удобства разговора будем различать те программы, которые предназначены для действий во внешнем мире (назовем их «созидающие программы») от тех программ, которые создают свои объекты «в уме» (назовем их «воображающие программы»).

Так, например, упомянутая в §7.3 программа C , рисующая окружность, есть, во-первых, разумеется, программа абстрактная, и, во-вторых, мы ее можем представлять в двух разновидностях: созидающая программа C_1 , которая чертит круг на бумаге, и воображающая программа C_2 , которая чертит круг «мысленно – в уме».

В связи с окружностью мы можем выделить еще и третью разновидность связанной с ней (с окружностью) мозговой программы – C_3 , которая не строит, не воображает, а распознает окружность – устанавливает, что данный объект является именно окружностью.

Ты, Женя, может быть, уже запутался во всех этих разновидностях программ, но это означало бы только, что сбываются мои слова из §7.2, что вы (профессора) «*лишь в очень слабой степени можете представить себе всю ту кухню мозговых программ, какая требуется для сотворения математического мышления*». Деятельность интеллекта не является простой. Интеллект способен и начертить окружность, и лишь вообразить ее, и распознать ее, когда она начерчена другим. И, соответственно, теория интеллекта (если она действительно теория) не может быть примитивной; она должна отображать всё разнообразие фактической деятельности интеллекта.

§7.6. Пространство топокодера

Соображения о конструировании субъекта с математическим (конкретно, геометрическим) мышлением приводят к выводу, что такой субъект не может обойтись без своего «внутреннего пространства». Он должен локализовать в пространстве все те объекты, с которыми он имеет

обусловленной) физической константой; не логичнее ли предположить, что эта константа относится не к устройству физического мира, а к строению человека (и, значит, имеет такой же статус, как константы «одна голова», «два глаза», «два уха», «четыре конечности», «пять пальцев»). Это означало бы, что физический мир (в принципе) позволяет себя отображать в различных пространствах топокодеров (с различными алгоритмами отображения, в том числе и с различным числом размерностей).

В этой книге мы не пытаемся установить, каковы отношения пространства топокодера и физического мира, а ограничиваемся констатацией, что Евклид на самом деле изучает пространство человеческого топокодера и конструкторскую деятельность других мозговых программ в этом пространстве.

§7.7. Бокоанализ

В ВТ чрезвычайно важную роль играет процесс взаимодействия программ, называемый «бокоанализом». Этот процесс состоит в том, что одна программа (например, программа В или D на Рис.1i) берет другую программу (А или С соответственно) и, анализируя код этой программы со стороны («сбоку»), строит образ (называемый в ВТ номиналией) потенциального продукта анализируемой программы.



Рис. 1i

Бокоанализ является очень существенной частью самопрограммирования. Филогенетически он был разработан естественным отбором и встроен в живые существа для того, чтобы у тех появилась возможность прогнозировать последствия своих действий. Так, например, если программа А есть программа прыжка, то программа В, анализируя ее, генерирует картину последствий этого прыжка, и тогда животное (точнее: его программа С) может эти последствия

оценить и принять решение, прыгать или нет (т.е. выполнять программу А или нет). Понятно, что такая предварительная оценка своих будущих действий очень полезна в борьбе за существование, и бокоанализ шлифовался и развивался в ходе эволюции в течение сотней миллионов лет.

А на последних этапах эволюции эта природная способность, по наследству переданная также и человеку, порождает абстрактное, в том числе математическое, мышление. Бокоанализируются уже не программы прыжков (и им подобные), а программы, например, рисования треугольников или сокращения отрезков.

На Рис.1*i* схематически показаны два случая бокоанализа.

В случае (а) программа А является (мозговой) программой, позволяющей субъекту нарисовать треугольник, скажем, в ученической тетради. Если программа А выполняется, то в тетради появляется треугольник. Однако можно программу А не выполнять реально, а программа В возьмет ее саму в качестве своих исходных данных и построит образ (номиналию) ее продукта (как структуру данных в мозге). Раз номиналия построена, то для субъекта начинает существовать объект «треугольник». Но этот треугольник, в отличие от того, который в тетради, не существует нигде в реальном мире. Это абстрактный, идеальный треугольник, существующий только в «платоновском мире идей». (Таким способом этот «мир» и порождается).

В случае (б) программа С способна рисовать всё более и более короткие отрезки линии. Программа D, проведя бокоанализ программы С, генерирует образ (номиналию) «бесконечно короткого» отрезка как «окончательного» продукта этого процесса, и этому объекту присваивается название «точка». Таким образом, точка тоже является потенциальным продуктом некоторой мозговой программы – как и линии, фигуры и вообще все объекты геометрии. (Точка может быть получена не только этой программой, но и другими программами; разными путями полученные точки в геометрии отождествляются).

Не знаю, Женя, что ты понял и что усвоил из всего сказанного; если что не понятно, спрашивай, не стесняйся, но пока что я буду считать, что объяснила тебе исходные понятия достаточно, чтобы можно было приступить к комментированию собственно Евклида.

§7.8. Определения Евклида

Ситуация с определениями такова. В голове Евклида (учителя) имеются множество мозговых программ, генерирующих (способных генерировать) различные геометрические объекты (потенциальные продукты этих программ). Чтобы рассказывать о них, нужно присвоить термины (названия различным объектам). Нужно, чтобы читатель (ученик) ассоциировал термин по возможности точнее с такой же программой в своей голове и с точно таким же ее продуктом. Если эта программа уже есть в голове ученика (он тогда легко представляет ее продукт), то, вводя термин, достаточно просто ему намекнуть, о которой именно программе и о котором именно ее продукте идет речь. Но может быть и так, что данной программы в голове ученика еще нет (тогда он не может представить себе ее продукт; данный объект ему не знаком). В таком случае при присвоении термина недостаточно намек, а при «определении» необходимо передать еще и программу (точнее: ее алгоритм, по которому ученик сгенерирует себе нужную программу).

Таковы общие задачи определений и у Евклида, и вообще. (Точка зрения Гильберта, что определения как таковые вообще не нужны, а достаточно объявить о существовании некоторых объектов, названных «точка», «прямая» и т.п., свойства которых полностью высказаны в аксиомах – такая точка зрения порождена непониманием фактической ситуации – Гильберт ничего не знал о такой реальности, как мозговые программы, – и поэтому такой путь уводит к мышлению неточному и бесперспективному. Это слабая модель, плохо отражающая действительность; лучше пользоваться более точными моделями, использующими понятия мозговых программ).

Ни один набор определений не может быть идеально хорошим с точки зрения описанных выше их целей; для разных учеников разной подготовки (имеющих уже предварительно разные наборы знакомых им программ и генерируемых ими объектов), «лучшими» будут для каждого свои определения. Поэтому бессмысленно обсуждать, хороши или плохи определения Евклида – какие он дал, такие и хороши.

Мордухай-Болтовской говорит в комментарии 4:

Всякое не только *форономическое*, но даже *генетическое* определение использует то представление о геометрическом объекте, которое ученик имеет, хотя и в смутной форме, до начала изучения геометрии.

Разумеется, ученик уже «до начала изучения геометрии» должен иметь (и имеет) некоторые «представления о геометрических объектах», то есть, он должен иметь (и имеет) у себя в мозгу некоторые «геометрические» мозговые программы, иначе никакие определения и вообще никакой рассказ не сможет ему ничего втолковать. И это в общем-то полностью подрывает всю идею аксиоматического метода. Идея аксиоматического метода предполагает, что можно будет всё высказать и оговорить в аксиомах. Но это предположение наивно и невыполнимо, что в конце концов делает аксиоматическую идею глупой. Особенно ясно это становится, если хорошо представлять себе, что необходимо, чтобы встроить геометрическое мышление в компьютер (в робота). Роботу в первую очередь должны быть даны **программы** рисования (вообще создания) линий, окружностей, треугольников, других фигур и т.д. И пока у него не будет этих программ, никакая болтовня об аксиомах ему не поможет. Точно так же это и с человеком.

Знания об этих программах приверженцы аксиоматического метода называют «интуицией» (разумеется, не понимая, что эта «интуиция» представляет собой и откуда берется).

Понятия точки, линии, прямой легко понятны практически любому ученику, как бы эти объекты ни пытались определить разные авторы, и понятны они именно потому, что ученик сам имеет соответствующие генерирующие программы (причем разнообразные: он может вести линию на бумаге или в мыслях, генерировать точки сокращением отрезков как в случае Рис.1i, или перекрещиванием линий – и т.д.).

Из всех остальных определений Евклида вдобавок к комментариям Мордухай-Болтовского хочется сказать только об определении параллельных. Из евклидовского текста «εὐθείαι παράλληλας ἢμμεναί, т.е. *прямые, проведенные друг подле друга*» видно, что у него и здесь исходным было понятие мозговой программы, ведущей вторую прямую линию «подле первой». То, что эти прямые линии не будут перекрещиваться «ни с той ни с другой стороны», вытекает из алгоритма проведения параллельной. (Если программа А есть программа проведения второй линии «подле первой», то программа В делает бокоанализ программы А, строит номиналию ее продукта – абстрактную параллельную прямую – и видит, что при таком способе построения эти прямые никогда не будут встречаться и перекрещиваться).

§7.9. Постулаты и аксиомы Евклида

В комментарии 18 Мордухай-Болтовской совершенно справедливо сказал:

«Евклид не задавался целью вывести все свои положения *силлогистически* из немногих высказанных им определений, постулатов и аксиом».

Постулаты и аксиомы у Евклида НЕ играли той роли, которую им приписывают Гильберт, Вейль и вообще вся современная математика. Постулаты и аксиомы («общие понятия») у Евклида НЕ были основой геометрии, из которой эта наука вытекает. Геометрия у Евклида вытекала из мозговых программ. Конечно, сам Евклид не мог бы сформулировать это положение в таких словах (потому что в его время и речи не могло быть о понятии компьютерной программы), но весь стиль Евклида, вся организация его мышления показывает, что он понятие мозговой программы чувствовал (и чувствовал гораздо лучше, чем Гильберт, Вейль и вообще современные математики).

Достаточно просто прочитать постулаты (§4) и аксиомы (§5) Евклида, чтобы сразу рассмеяться над теми, кто на полном серьезе утверждают, будто вот из ЭТОГО вытекает геометрия и будто Евклид мог так думать. (По этим положениям – по аксиомам и постулатам – ведь не видно даже, КАК нужно чертить прямую линию, КАК обводить окружность, КАК строить треугольник! Дайте роботу эти постулаты и аксиомы – и только эти постулаты и аксиомы, ничего больше! – и я посмотрю, как он будет оперировать у вас геометрией – ха-ха-ха!).

Какова же была роль постулатов и аксиом у Евклида на самом деле? Я уже касалась этого вопроса в пунктах 6–10 §7.4; теперь коснемся еще раз. Мордухай-Болтовской пишет в комментарии 38:

Математик эпохи Платона–Евклида терроризирован софистами: он каждую минуту боится попасть в расставленные последними силки и строит укрепления против нападений по всем правилам ими же самими выработанного искусства. Вот для доказательства первого предложения геометр начал вычерчивать круги и проводить прямые. Софист возражает, что это не всегда можно сделать, что циркуль или линейка могут не оказаться в руках,¹¹⁹ а тогда теорему уже нельзя будет доказать. В самом ходе доказательства он будет придирается к самым, казалось бы, бесспорным и простым истинам, будет утверждать субъективность понятия очевидного (что очевидно для одного, может не быть очевидным для другого) и т.д. Поэтому геометр должен прежде всего заставить согласиться со своими аксиомами и постулатами, причём для этого, конечно, желательно, по возможности, сократить их число.

У Мордухай-Болтовского сказано несколько неточно. Задача была не «заставить согласиться» с имеющимся у геометра аксиомами и постулатами, а дело обстояло иначе. Во-первых, если бы не борьба с софистами, то геометру вообще не нужны были бы ни постулаты, ни аксиомы. (Собственно текст Евклида ведь не содержит на них никаких ссылок!). Во-вторых, вместо «заставить согласиться» у Евклида были две другие цели, с легкостью видимые, если понять его замысел. В соответствии с этими целями Евклид и разделил эти положения на две группы.

Первая группа, называемая у Евклида αἰτήματα – «требования», а у нас «постулаты», имеет очевидную цель: перед рассуждениями договориться, что это так, и что эти положения в дальнейшем не будут оспариваться. Несмотря на очевидную невозможность соединить любые две точки в физическом мире, договариваемся, что это всё-таки возможно (хотя бы мысленно). Несмотря на очевидную невозможность продолжить прямую сколь угодно далеко, договариваемся считать, что это всё-таки возможно. Несмотря на очевидную невозможность обвести окружность любого радиуса, договариваемся считать, что это всё-таки возможно.

Два последних постулата Евклида имеют природу несколько другую, чем первые три. Это тоже договоренности, но не о том, чтобы считать невозможное возможным, а договоренности о том, чтобы считать присущими конструкциям некоторые свойства, не очень очевидные с первого взгляда (во всяком случае, не общепризнанные в обществе греков).

Четвертый постулат (*«И что все прямые углы равны между собой»*), видимо, относится к прямым углам, построенным перпендикулярами к разным прямым, потому что смежные прямые углы (на одной прямой) равны уже по самому определению прямого угла (евклидовское определение 10).

Вторая группа, называемая у Евклида κοινὰ ἐννοιαί – «общие понятия», а теперь «аксиомы», имеет цель не предварительно договориться со слушателями о чем-то, а перечисляет положения, общепризнанные в обществе греков, и поэтому недоступные для нападков софистов. Если софист осмелится напасть на эти истины, то будет слушателями просто высмеян.

Вот подлинная роль постулатов и аксиом у Евклида. Это были средства борьбы с софистами; они не составляли внутреннюю, органическую часть изложения Евклида, а являлись внешней приставкой к этому изложению. Они не были фундаментом, основой изложения Евклида, как это теперь ошибочно полагают. Подлинной основой изложения Евклида были мозговые программы, которые Евклид не мог бы назвать по имени, но присутствие которых он великолепно чувствовал.

¹¹⁹ **МОИ:** Дело не только и не столько в том, что «циркуля может не быть в руках», а в том, что принципиально невозможно обвести окружность (так, как ее обводили греки) любого «раствора» – по горам, по морям, по небесам и т.д. Это действительно невозможно, как и невозможно соединить прямой две точки (которые могут находиться черт знает где – одна под землей, другая на Луне и т.д.). Геометрия в ее общем виде может существовать только в том случае, если принять, что это всё-таки возможно.

Часть 2. Предложения 1 – 16

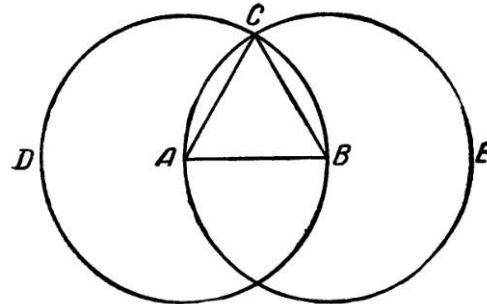
§8. Предложение 1 (29, 30)

На данной ограниченной прямой построить равносторонний треугольник.

Пусть данная ограниченная¹²⁰ прямая будет АВ (черт. 1е).

Требуется вот на прямой АВ построить равносторонний треугольник.

Из центра А раствором АВ опишем круг BCD (постулат 3)¹²¹, и далее из центра В раствором ВА опишем круг ACE (постулат 3); и из точки С, в которой круги пересекают друг друга, проведём к точкам А и В соединяющие прямые СА, СВ (постулат 1)¹²².



Черт. 1е.

И поскольку точка А есть центр круга CDB, то AC равна АВ (определение 15); далее, поскольку точка В – центр круга CAE, то ВС равна ВА (определение 15). Но уже было показано, что и СА равна АВ; значит, каждая из СА, СВ равна АВ. Но равные одному и тому же равны и между собой (аксиома 1); значит, и СА равна СВ.

Значит, три прямые СА, АВ, ВС равны между собой.

Значит, треугольник ABC равносторонний (определение 20) и построен на данной ограниченной прямой АВ [значит, на данной ограниченной прямой построен равносторонний треугольник], что и требовалось сделать (31,32).

§8.1. Комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского

29. Первое предложение Евклида. Против первого предложения «Начал» высказывались очень многие. Возражали против самой конструкции доказательства, относя его к типу «это так», т.е. признавая его *не объясняющим*, каким образом доказываемое свойство вытекает из *существенных* свойств объекта, к которому оно относится и с которым имеет дело определение. Конечно, разделение доказательств на два типа: «это так» (ὅτι) и «потому что» (διότι) является чисто схоластическим.¹²³ Эта классификация идёт от арабского схоластика Аль-Фараби. В чисто схоластических рассуждениях находим образцы доказательств τό διότι. Такого рода критика доказательств ведётся и в XVII в., причём διότι тогда обращается в естественное доказательство, а ὅτι – в неестественное. В XVIII в. это требование обращается в требование, чтобы доказательство развёртывалось по тому пути, по которому шло открытие доказываемой истины.

30. Пересекаемость окружностей. Некоторые обоснованно замечали, что у Евклида остаётся недоказанной пересекаемость двух окружностей. Комментаторы находили выход во введении дополнительной аксиомы о том, что если окружность С имеет точку внутри окружности С', то она должна пересекаться с этой последней. Неполнота доказательства первого

¹²⁰ πεπερασμένη – лучше сказать «ограниченная», чем «конечная».

¹²¹ **МОИ:** Напоминаю, что все ссылки на постулаты и аксиомы, стоящие в круглых скобках, не принадлежат Евклиду, а вставлены публикатором греческого текста Гейбергом.

¹²² У Евклида ἀπό τοῦ Γ σημείου ... ἐπὶ τὰ Α, Β σημεία ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΓΑ, ΓΒ – буквально «от точки С... к точкам Α, Β пусть будут соединены (несуществующее на русском языке повелительное наклонение страдательного залога) прямые СА, СВ». Этот оборот нельзя сохранить в русском переводе, где «соединяются» точки, а не прямые, но, с другой стороны, необходимо оттенить различие между «проведём» прямую (ἤχθω) и «соединим» (ἐπεζεύχθω). В дальнейшем у Евклида большей частью употребляется сокращённый оборот ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΑ, ΓΒ – уже без упоминания о прямых.

¹²³ Исходный пункт у Аристотеля. Aristoteles, Analytica Posteriora, кн. 1, стр. 9, кн. 2, стр. 12, 13. О доказательстве ὅτι – διότι. – Ziehen, Logik, ч. IV, § 36, стр. 805, 1920. – Alfarabi, De divisione philosophiae в Beitrage zur Geschichte der Philosophie des Mittelalters, т. 4, тетр. 2–3. Münster, 1901. – Dietrich, Alfarabis philosophia, Lugduni, 1892, против ὅτι. – Avicenna, Die Metaphysik... von Horth, Leipzig, 1909. – Deussen, Geschichte der Philosophie, т. 2, стр. 407. – Prantl, Geschichte der Logik in Abendlande, т. II, стр. 366, 1863–1870.

предложения у Евклида вполне сознавалась Х. Вольфом, но вряд ли можно согласиться с убедительной силой делаемых им добавлений, не говоря уже о том, что аксиоматическая конструкция остаётся у него совершенно невыясненной.

При доказательстве рассматриваемого предложения Евклид просто обращается к интуиции,¹²⁴ что он, между прочим, делает и в других местах, например, в предложении 12, где ему приходится описывать из точки окружность радиусом, большим расстояния до некоторой прямой, и утверждать, что эта прямая пересечётся в двух точках с проведённой окружностью. При строгом доказательстве предложений подобного рода мы должны были бы в той или другой форме использовать *аксиомы непрерывности*.

Наиболее простым является вывод, приводимый Энриквесом и основанный на аксиоме Дедекинда:

Если все точки отрезка АВ делятся на два класса Х и Y, причём все точки класса Х, к которому принадлежит и А, предшествуют всем точкам класса Y, к которому принадлежит В, то существует некоторая точка С, производящая *сечение* отрезка, определяемое обоими классами Х и Y, причём все точки класса Х по крайней мере не следуют за точкой С, а все точки класса Y по крайней мере не предшествуют ей.¹²⁵

31. Составные части античного доказательства. Полуинтуитивный характер античных геометрических доказательств выявляется в античном разделении доказательства: в этом расчленении только *один* член относится к *логической* операции, все другие относятся к *словесной форме* или к *чертежу*.

1) Πρότασις, Propositio – предложение.

Это в задаче данное и искомое, в теореме – данное или предположенное и то, что следует доказать. На современном языке мы выразимся так: это *формулировка* задачи или теоремы.

2) Ἐκθεσις, Expositio – изложение – то, о чём говорится в общем виде, прилагается к фактически выполненному чертежу.

Мы скажем теперь: это введение в ход доказательств чертежа, для формулировки данных.

3) Διορισμός, Determinatio – определение; в нём ставится перед глазами искомое; мы имеем формулировку по чертежу *искомого*.

4) ῥατασχευή, Constructio – построение; указание, что следует делать.

Здесь разумеется введение в чертёж вспомогательных линий.

5) Ἀπόδειξις, Demonstratio – доказательство в собственном смысле.

6) Συμπέρασμα, Conclusio – заключение, состоящее в объявлении о том, что доказано, и что задача разрешена.

Мы приводим, по Камереру, расчленение доказательств первого предложения «Начал» Евклида, представляющего задачу о построении на данном отрезке АВ равностороннего треугольника ABC.

Propositio. На данной прямой построить равносторонний треугольник.

Expositio. Пусть дана ограниченная прямая АВ.

Determinatio. Требуется на АВ построить равносторонний треугольник.

Constructio. Из центра А раствором АВ опишем круг BCD (постулат 3), затем из центра В раствором ВА описываем круг ACE (постулат 3) и от точки С, в которой эти круги пересекаются, проведём прямые СА, СВ.

Demonstratio. Так как точка А есть центр BCD, то AC равно АВ; далее, так как точка В – центр круга ACE, то ВС равна ВА.

Но было доказано, что и СА равна АВ; значит, каждая из прямых СА, СВ равна АВ; но равные одному и тому же равны и между собой, значит, и СА равна СВ; значит, три прямые СА, АВ, ВС равны между собой. Следовательно, треугольник ABC равносторонний и построен он на ограниченной прямой.

¹²⁴ **МОИ:** Эта так называемая «интуиция» есть знания об основных свойствах изучаемых (мозговых) программ.

¹²⁵ **МОИ:** Такие аксиомы (принципы), может быть, есть смысл формулировать для потенциальных продуктов таких мозговых программ (например, для программ, порождающих числа), которые недоступны столь очевидному и явному бокоанализу, какому доступны программы конструирования окружностей. Иными словами, созданный природой аппарат бокоанализа дает для потенциальных продуктов программ С (конструирования окружностей) настолько очевидный результат, что нет никакой необходимости вводить подобные аксиомы, только запутывающие всё дело.

Conclusio. Значит, на данной ограниченной прямой АВ построен равносторонний треугольник ABC, что и требовалось сделать.

В дальнейшем схема эта значительно упрощается.

Херигон различает в теореме только:

1) *Изложение* условий и объяснение искомого.
2) *Приготовление* к доказательству, которое не всегда, но большей частью необходимо.

3) *Доказательство* того, что то свойство, которое требуется, присуще тому, что предлагается.

32. Теорема и проблема. У Евклида нет термина *теорема*; под названием «*предложение*» стоят как теоремы, так и то, что мы сейчас назвали бы задачами на построение. Но для Евклида это больше чем задачи на построение; это *доказательство существования*.¹²⁶ Оно играет такую же роль, как у нас, например, доказательство существования интеграла от непрерывной функции, и поэтому входит в цепь следующих друг за другом предложений.

Интересно, что в XVII в. Херигон определяет проблему так, как её Евклид не определил бы: «*Проблема, если что-либо предлагается сделать (т.е. построить) или узнать*».

Проблемы второго рода таковы: найти площадь треугольника, найти длину окружности, найти объём пирамиды, объём или поверхность шара. У Евклида таких *проблем* нет. Но они существуют у Архимеда, хотя и не стоят под таким названием.

Между Евклидом и Архимедом существует глубокое различие. Евклид принадлежит больше старому; он сообщает старое, его отделяет и продолжает идти в старом направлении. Архимед открывает *новые* пути в совершенно новом направлении.

Интересно отметить положение Херигона: *проблема нуждается в теореме для доказательства* (т.е. своего обоснования) *и теорема нуждается в проблеме для приготовления* (т.е. для вспомогательного построения).

В это время уже сознаётся необходимость оправдания евклидовых определений.

Термины «королларий» (следствие), «лемма», «схолия» больше употребляются комментаторами Евклида, чем самим Евклидом. В первых пяти книгах лемм нет, но они появляются в шестой; особенно их много в книге X. Наше «следствие» появляется у Евклида под термином «поризм» (буквально «то, что добыто»); таково, например, заключение к предложению 1 книги III, бывшее, по-видимому, до Евклида самостоятельным предложением, поскольку ссылки на это предложение как раз имеют в виду этот «поризм».

Королларий – это непосредственно вытекающее из теоремы следствие. *Лемма* – положение с кратким доказательством, играющее только служебную роль при доказательстве теоремы – по Аристотелю предпосылка силлогизма.

Схолия – это разъяснение к теореме, имеющее целью устранить недоразумение, могущее возникнуть при неправильном понимании её формулировки или каких-либо пунктов в доказательстве.

Если применить эту терминологию к книге I «Начал», то к *проблемам* следует отнести предложения 1, 2, 3, 9, 10, 11, 12, 22, 23, 31, 42, 44, 45, 46.

К *теоремам*: 4, 5, 6, 8, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 47, 48.

К *леммам*: 7, 21, 43.

Того же, что следует называть схолиями, в книге I у Евклида совершенно *нет*.

§8.2. Комментарий Марины Ипатьевой

Итак, в своем Предложении 1 Евклид дает алгоритм (обозначим его Т) для мозговой программы, которая будет строить равносторонний треугольник. Этот алгоритм довольно прост: он предусматривает дважды применить программу С (конструирования окружности) – приложить ее к точке А и к точке В. Потом Евклид показывает, что потенциальный продукт

¹²⁶ **МОИ:** Нет необходимости в такой формулировке намерений Евклида; эта формулировка является проекцией на античную эпоху современных воззрений. Евклид изучал программы мозга и, хотя он, разумеется, не мог бы ТАК сформулировать свой предмет, но сущность этого предмета он понимал правильнее, чем теперешняя (давно заблудшая и ушедшая в болото) математика. В своих «задачах на построение» Евклид дает алгоритм для мозговой программы («как надо строить») и доказывает, что потенциальный продукт этого алгоритма есть именно то, что требовалось построить. Вот и всё. И не надо тут приплетать никакого «доказательства существования».

алгоритма Т является именно равносторонним треугольником, так как все стороны у него одинаковы. Вот и всё.

§9. Предложение 2

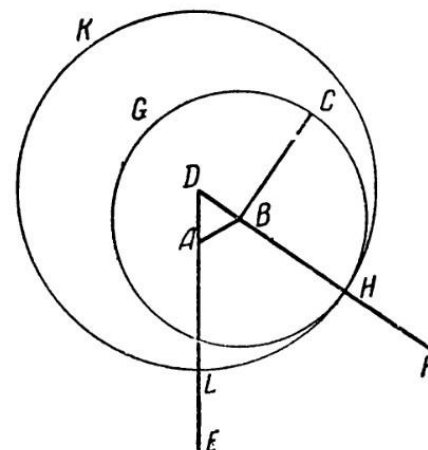
От данной точки отложить прямую, равную данной прямой.

Пусть данная точка будет А, заданная же прямая ВС; требуется вот от точки А отложить прямую, равную данной прямой ВС (черт. 2е).

Проведём от точки А к точке В соединяющую прямую АВ и построим на ней равносторонний треугольник DAB (предложение 1); по прямым DA и DB продолжим прямые AE, BF, из центра В раствором BC опишем круг CGH (постулат 3) и далее из центра D раствором DH опишем круг HKL (постулат 3).

Поскольку теперь точка В – центр круга CHG, то ВС равна ВН (определение 15). Далее, поскольку точка D – центр круга HKL, то DL равна DH (определение 15), а у них DA равна DB. Значит, остаток AL равен остатку ВН (аксиома 3). Но уже доказано, что и ВС равно ВН; значит, каждая из прямых AL и ВС равна ВН. Но равные одному и тому же равны и между собой (аксиома 1); значит, и AL равна ВС.

Значит, от данной точки А отложена прямая AL, равная заданной ВС, что и требовалось сделать.



Черт. 2е.

§9.1. Комментарий Марины Ипатьевой

Итак, еще один алгоритм (обозначим его U) для мозговой программы, выполняющей определенную конструкцию. Теперь алгоритм уже посложнее: он включает выполнение алгоритма Т и, помимо этого, дважды применение программы С, конструирующей окружность. Потом демонстрируется, что в потенциальном продукте алгоритма U будет иметь место $DL = DH$, $DA = DB$, $AL = ВН = ВС$. То есть, что продукт является именно тем, что надо было построить.

§10. Предложение 3

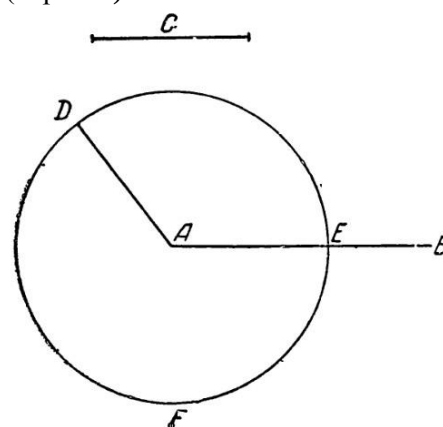
Из двух заданных неравных прямых от большей отнять прямую, равную меньшей.

Пусть данные две неравные прямые будут АВ и С, из них большая, пусть будет АВ; вот требуется от большей АВ отнять прямую, равную меньшей С (черт. 3е).

От точки А отложим AD, равную прямой С (предложение 2); и из центра А раствором AD опишем круг DEF (постулат 3).

И поскольку точка А – центр круга DEF, то AE равна AD; но и С равна AD; значит, каждая из AE и С равна AD; так что AE равна С (аксиома 1).

Значит, из двух заданных неравных прямых АВ и С от большей АВ отнята AE, равная меньшей С; это и требовалось сделать (33).



Черт. 3е.

§10.1. Комментарий Д.Д. Мордухай-Болтовского

33. Второе и третье предложения. Эти два предложения для тех, кто не понял смысл постулата 3, представляют большую загадку. Мы просто предлагаем отрезок ВС переносить на прямую *соответствующим раскрытием циркуля*.

Но Евклид этой операции не признаёт; для него дозволенной операцией является только та, которая устанавливается правильно понимаемым третьим постулатом (см. комментарий 20)¹²⁷. Он его и употребляет в предложении 3: описывает окружность из конца прямой радиусом, равным этой прямой.

Конечно, принимая за дозволенные операции только те, которые признавал сам Евклид, следует согласиться с Проклом, которому наш способ представляется недозванным.

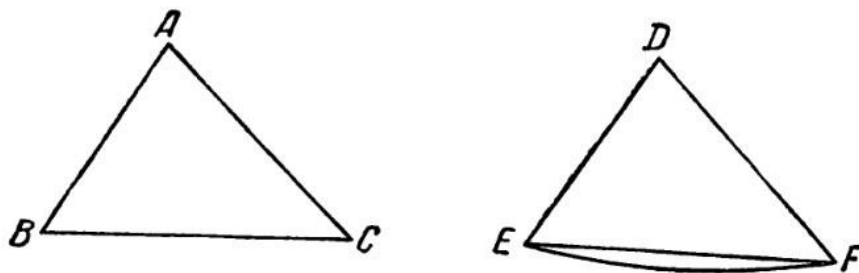
Описание из А круга радиусом ВС предполагает предложение 2, т.е. перенос этого отрезка на некоторую прямую, проходящую через А.

§10.2. Комментарий Марины Ипатьевой

Итак, еще один алгоритм (обозначим его V) для мозговой программы, выполняющей определенную конструкцию. Теперь алгоритм еще сложнее: он включает выполнение алгоритма U и потом применение программы С, конструирующей окружность. Но уже сам алгоритм U включал вызов алгоритма Т, а программа С вызывалась из всех трех алгоритмов на разных уровнях. Евклид блестяще для античного времени демонстрирует структуру программ и приемы программирования! Скорее всего, именно в этой демонстрации и заключалась его цель при включении этих трех предложений в начале «Начал». А перенести длину С меркой-веревочкой на АВ и вычесть из нее никогда не было проблемой – уже за тысячелетия до Евклида.

§11. Предложение 4

Если два треугольника имеют по две стороны, равные каждой каждой, и по равному углу, содержащемуся между равными прямыми, то они будут иметь и основание, равное основанию, и один треугольник будет равен другому, и остальные углы, стягиваемые равными сторонами, будут равны остальным углам каждый каждому.



Черт. 4е.

Пусть ABC, DEF будут два треугольника, имеющих две стороны АВ и АС равными двум сторонам DE и DF каждая каждой, а именно, АВ равной DE, а АС равной DF и угол BAC равным EDF (черт. 4е). Я утверждаю, что и основание BC будет равно основанию EF, и треугольник ABC будет равен треугольнику DEF, и остальные углы, стягиваемые равными сторонами, будут равны остальным углам каждый каждому, а именно, угол ABC углу DEF и угол ACB углу DFE. Действительно, если треугольник ABC совмещается с треугольником DEF и кладутся точка А на точку D, а прямая АВ на DE, то и точка В совместится с Е вследствие того, что АВ равна DE; а так как АВ совместилась с DE, то и прямая АС совместится с DF вследствие того, что угол BAC равен EDF; так что и точка С совместится с точкой F вследствие того, что АС тоже равно DF.

¹²⁷ **МОИ:** В книге, видимо, ошибка – смотреть надо комментарий 21, а не 20. Но то, что там сказано у Мордухай-Болтовского, неубедительно и довольно путанно. Переносить расстояния можно не только циркулем, но и веревкой (веревкой даже легче, чем циркулем – не сдвинется «раствор» случайно; и я вообще не уверена, что во времена Евклида главным инструментом геометра для рисования окружностей был уже циркуль, а не веревка). Причину, почему Евклид ввел предложения 2 и 3, по-моему, нужно искать отнюдь не в том, что с переносом расстояния были какие-то трудности – во времена Евклида или раньше. Евклид изучал программы, и сознавал это достаточно хорошо, чтобы почувствовать необходимость продемонстрировать принцип вложения одной программы в другую (принцип подпрограммы, элементарно известный теперь каждому программисту). Именно ЭТО – вложение одного алгоритма в другой – и демонстрирует Евклид каскадом предложений 1, 2, 3.

Но В уже совместилась с Е; так что и основание ВС совместится с основанием ЕF. Действительно, если при совмещении точки В с Е, а С с F основание ВС не совместилось бы с ЕF, то две прямые будут содержать пространство (аксиома 9), что невозможно.

Значит, основание ВС совместится с ЕF и будет ему равно; так что и весь треугольник ABC совместится со всем треугольником DEF и будет ему равен, и остальные углы совместятся с остальными и будут им равны, а именно, угол ABC углу DEF и угол ACB углу DFE.

Значит, если два треугольника имеют по две стороны равными каждая каждой и по равному углу, содержащемуся между равными прямыми, то они будут иметь и основание, равное основанию, и один треугольник будет равен другому, и остальные углы, стягиваемые равными сторонами, будут равны остальным углам каждый каждому, что и требовалось доказать (34).

§11.1. Комментарий Д.Д. Мордухай-Болтовского

34. Четвёртое предложение. Это первый случай равенства треугольников.

Доказательство Евклида отличается от современного только тем, что он, утверждая совпадение ВС с ЕF при наложении, основывается на аксиоме 9, т.е. на том, что две прямые не содержат пространства, а мы основываемся на том, что через две точки можно провести только одну прямую, т.е. на аксиоматизированном и слитом с аксиомой 9 постулате 1.

§11.2. Комментарий Марины Ипатьевой

Евклид применяет мысленное перемещение треугольника. Разумеется, эту операцию осуществляет некоторая мозговая программа (обозначим ее М). Она оперирует в пространстве топокодера. Рассуждение Евклида есть рассуждение о потенциальном продукте (результате) программы М. Программа М не сможет поместить треугольник ABC на треугольник DEF так, чтобы ВС не совпало с ЕF. В этом суть всего разговора.

§12. Предложение 5

У равнобедренных треугольников углы при основании равны между собой, и по продолжении равных прямых углы под основанием будут равны между собой.¹²⁸

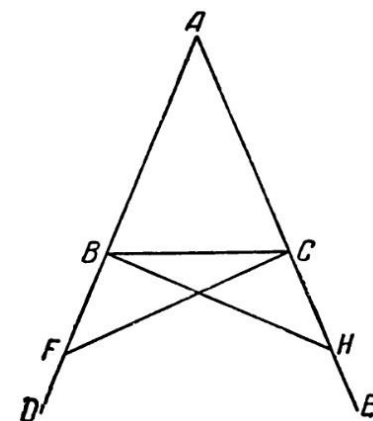
Пусть ABC будет равнобедренный треугольник, имеющий сторону АВ, равную стороне АС (черт. 5е), и пусть по прямым АВ, АС будут продолжены прямые ВD, СЕ (постулат 2).

Я утверждаю, что угол ABC равен углу ACB, а угол CBD углу BCE.

Действительно, на ВD возьмём произвольную точку F, от большей АЕ отнимем АН, равную меньшей АF (предложение 3), и соединим прямыми FC и HB.

Поскольку теперь АF равна АН, а АВ равна АС, то вот две <прямые> FA, AC равны двум HA, AB каждая каждой; и они содержат общий угол FАН; значит, основание FC равно основанию HB и треугольник AFC будет равен треугольнику АНВ и остальные углы, стягиваемые равными сторонами, будут равны остальным углам каждый каждому, а именно, угол ACF углу АВН, а угол AFC углу АНВ (предложение 4).

И поскольку вся АF равна всей АН, и у них АВ равна АС, то, значит, и остаток BF равен остатку СН (аксиома 3). Но доказано, что и FC равна HB; вот две прямые BF, FC равны двум прямым СН и HB каждая каждой; и угол BFC равен углу CHB, и основание у них общее ВС. Значит, и треугольник BFC равен треугольнику CHB, и остальные углы, стягиваемые равными сторонами, равны каждый каждому (предложение 4); значит, угол FBC равен углу HCB, а угол BCF углу CBH. Поскольку теперь доказано, что весь угол АВН равен всему углу ACF, и у них CBH равен BCF, то, следовательно, и остаток ABC равен остатку ACB (аксиома 3) и они находятся при основании треугольника ABC. Доказано же, что и угол FBC равен HCB, и оба они под основанием.



Черт. 5е.

¹²⁸ Свойство равнобедренного треугольника, доказываемое в предложении 5, по свидетельству Прокла, обнаружил ещё Фалес.

Значит, у равнобедренных треугольников углы при основании равны между собой и по продолжении равных прямых углы под основанием будут равны между собой. Это и требовалось доказать (35, 36, 37).

§12.1. Комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского

35. Метод наложения.¹²⁹ Если согласиться с тем, что Евклид мыслил геометрические фигуры существующими лишь с момента, как они оказывались построенными, то является вопрос, правильно ли понимают его метод наложения. Мыслился ли при операции наложения идеальный треугольник, переносимый с одного места на другое для совмещения со вторым? Не мыслился ли Евклидом этот перенос в смысле построения в другом месте треугольника, одинакового с данным?

На это как будто указывает то, что книга I начинается с изложения способа *переноса отрезка*. Что касается переноса угла, то, вероятно, операция описания из вершины A' угла $B'A'C'$ окружности радиусом $A'B'$, перенос $A'B'$ в AB и засечение дуги BC окружности радиусом $BC = B'C'$ представляется очевидным решением задачи. То, что строгое обоснование этой операции основывается на 3-м случае равенства треугольников, раньше не замечалось, и предложение 23 должно быть отнесено к позднему времени.

Во всяком случае все комментаторы понимали наложение в *нашем смысле* и обнаруживали тенденцию пользоваться им шире, чем делал это Евклид.

Прокл даёт следующее доказательство предложения 5 книги I.

Если в треугольнике ABC стороны AB и CB равны, то берём треугольники ABC и CBA : в них равны основания AC и CA и боковые стороны $AB = CB$ и $BC = BA$; следовательно, по третьему случаю равенства треугольников будут равны и углы при основании, т.е. $\angle A = \angle C$, а $\angle C = \angle A$.

Рационалисты XVII в. настроены *несочувственно* к методу наложения. Этот метод, по их мнению, убеждает с помощью обращения к *чувствам*, а не к *чистому разуму*, который только один является судьёй. Первый случай равенства треугольников доставляет им много хлопот. Мы видим ряд попыток замены обычного доказательства наложением другим без этой «механической операции», столь противной духу рационалистической мысли.

Томас Симпсон¹³⁰ относит первый случай равенства к аксиомам совершенно так, как в настоящее время Гильберт.

36. Евклид и Лежандр. Формономическая геометрия. Какой метаморфозе подверглись взгляды на математическое доказательство от Евклида до настоящего времени, можно видеть, анализируя Евклида, Лежандра и наши современные учебники, которые восходят к этим авторам.

То, что Лежандр считает доказательством, не могло быть признано за доказательство Евклидом; с другой стороны, Лежандр не мог начать свои элементы с построения равностороннего треугольника, как это делает Евклид.

Не следует думать, что Лежандр в своих «упрощённых» доказательствах додумывается до более простых доказательств, которые ускользнули от Евклида. Евклид, может быть, и знал эти доказательства, но отвергал их как *негодные*, как находящиеся в решительном противоречии с его взглядами на доказательство. Почему бы ему не поступать так, как поступает Лежандр при доказательстве основного свойства равнобедренного треугольника, состоящего в том, что углы, противолежащие равным сторонам, равны? Ведь, кажется, нет ничего проще, как соединить *середину* D стороны BC с вершиной A и доказать на основании третьего случая конгруэнтности равенство треугольников ABD и ADC .

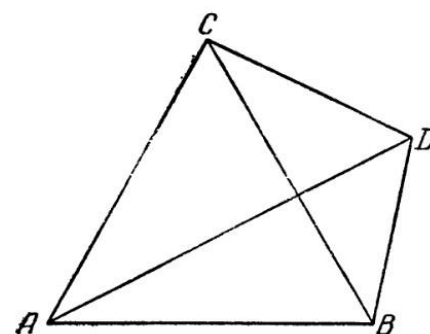
Между тем, Евклид даёт другое, более сложное доказательство I.5 (так называемое *elefuga*).

Это потому, что Евклид признавал существование только тех объектов, которые могут быть построены. Он потребовал бы от Лежандра указания способа построения точки D середины BC . Но построение это (предложение 10 книги I) основывается на предложении 9 о делении угла на две равные части, последнее же на третьем случае конгруэнтности треугольников (предложение 8), а третий случай конгруэнтности доказывается от противного на основании предложения 7, утверждающего, что если мы соединим концы основания AB (черт. 5m) с двумя точками C и D лежащими по одну сторону прямой AB , то расстояния CA и CB точки C от концов основания AB не могут быть равны соответственно расстояниям DA и DB от тех же концов.

¹²⁹ Д. Мордухай-Болтовской, Метод наложения, Математическое образование.

¹³⁰ Thomas Simpson, Elements of Geometry, т. I, стр. 14.

Употребление *движения* носит у Евклида случайный характер: его геометрия по своему типу является скорее *конструктивной*. Правда, он не определяет вместе с Манзионом понятия «равных» фигур как «*одинаково построенных*», но первые три его постулата и их применение для переноса отрезка несколько сближают геометрию Евклида с штейнеровскими построениями при помощи линейки и неподвижного круга с отмеченным центром, когда равенство отрезков устанавливается не путём переноса их с помощью циркуля (операция, являющаяся у Евклида *недозволенной*), а при помощи целого ряда операций.



Черт. 5m.

В основанной на идее движения *форономической* геометрии мы постулируем возможность любого переноса в пространстве фигур без изменения их элементов – взаимных расстояний различных их точек и углов, образуемых их прямыми. В отличие от практической (физической) геометрии, где идея переноса отрезка является основным принципом всякого измерения, в идеальной геометрии перенос фигуры А на фигуру В совершается лишь для того, чтобы помочь уму увидеть, что части А тождественны частям В. Если фигура А является чисто идеальной, то таковым же будет и самый перенос. Если идеальная фигура А изменяется при идеальном переносе, то она уже не А, а какое-то третье С, которым уже не следует заниматься.

Такого же взгляда на геометрию Евклида как на геометрию конструктивного типа придерживается и Цейтен, считающий, что евклидову конструктивизму предшествовал идеализм Платона. Платоники утверждали, говорит Цейтен, что треугольник существует *до построения* его. Менехм же, очевидно, должен был доказывать, что в реальном существовании этого треугольника мы убеждаемся, лишь *построив* его и доказав при этом, что это построение действительно приводит к поставленной нами цели. Именно так и поступает Евклид: не довольствуясь определением разностороннего треугольника, он, прежде чем начать им пользоваться, убеждается в его реальном существовании, построив такой треугольник в предложении 1 своей I книги и доказав правильность произведённого построения.

В случае отказа от метода наложения приходится вводить в систему аксиом такое неочевидное положение, как, например, гильбертова аксиома III₅, представляющая по существу второй случай равенства треугольников.

Другой путь развития геометрии, при котором сохраняется та же убедительность изложения, что и у Евклида, но, кроме того, выявляются аксиоматическая структура и система, есть путь *форономический*. При следовании по этому пути основой является понятие о движении, причём выставляется система аксиом, определяющих движение согласно данным интуиции.

В таком случае конгруэнция, или равенство (в современном смысле этого слова), определяется как *совпадение* при наложении сравниваемых фигур, которые предполагаются определённым образом передвигающимися. Хотя Евклид и пользуется движением при доказательстве первого случая равенства треугольников, но в дальнейшем он определённо его *избегает*, предпочитая другие случаи равенства треугольников доказывать иными путями. Я думаю, что его доказательство предложения 4 следует рассматривать как наследство какого-нибудь из его предшественников, от которого он не может освободиться. Мы уже имели случай отметить, что генетические определения *форономического* характера являются более древними, чем определения, производимые по аристотелевскому рецепту *per genus et differentiae specificam* (через род и видообразующее отличие).

Среди сторонников *форономической* трактовки геометрии следует назвать Гельмгольца,¹³¹ для которого подход к основам геометрии имел не методическое, а скорее философское значение, Софуса Ли, рассматривавшего движение как группу преобразований, при которых сохраняются инвариантными некоторые выражения, зависящие от координат двух точек (*расстояния*). В числе учебников геометрии, построенных по *форономическому* принципу, надо

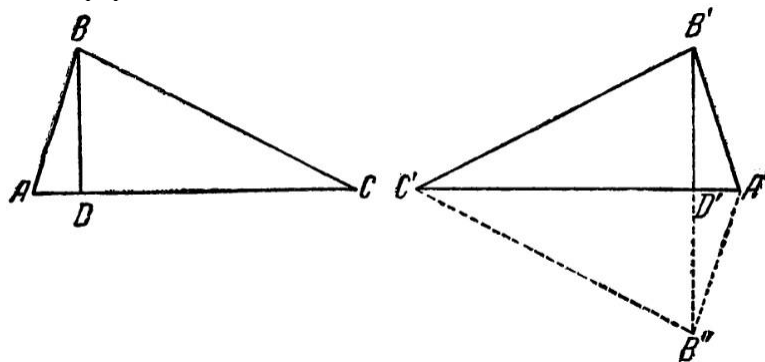
¹³¹ Helmholtz, Über die Tatsache die der Geometrie zu Grunde liegen. Götting. Nachr., 1858, стр. 193. – В. Каган, Основания геометрии, Одесса, 1905, т. 2.

упомануть Меря, Бореля и Бурле,¹³² оба последних проводят в жизнь требования известной Меранской программы.

37. Двумерный Евклид. Евклид, доказывая первый случай равенства треугольников (предложение 4), должен выводить треугольник в *трёхмерное пространство* в том случае, когда имеются симметричные треугольники.

Действительно, если даны треугольники ABC и $A'B'C'$ (черт. 6m), то, двигая по плоскости треугольник ABC , можно его привести только в положение $A'B'C'$, совмещение же получается лишь в результате вращения около $A'C'$, причём треугольник выводится из плоскости.

Можно ли так переработать «Начала» Евклида, чтобы этой операции не было? Бонензен¹³³ показывает, что такая переработка возможна.



Черт. 6m.

Для этого нужно только идти в следующем порядке:

- 1) доказать равенство треугольников с одинаково расположенными элементами,
- 2) доказать лемму Лакруа об отрезках, отсекаемых на двух прямых параллельными,
- 3) доказать пропорциональность сторон в треугольниках с равными углами и не одинаково расположенными элементами,
- 4) изложить теорию измерения прямоугольников и треугольников,
- 5) доказать теорему Пифагора по методу Евклида,
- 6) на основании теоремы Пифагора доказать, что в равнобедренном треугольнике высота, опущенная на основание, будет вместе с тем и медианой, так что основание разделится пополам,
- 7) доказать, что в равнобедренном треугольнике углы при основании равны,
- 8) свести доказательство равенства $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ к равенству прямоугольных треугольников $\triangle BDC$ и $\triangle B'D'C'$ (где $\angle B = \angle B'$, $BC = B'C'$ и $\triangle ADB = \triangle A'D'B'$, при $DB = D'B'$ и $AD = A'D'$ (черт. 6m) на том основании, что $B'D'C'$ можем заменить ему симметричным $C'D'B''$ в котором $B'C' = B''C'$ и $\angle B = \angle B''$ и уже в силу 1) равным BCD .

Точно таким же образом $A'B'D'$ можем заменить его симметричным $B''D'A'$, тоже равным ему, так как равенство гипотенуз сейчас же выводится на основании теоремы Пифагора.

Что касается пункта 7 (т.е. предложения 5 Евклида), то доказательство его ведётся только с помощью теоремы Пифагора.

§12.2. Комментарий Марины Ипатьевой

Итак, что же произошло в евклидовом предложении 5?

Исходный треугольник ABC (черт. 5e, повторенный на моем рис. 2i), конечно, сгенерирован какой-то программой (и является ее продуктом), но теперь эта программа отступает на задний план и даже как бы исчезает с виду. На первый план выходят свойства собственно треугольника (т.е. продукта некоторой программы), а именно: в первую очередь то, что он – равнобедренный. Мы хотим установить некоторые другие свойства этого продукта программы (а именно: что углы у основания и под ним соответственно равны). И эти свойства, которые могли бы и считаться очевидными, всё же очевидными не признаются, а подлежат доказательству.

¹³² Méray, Nouveaux éléments de Géométrie, 1874, 3 éd., 1905. – Borel, Géométrie, Paris, 1905. На русском языке: Борель-Штеккель, Элементарная математика, Геометрия (там же о Меранской программе), Москва, 1923. – Bourlet, Cours abrégé de Géométrie, 2 éd., Paris, 1907.

¹³³ Bonensen, Nyt Tidsskrift for Mathematik. – Barbarin, Sur la géométrie des êtres planes. Procès-verbaux de séances de la Soc. d. sc. phil. et nat., Bordeaux, 1901.

Такова общая диспозиция. В процессе доказательства пускаются в ход некоторые новые мозговые программы (выбор точки F , откладывание $АН = AF$, проведение линий $ВН$ и FC), и потом проводится рассуждение над суммарными продуктами всех этих программ. Углы признаются равными потому, что равны определенные треугольники.

Здесь со всей отчетливостью раскрывается вся сущность геометрии: 1) есть продукты некоторых мозговых программ (но сами эти программы не упоминаются); 2) за известные принимаются некоторые свойства этих продуктов; 3) данные в начале продукты дополняются новыми продуктами еще других программ; 4) устанавливаются дополнительные свойства исходного продукта, считавшиеся в начале неизвестными.

На основании чего можно установить наличие этих новых, ранее не известных, свойств? Разумеется, на основании объективных закономерностей, существующих в продуктах данных мозговых программ. Наличие этих мозговых программ (и то, что они именно такие, а не другие) создает некоторую объективную реальность, которая далее исследуется геометром как и всякая другая реальность. Мозговые программы здесь являются первоосновой, источником объективности.

Рассуждение, приводящее к установлению новых, ранее не известных субъекту, свойств продуктов конструкторских мозговых программ, – это рассуждение, разумеется, тоже проводится мозговыми программами субъекта (но уже другими – не конструкторскими; котел мозговых программ огромен, их мириады). Чтобы не путать обе эти группы мозговых программ, задействованных у субъекта при работе с геометрией, назовем первые **конструкторскими**, а вторые **рассудительными**.

Что же такое в этом деле аксиомы (в их современном, а не оригинальном евклидовском понимании)? Это некоторые моменты, используемые рассудительными программами в их работе. Зависят ли вновь устанавливаемые свойства конструкторских программ от аксиом? Разумеется, нет – все свойства определены объективно самими конструкторскими программами.

Но зависят ли доказательства (т.е. установление для субъекта этих свойств) – зависит ли от аксиом это обнаружение субъектом данных свойств? Разумеется – зависит; без использования аксиом он не сможет провести свой рассудительный процесс.

Итак, мы можем подвести итог следующим образом: свойства изучаемых в геометрии объектов заданы конструкторскими (генерирующими) программами и от аксиом не зависят. Но доказательство этих свойств, установление их для субъекта от аксиом зависит.

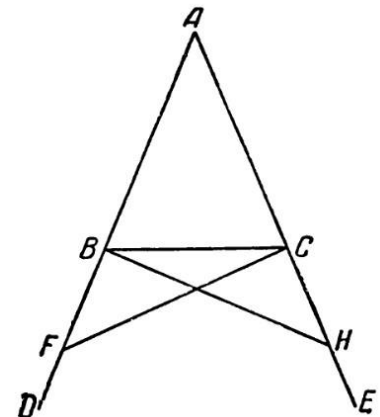


Рис. 2i.

§13. Предложение 6

Если в треугольнике два угла равны между собой, то будут равны между собой и стороны, стягивающие равные углы.

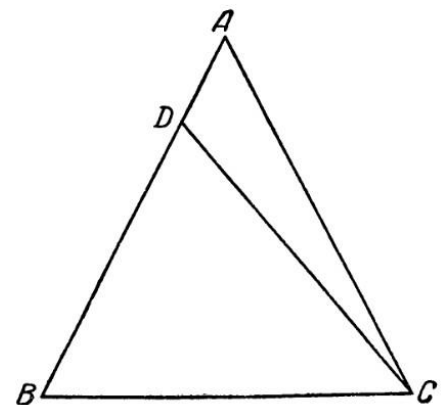
Пусть ABC будет треугольник, имеющий угол ABC , равный углу ACB ; я утверждаю, что и сторона AB равна стороне AC (черт. 6е).

Действительно, если <сторона> AB не равна AC , то одна из них больше другой. Пусть будет больше AB ; от большей AB отнимем DB , равную меньшей AC , и соединим DC .

Поскольку теперь DB равна AC , а BC общая, и вот две <прямые> DB , BC равны двум AC , CB каждая каждой, и угол DBC равен углу ACB ; значит, основание DC равно основанию AB , и треугольник DBC будет равен треугольнику ACB (предложение 4), меньший большему, что нелепо (аксиома 8).

Значит, AB не будет не равной AC ; значит, она ей равна.

Значит, если в треугольнике два угла равны между собой, то будут равны между собой и стороны, стягивающие равные углы, что и требовалось доказать (38).



Черт. 6е.

§13.1. Комментарий Марины Ипатьевой

Треугольник ABC, как и в предыдущем случае, создан некоторой программой P, которая отодвинута на задний план. На переднем плане свойства продукта этой программы, а именно: что углы равны. Объективное состояние с продуктами конструкторских программ определяет, что и стороны равны (т.е. эти оба свойства в продуктах данных программ всегда сопутствуют). Однако субъект хочет в этом убедиться через свои рассудительные программы. Для этого он генерирует номиналию (образ) такого продукта программы P, в котором присутствует только одно свойство (равенство углов), но нет другого свойства (равенства сторон). Рассудительные программы приводят его к выводу, что треугольник DBC будет равен треугольнику ACB. Суть не столько в том, что это противоречит аксиоме («*И целое больше части*»), сколько в том, что треугольник DBC будет тем же треугольником ACB (а точка D той же точкой A).

§13.2. Комментарий Д.Д. Мордухай-Болтовского

38. Происхождение апагогического доказательства. Евклид широко пользуется так называемым *приведением к абсурду*, иначе говоря, апагогическим доказательством, состоящим в том, что положение A доказывается опровержением противного (не A) с помощью вывода из последнего невозможного следствия.

Начало апагогического доказательства, вероятно, относится к элейской философской школе; оно приобретает особое значение у софистов.

Античная математика не столько заботится о системе геометрии – изложении каких-либо причин или общих свойств пространства, из которых вытекают свойства геометрических фигур, – сколько старается убедить читателя в истинности подмечаемых свойств. Математик эпохи Платона–Евклида терроризирован софистами: он каждую минуту боится попасть в расставленные последними силки и строит укрепления против нападений по всем правилам ими же самими выработанного искусства. Вот для доказательства первого предложения геометр начал вычерчивать круги и проводить прямые. Софист возражает, что это не всегда можно сделать, что циркуль или линейка могут не оказаться в руках, а тогда теорему уже нельзя будет доказать. В самом ходе доказательства он будет придирается к самым, казалось бы, бесспорным и простым истинам, будет утверждать субъективность понятия очевидного (что очевидно для одного, может не быть очевидным для другого) и т.д. Поэтому геометр должен прежде всего заставить согласиться со своими аксиомами и постулатами, причём для этого, конечно, желательно, по возможности, сократить их число; необходимость же этого сокращения, ведущая к ограничению свободы выбора логических путей для доказательства теорем, заставляет наряду с прямыми применять и косвенные апагогические доказательства.

Прямое доказательство всегда считалось лучше косвенного.

Аристотель¹³⁴ – только довольно робко – выдвигает преимущества прямого доказательства перед апагогическим.

По его мнению, более согласны с *природой* выводы, в которых мы от включения или выключения из класса B переходим к включению или выключению из класса C, объемлющего B. «Положение «ни одно A не есть C» первее, чем «ни одно A не есть B» – мы в нём ближе поднимаемся к принципам».

В апагогическом доказательстве порядок обратный:

Следует доказать, что A не есть B.

Предполагаем, что некоторые A суть B. Все B суть C. Закключаем: некоторые A суть C, что неверно, и поэтому ни одно A не есть B.

Но по Аристотелю всё-таки и в этом случае тем или иным путём достигается цель науки, а именно, построение связи между вещами и общими положениями, выставляемыми в начале науки.

Заметим, что его аргументы, уже совершенно не гармонирующие, с настроением умов XVI и XVII вв., в эту эпоху не повторяются.

Крайняя неприязнь рационалистов XVII в. к апагогическим доказательствам вытекает из их общего мировоззрения, старающегося всё многообразие вселенной вывести из одного мирового принципа с помощью постепенного ряда ограничений, созидających мир как логическое следствие из простых и легко формулируемых, как теоремы геометрии, положений. В глазах рациона-

¹³⁴ Aristoteles, *Analytica Posteriora*, кн. I, гл. 26.

листа вся вселенная представляется как ряд взаимоотношений, вытекающих из небольшого числа аксиом, относящихся к простейшим отношениям.¹³⁵

Комментатор «Начал» Евклида этой эпохи занят *выпрямлением* евклидовых апагогических доказательств, что достигается введением явно или неявно новых *аксиом*.

В выпрямленные Озанамом¹³⁶ доказательства книги III «Начал» входит в скрытом виде теория пределов. Вообще исчисление бесконечно малых в совокупности аксиом, на которых оно основывается, является системой *выпрямленных доказательств*, заменяющих более сложный апагогический метод исчерпывания.

В XVI в. нападки на апагогическое доказательство ведутся, но с ним легче мирятся. В XVI в. Савиль¹³⁷ возражает Иосифу Скалигеру на его нападки против апагогического доказательства, объявляя, что оно равно прямому в отношении истинности и необходимости, но ниже в отношении происхождения.¹³⁸

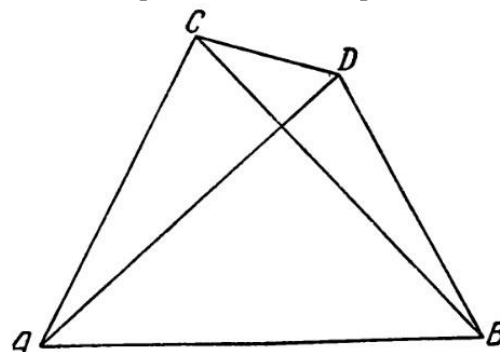
§14. Предложение 7

На одной и той же прямой нельзя построить двух прямых, равных каждая каждой двум другим прямым и <сходящихся> одни в одной точке, другие в другой, так, чтобы эти прямые находились бы по одну сторону и имели бы одни и те же концы с первоначальными прямыми.

Действительно, если возможно, пусть на одной и той же прямой AB будут построены две прямые AD и DB, равные каждая каждой двум другим прямым AC и CB, сходящиеся одни в одной точке C, другие в другой D, находящиеся по одну сторону и имеющие одни и те же концы, так что CA равнялось бы DA, имеющей с ней тот же конец A, а CB равнялось бы DB, имеющей с ней тот же конец B; соединим CD.

Поскольку теперь AC равна AD, и угол ACD равен углу ADC (предложение 5), значит, угол ADC больше угла DCB; значит, и подалюбо угол CDB больше угла DCB. Далее, поскольку CB равна DB, и угол CDB равен углу DCB. Но доказано, что он и подалюбо больше его; это же невозможно.

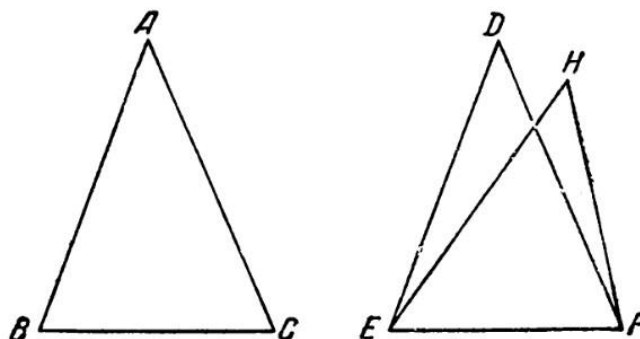
Значит, на одной и той же прямой нельзя построить двух прямых, равных каждая каждой двум другим прямым и сходящихся одни в одной точке, другие в другой, так, чтобы эти прямые находились бы по одну сторону и имели бы одни и те же концы с первоначальными прямыми, что и требовалось доказать.



Черт. 7е.

§15. Предложение 8

Если два треугольника имеют две стороны, равные каждая каждой двум сторонам, имеют также и основание, равное основанию, то они будут иметь и угол равный углу, заключённому между равными прямыми.



Черт. 8е.

¹³⁵ **МОИ:** Вот здесь и есть фактическое начало аксиоматического метода – а не у Евклида. Гильберт и остальные аксиоматизаторы переняли и продолжили эту тенденцию рационалистов XVII века.

¹³⁶ Ozanam, Cours des Mathematiques, Paris, 1720.

¹³⁷ Savilius, Praelectiones, кн. 10, стр. 170, 196.

¹³⁸ Hauber, Chrestomatia Geometrica, Tubingen, 1822.

Пусть ABC и DEF будут два треугольника, имеющих две стороны AB , AC , равные каждой каждой двум сторонам DE , DF , именно, AB , равную DE , и AC , равную DF ; пусть они имеют также и основание BC , равное основанию EF ; я утверждаю, что и угол BAC будет равен углу EDF .

Действительно, когда треугольник ABC налагается на треугольник DEF и помещаются точка B на точку E и прямая BC на прямую EF , то и точка C совместится с F вследствие того, что BC равна EF ; когда же вот BC совместились с EF , то совместятся и BA и CA с ED и DF .

Действительно, если основание BC совместится с основанием EF , а стороны BA и AC не совместятся с ED и DF , но уклонятся в сторону, как, например, EH и HF , то на одной и той же прямой будут построены другие две прямые, равные этим двум прямым каждая каждой, <сходящиеся> одни в одной точке, другие в другой точке, находящиеся по одну сторону и имеющие те же концы.

Но они не могут быть построены (предложение 7); значит, при совмещении основания BC с основанием EF будут совмещаться и стороны BA , AC со сторонами ED и DF . Значит, они совмещаются; так что и угол BAC совместится с углом EDF и будет ему равен.

Значит, если два треугольника имеют две стороны, равные каждой каждой двум сторонам, и основание, равное основанию, то они будут иметь и угол, равный углу, заключённому между равными прямыми, что и требовалось доказать (39).

§15.1. Комментарий Д.Д. Мордухай-Болтовского

39. Седьмое и восьмое предложения. Седьмое предложение у Евклида носит характер *леммы*, необходимой только для доказательства положения 8.

Но из него сейчас же выводится, что две окружности не могут пересекаться более чем в двух точках.

Х. Вольф¹³⁹ не пользуется евклидовской леммой, а в своих элементах геометрии выводит третий случай равенства треугольников из этого последнего положения.

Вывод третьего случая равенства треугольников из единственности построения треугольника по трём сторонам находится и в некоторых современных немецких учебниках.

Лежандр, как и Евклид, доказывает это положение апагогически, но доказательство у Лежандра другое.

Лежандр начинает с положения: «Если две стороны одного треугольника равны соответственно двум сторонам другого и если в то же время угол между первыми более угла, заключённого между вторыми, то третья сторона первого будет больше третьей стороны второго».

Это 24 теорема I книги «Начал» Евклида, т.е. весьма отдалённая от начала теорема, которая доказывается на основании третьего случая конгруэнтности треугольников.

Для доказательства того, что при

$$AC = FG, AB = GH \text{ и } \angle BAC > \angle FGH,$$

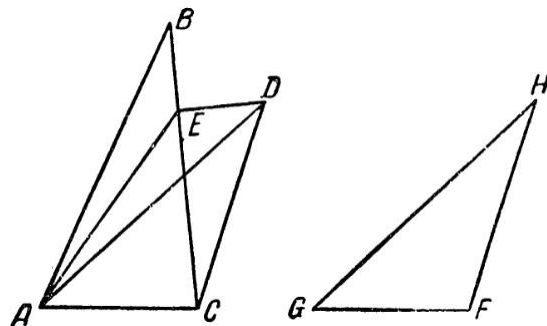
имеем: $BC > FH$ (черт. 7m), Лежандр откладывает $\angle CAD = \angle FGH$, затем на нём прямую $AD = HG$ и строит $\triangle CAD$ равный $\triangle FGH$ (на основании первого случая равенства).

Он проводит *биссектрису* AE угла BAD , соединяет E с D и доказывает равенство $\triangle BAE$ и $\triangle EAD$ так как: $CD < ED + EC$, то $CD < BE + EC$, затем $CD < BC$ и, наконец, $FH < BC$.

Эта теорема сейчас же даёт возможность вывести апагогически третий случай конгруэнтности.

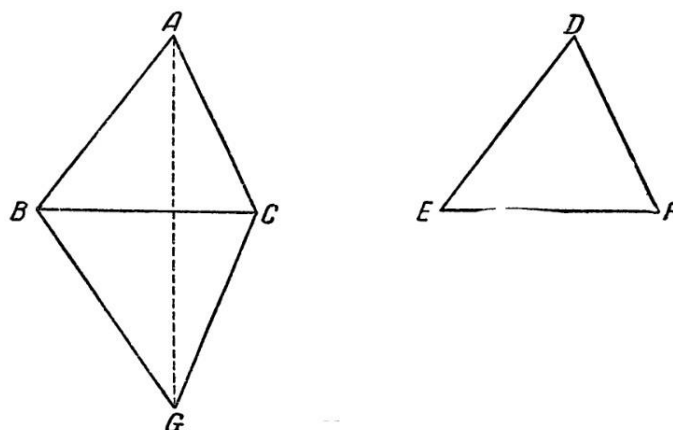
Такое доказательство, конечно, не может быть принято Евклидом, ибо *построение биссектрисы не является известным*.

Совершенно в античном духе доказательство *приложением* (приписываемое Филону) и вошедшее во многие учебники.



Черт. 7m.

¹³⁹ Ch. Wolfius, Anfangsgründe aller mathematischer Wissenschaften, 1750.



Черт. 8m.

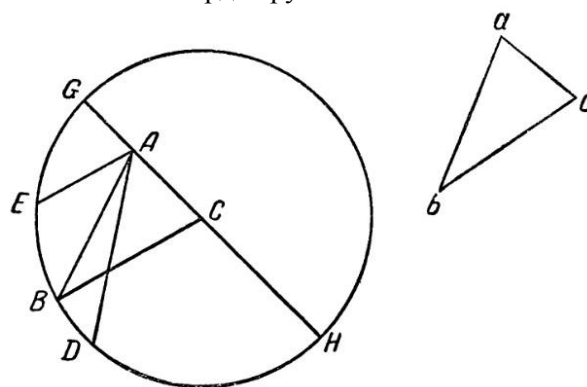
Оно состоит в том, что треугольник DEF (перевернутый) прилагается так к ABC (черт. 8m), что сторона EF оказывается на стороне BC и треугольник EDF в положении BCG. Точка A соединяется прямой с G и на основании предложения 5 доказывается, что в $\triangle ABG$ и $\triangle AGC$ углы при A и G соответственно равны, откуда заключается, что

$$\angle BAC = \angle BGC = \angle EDF,$$

и третий случаи конгруэнтности треугольников сводится к первому случаю.

Арнольдианский порядок, о котором мы ниже будем говорить, приводит к доказательству третьего случая равенства треугольников на основании свойств хорд окружности.

Если внутри окружности (с центром в C) взять точку A (черт. 9m), то кратчайшей линией, проходящей через A и соединяющей её с окружностью, будет та, продолжение которой проходит через центр C; наибольшей же будет та AH, на которой лежит центр C, и линия AE тем больше, чем она меньше наклонена к AH.



Черт. 9m.

Для доказательства наложимости abc на ABC в случае $AC = ac$, $AB = ab$, $BC = bc$ поступаем так: са накладываем на CA и доказываем, что ab пойдёт по AB. В самом деле, она не могла бы пойти ни по AE, ни по AD так как в первом случае ab была бы меньше, а во втором больше чем AB.

§16. Предложение 9

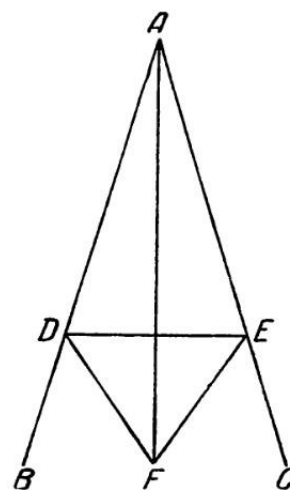
Данный прямолинейный угол рассечь пополам.

Пусть данный прямолинейный угол будет BAC; требуется рассечь его пополам.

Возьмём на AB произвольную точку D, от AC (черт. 9e) отнимем AE, равную AD, соединим DE, построим на DE равносторонний треугольник DEF (предложение 1) и соединим AF; я утверждаю, что угол BAC делится пополам прямой AF.

Действительно, поскольку AD равно AE, AF же общая, вот две <стороны> DA, AF равны двум EA, AF каждая каждой. И основание DF равно основанию EF; значит, угол DAF равен углу EAF (предложение 8).

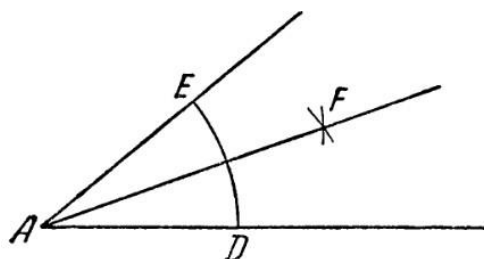
Значит, данный прямолинейный угол BAC рассечён пополам прямой AF, что и требовалось сделать (40, 41).



Черт. 9e.

§16.1. Комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского

40. Деление угла пополам. Почему Евклид не употребляет наш способ, состоящий в том, что из A (по постулату 3) описывается окружность DE, затем из точек D и E описываются окружности равных радиусов, пересекающиеся в F, а полученная точка F соединяется прямой с A (черт. 10m).



Черт. 10m.

предложения 2, но значительно осложняющая построение.

Следует отметить, что евклидово построение допускает два решения: треугольник может быть построен по различные стороны DE.

41. Трисекция угла.¹⁴⁰ Тремя знаменитыми классическими проблемами являются следующие:

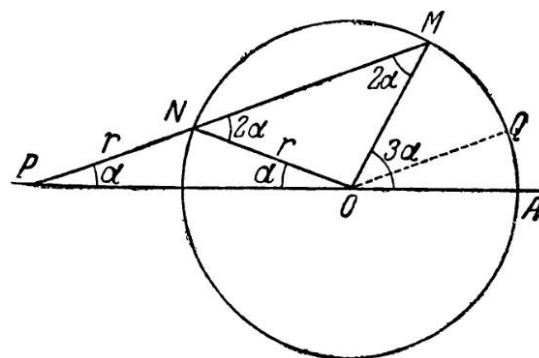
- 1) Построение стороны квадрата, равновеликого данному кругу (квадратура круга).
- 2) Построение куба, равновеликого удвоенному данному кубу (Делийская проблема).
- 3) Деление угла на три равные части.

Все эти задачи, как было доказано лишь в XIX в., *неразрешимы* с помощью циркуля и линейки.

Вслед за предложением 9 естественно ожидать другое, если не о делении угла на n равных частей, то о делении на 3, 4, 5, 7 частей. Правда, такое предложение являлось бы неиспользованным для основной цели «Начал», – для построения платоновых тел; Евклида эта проблема, возможно, и не особенно интересовала. Но в дальнейшем, с приобретением геометрией большего практического значения, задача эта могла явиться не только предметом пустого математического спорта.

Практические методы трисекции, основанные на введении недопущенных у Евклида операций с линейкой или на свойствах шарнирных механизмов, изобретаются главным образом в сравнительно недавнее время, примерно в XVII столетии.

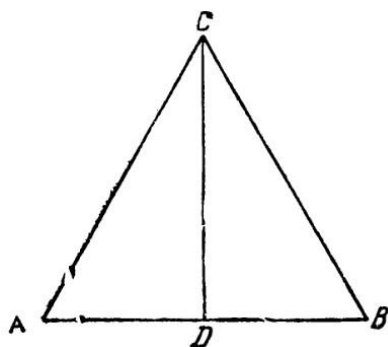
Наиболее простой приём состоит в употреблении линейки с масштабом MNP (черт. 11m), на которой откладывается отрезок PN, равный радиусу $r = ON$ – окружности, описанной из вершины O того угла MOA, который мы желаем разделить на три части. Будем двигать линейку MNP так, чтобы точка P скользила по продолжению стороны OA, а сама линейка всё время проходила бы через точку M. Точка N в некоторый момент окажется на окружности AMN; тогда угол NPO, как нетрудно видеть, и будет искомым, равный одной трети угла MOA. Действительно, по свойству равнобедренного треугольника угол NOP будет равен углу NPO = α ; далее, угол MNO, как внешний по отношению к треугольнику NPO, будет равен сумме углов P и O, т.е. 2α ; затем в треугольнике OMN угол N = 2α будет равен углу M и, наконец, угол AOM, внешний по отношению к треугольнику OMP, будет равен сумме углов OMP и MPO, т.е. $2\alpha + \alpha = 3\alpha$.



Черт. 11m.

¹⁴⁰ См. Zeuthen, Om Konstruktions Existensbevis in den Græske Mathematik, Nyt Tidskrift for Mathematik. – Цейтен. История математики в древности и в средние века, М.–Л., 1932; и Рудин, О квадратуре круга, М.–Л., 1934.

§17. Предложение 10



Черт. 10е.

Данную ограниченную¹⁴¹ прямую рассечь пополам.

Пусть данная ограниченная прямая будет АВ; требуется ограниченную прямую АВ рассечь пополам (черт. 10е).

Построим на ней равносторонний треугольник АВС (предложение 1) и рассечём угол АСВ пополам прямой CD (предложение 9); я утверждаю, что прямая АВ пересекается пополам в точке D.

Действительно, поскольку АС равно СВ, а CD общая, вот две стороны АС и CD равны двум сторонам ВС и CD каждая каждой; и угол АСD равен углу ВСD; значит и основание AD равно основанию BD (предложение 4).

Значит, данная ограниченная прямая АВ рассечена в точке D пополам, что и требовалось сделать (42).

§17.1. Комментарий Д.Д. Мордухай-Болтовского

42. Деление отрезка пополам. Относительно этого построения надо сделать то же замечание, что и относительно предыдущего предложения. Тот факт, что Евклид строит на АВ равносторонний треугольник, находит себе объяснение в правильном понимании постулата 3.

Почему Евклид ставит это построение в зависимость от деления угла пополам?

Он мог бы построить с другой стороны равносторонний треугольник АВЕ и, соединив вершины С и Е прямой, получить D в точке пересечения этой прямой с АВ.

Но по существу построение АВЕ и соединение Е с С прямой и сводится к делению угла АСВ пополам на основании предложения 9; если бы он не ссылаясь на это построение, то ему пришлось бы доказывать равенство треугольников АСЕ и АВЕ, как оно уже доказано в предложении 9.

§18. Предложение 11

К данной прямой из заданной на ней точки провести прямую под прямыми углами.¹⁴²

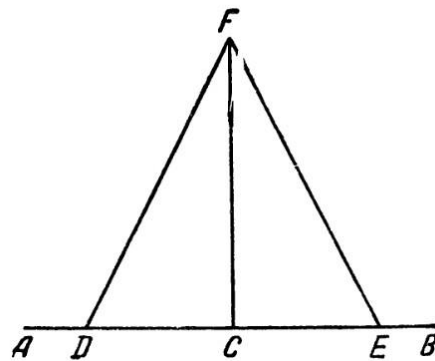
Пусть данная прямая будет АВ, а заданная на ней точка С. Требуется вот из точки С к прямой АВ провести прямую под прямыми углами (черт. 11е).

Возьмём на АС произвольную точку D, отложим СЕ, равную CD (предложение 3), построим на DE равносторонний треугольник FDE (предложение 1) и соединим FC. Я утверждаю, что к данной прямой АВ из заданной на ней точки С под прямыми углами проведена прямая FC.

Действительно, поскольку DC равна CE, а CF общая, вот две <стороны> DC, CF равны двум EC и CF, каждая каждой; и основание DF равно основанию FE; значит, угол DCF равен ECF (предложение 8) и они смежны.

Если же прямая, восставленная на прямой, образует смежные равные между собой углы, то каждый из равных углов будет прямым (определение 10); значит, каждый из углов DCF и FCE прямой.

Значит, к данной прямой АВ из заданной на ней точки С под прямыми углами проведена прямая FC, что и требовалось сделать (43, 44, 45).



Черт. 11е.

§18.1. Комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского

43. Восстановление перпендикуляра. Ссылка Гейберга на предложение 3 (в начале доказательства) является излишней: операция отложения отрезков $CE = CD$ с помощью описания

¹⁴¹ πεπερασμένη – лучше сказать «ограниченная», чем «конечная».

¹⁴² Слова, отвечающего перпендикуляру, у Евклида нет. В предложении 11 он говорит: πρὸς ὀρθὰς γωνίας – под прямыми углами, а в 12-м χαθὲτον εὐθείαν – отвесную прямую. Из последнего термина произошёл и наш «катет».

окружности из C , как из центра, входит как составная часть в доказательство предложения 2. Построение равностороннего треугольника объясняется опять истинным смыслом постулата 3.

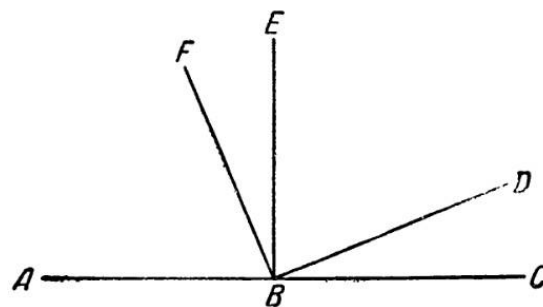
Из описанного предложения вытекает (интересно, что сам Евклид этого не подчёркивает) единственность перпендикуляра, который можно восставить к прямой из заданной её точки.

Некоторые комментаторы старались извлечь из этого предложения доказательство того, что две прямые не могут иметь общего отрезка, и отсюда доказать, что две точки определяют одну и только одну прямую.

Они рассуждали так: если бы одна прямая шла по BC , другая по BD , то, проведя перпендикуляр BE к AB , по определению прямого угла, мы получили бы, что $\angle EBD = \angle EBC$, т.е. часть равна целому (черт. 12m).

На это возражали, что из предложения 11 следует, что существует один перпендикуляр не к отрезку AB , а ко всей прямой ABC и что можно ожидать для ABC и DBA различных перпендикуляров.

Конечно, из того, что все прямые углы равны (постулат 4), следует, что существует только один перпендикуляр, и обратно – из того, что всего существует только один перпендикуляр, следует, что все прямые углы равны. Но Евклиду нужна *построяемость*, являющаяся для него критерием существования, и он доказывает здесь существование перпендикуляра в своём смысле.



Черт. 12m.

Построение Евклида даёт только один перпендикуляр. Весьма вероятно, что этот результат формулировался так, что существует только один перпендикуляр и что не мыслилась возможность других построений, дающих перпендикуляр. Постулат 4 о равенстве прямых углов должен был явиться позже, когда возникла эта мысль. Но эта мысль должна была повести от евклидовой точки зрения к лежандровой¹⁴³ – к возможности существования какого-нибудь построения и, наконец, к существованию независимо от построения, потому что единственность решения выводится из единственности существования.

44. Перпендикуляр в середине отрезка. В современной геометрии большую роль играет понятие геометрического места; у Евклида этого понятия нет.

Перпендикуляр в середине C отрезка DE он не рассматривает как геометрическое место точек, равноотстоящих от D и E ; это свойство равноудалённости точек перпендикуляра от D , E ему не приходит в голову, так как он употребляет *не наше общее построение, а своё частное*.

В истории геометрического учебника это свойство перпендикуляра в середине отрезка сыграло кардинальную роль.

Борьба с методом наложения и выработка нового неевклидовского порядка теорем привела к употреблению особой аксиомы, выдвинутой впервые Арно.

Если две точки прямой CF равноудалены от D и E , то то же относится и к другим точкам на CF .¹⁴⁴

45. Арнольд-ианский порядок геометрии.¹⁴⁵ В истории геометрического учебника очень большую роль сыграла книга знаменитого главы янсенистов и одного из авторов Порт-Роялевской логики – Арно (Arnauld). Его книга никогда не служила учебником, но влияние её сказывается на всех долежандровских геометрических учебниках, и более того, на известном «Руководстве» Остроградского,¹⁴⁶ находившегося больше под влиянием старых французских учебников, чем Лежандра.

В арнольд-ианском порядке изложения равенство треугольников как фигур, более сложных, чем углы и параллельные, отодвигается возможно дальше. Следует отметить, что и в некоторых современных учебниках лежандра типа теория параллельных предшествует равенству треугольников. Порядок этот поддерживается несколько искусственно с помощью изменения

¹⁴³ См. Legendre, *Éléments de Géométrie*. 1794. Есть русский перевод 1837.

¹⁴⁴ См. Arnauld, *Nouveaux éléments de Géométrie*, Paris, 1687.

¹⁴⁵ Арнольд-ианский порядок в учебниках: Lamy, *Elements de Geometrie*, Paris, 1735. – Sauveur, *Geometrie theoretique et pratique*, Paris, 1753. – Rivard, *Elements des Mathematiques*, Paris, 1758.

¹⁴⁶ Остроградский, *Руководство к геометрии для военных учебных заведений*, СПб, 1855.

формулировки. Остроградский формулирует положение Арно так: «Когда Вы встретите на боках двух равных углов BAC и DEF части AB и ED , AC и EF соответственно равные, то необходимо допустить равенство линий, соединяющих в каждом угле концы этих частей». Это (правда, *не полное*) положение о равенстве треугольников (но без употребления термина треугольник).

Для проведения всего плана Арно и приходится принимать свою аксиому, которая затем имеет очень интересную историю.

§19. Предложение 12

К данной неограниченной прямой из заданной точки, на ней не находящейся, провести перпендикулярную прямую линию.¹⁴⁷

Пусть данная неограниченная прямая есть AB , а данная не находящаяся на ней точка C . Вот требуется к данной неограниченной прямой AB из данной не находящейся на ней точки C провести перпендикулярную прямую линию (черт. 12е).

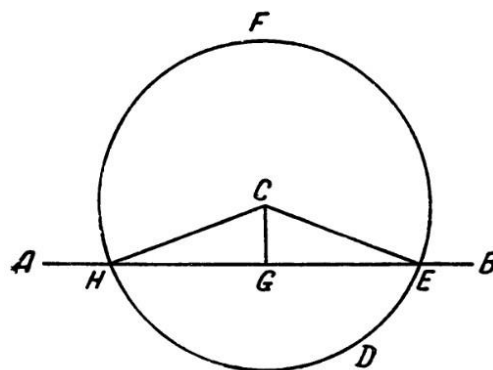
Возьмём по другую сторону прямой AB какую-нибудь точку D , из центра C раствором CD опишем круг EFH (постулат 3); прямую EH рассечём пополам в точке G (предложение 10) и соединим CH , CG , CE (постулат 1).

Я утверждаю, что к данной неограниченной прямой AB из данной не находящейся на ней точки C проведена перпендикулярная прямая CG .

Действительно, поскольку HG равно GE , а GC – общая сторона, вот две стороны HG , GC равны двум EG и GC каждой; и основание CH равно основанию CE (определение 15); значит, и угол CGH будет равен углу EGC (предложение 8), и они смежные.

Если же прямая, восставленная на прямой, образует равные между собой смежные углы, то каждый из равных углов прямой, и восставленная прямая называется перпендикулярной к той, на которой она восставлена (определение 10).

Значит, к данной неограниченной прямой AB из заданной на ней не находящейся точки C проведена перпендикулярная прямая CG ; это и следовало сделать.



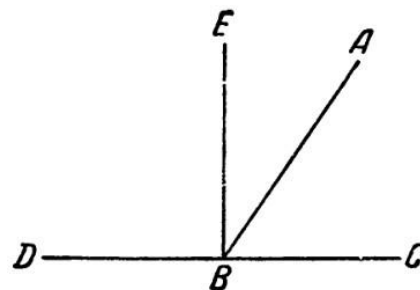
Черт. 12е.

§20. Предложение 13

Если прямая, восставленная на прямой, образует углы, то она будет образовывать или два прямых или <вместе> равные двум прямым.¹⁴⁸

Пусть какая-нибудь прямая AB , восставленная на прямой CD , образует углы CBA ¹⁴⁹ и ABD . Я утверждаю, что углы CBA и ABD или прямые или <вместе> равны двум прямым (черт. 13е).

Теперь, если CBA равен ABD , то они суть два прямых. Если же нет, то проведём из точки B под прямыми углами [к прямой] CD прямую BE ; значит, углы CBE , EBD – два прямых; и поскольку CBE равен двум CBA , ABE , то прибавим общий угол EBD ; значит, углы CBE , EBD равны трём углам CBA , ABE , EBD . Далее, поскольку DBA равен двум DBE , EBA , то прибавим общий ABC ; значит, углы DBA , ABC равны трём DBE , EBA , ABC (аксиома 2). Но и углы CBE , EBD оказались равными тем же самым трём; равные же одному и тому же равны и между собой; и значит,



Черт. 13е.

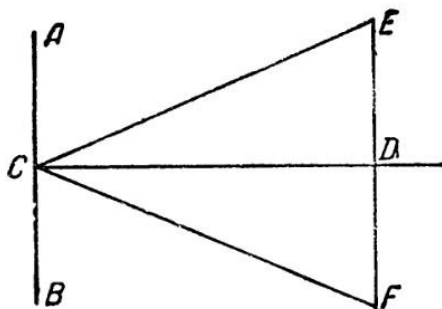
¹⁴⁷ Данное в этом предложении решение задачи приписывается Проклом Энопиду Хиосскому (геометр V века до н.э.).

¹⁴⁸ У Евклида $\deltaυσὶν ὀρθαῖς ἴσας$. Было бы очень вольно перевести «в сумме двум прямым». Мы переводим «вместе», чтобы избежать возможного недоразумения, что каждый из углов прямой.

¹⁴⁹ У Евклида угол обозначается не просто $ГВА$, но $ὀλό ΓΒΑ$ – под $ГВА$, т.е. угол, образованный прямыми $ГВ$ и $ВА$.

углы CBE, EBD равны DBA, ABC; но CBE, EBD суть два прямых; и значит, DBA, ABC <вместе> равны двум прямым.

Значит, если прямая, восставленная на прямой, образует углы, то она будет образовывать или два прямых или <вместе> равные двум прямым, что и требовалось доказать (46).



Черт. 13m.

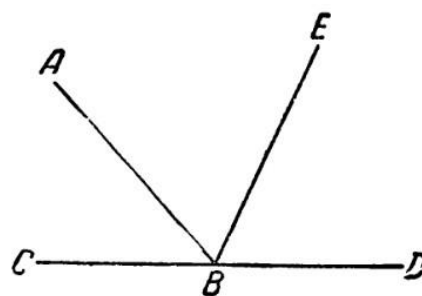
§20.1. Комментарий Д.Д. Мордухай-Болтовского

46. Королларий Симсона. Из предложения 13 Симсон¹⁵⁰ выводит, что прямые не могут иметь общего отрезка. Если бы одна прямая шла по BD, а другая по BE, то так как сумма ABC и CBD, а также ABC и CBE равняются каждая двум прямым, то $\angle ABE$ оказался бы равным $\angle ABD$, т.е. часть равной целому (аксиома 8) (черт. 13m).

§21. Предложение 14

Если с некоторой прямой в какой-нибудь её точке две прямые, расположенные не по одну и ту же сторону, образуют смежные углы, равные <вместе> двум прямым, то эти прямые по отношению друг к другу будут по одной прямой.¹⁵¹

Действительно, пусть с некоторой прямой AB в какой-нибудь её точке B две прямые BC, BD, расположенные не по одну и ту же сторону, образуют смежные углы ABC, ABD, равные <вместе> двум прямым; я утверждаю, что BD будет по одной прямой с BC.



Черт. 14e.

Действительно, если BD не будет по одной прямой с BC, то пусть по прямой с BC будет BE.

Поскольку теперь прямая AB восставлена на прямой CBE, то, следовательно, углы ABC, ABE равны двум прямым (предложение 13); но и углы ABC, ABD равны двум прямым; значит, углы CBA, ABE равны углам CBA, ABD. Отнимем общий угол CBA; значит, оставшийся угол ABE равен оставшемуся ABD, меньший большему; это же невозможно. Значит, BE не будет по прямой с BC. Подобным вот образом докажем, что <не будет> и никакая другая, кроме BD; значит, CB будет по прямой с BD.

Значит, если с некоторой прямой в какой-нибудь её точке две прямые, расположенные не по одну и ту же сторону, образуют смежные углы, равные <вместе> двум прямым, то эти прямые по отношению друг к другу будут по одной прямой, что и требовалось доказать (47).

§21.1. Комментарий Д.Д. Мордухай-Болтовского

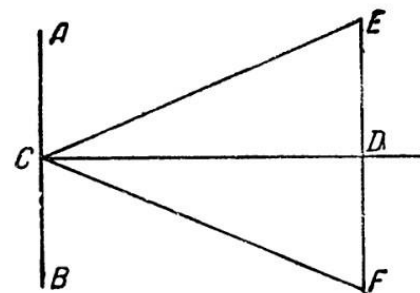
47. Знак угла. Предложение 14 интересно в том отношении, что здесь впервые приходится различать углы с различных сторон.

Угол здесь является не просто наклоном, но наклоном *в ту или другую сторону*; такие углы могут быть равны, но не являются оба одним и тем же углом.

При введении в геометрию положительных и отрицательных величин эти углы приобретают различные знаки и перестают быть равными. Порфирий, по свидетельству Прокла, подчёркивая ограничение, что углы берутся с противоположных сторон, указывал, что теорема не верна, если снять это ограничение.

Я ограничиваюсь чертежом, из которого читатель сам легко усмотрит построение Порфирия (черт. 14m).

Здесь $\angle ACF + \angle ACE = 2d$, но оба угла лежат по одну сторону прямой ACB, и EC не составляет продолжения CF.



Черт. 14m.

¹⁵⁰ R. Simson, Euclidis elementorum libri priores sex item undecima et duodecima, Glasgae, 1756.

¹⁵¹ У Евклида ἐπ' εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθείαι – прямые будут между собой «по прямой».

§22. Предложение 15

Если две прямые пересекаются, то образуют углы через вершину,¹⁵² равные между собой.

Действительно, пусть две прямые AB, CD пересекаются в точке E.

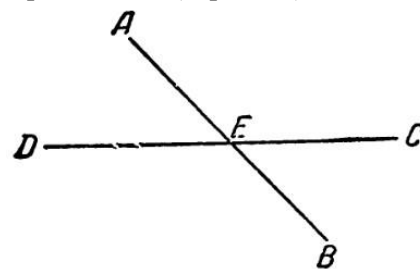
Я утверждаю, что угол AEC равен углу DEB, угол же CEB равен AED (черт. 15e).

Действительно, поскольку прямая AE, восставленная на прямой CD, образует углы CEA и AED, то значит, углы CEA и AED вместе равны двум прямым (предложение 13). Далее, поскольку прямая DE, восставленная на прямой AB, образует углы AED и DEB, то, значит, углы AED и DEB вместе равны двум прямым (предложение 13).

Но и углы CEA и AED оказались равными двум прямым; значит, углы CEA и AED равны AED и DEB. Отнимем общий угол AED; значит, остаток CEA равен остатку DEB (аксиома 3). Подобным вот образом будет доказано, что и углы CEB и DEA равны.

Значит, если две прямые пересекаются, то образуют углы через вершину, равные между собой, что и требовалось доказать (48).

[Следствие. Из этого ясно, что если две прямые пересекают друг друга, то они при пересечении будут образовывать углы, равные вместе четырём прямым.¹⁵³]



Черт. 15e.

§22.1. Комментарий Д.Д. Мордухай-Болтовского

48. Обратные теоремы. Обратной теоремой в отношении данной называется такая, для которой условие данной служит заключением, а заключение является условием.

Для положения: если есть А, то будет В, обратным будет: если есть В, то будет и А.

Но при задании нескольких условий возможно несколько обратных положений. Для положения: если есть А и В, то будет и С, обратными являются: если есть А и С, то будет и В, и если есть В и С, то будет и А.

Так это и имеет место для предложения 15 о вертикальных углах: Прокл¹⁵⁴ доказывает следующее обратное ему предложение.

Если две прямые, сходящиеся к той же точке на третьей прямой, образуют с третьей равные углы, взятые с противоположных сторон, то они имеют то же направление, т.е. если $\angle AEC = \angle BED$, то DE и EC образуют одну прямую.

Пелетье же даёт другое обращение.¹⁵⁵

Если четыре прямые, исходящие из одной точки, образуют равные противоположные углы, то противоположные прямые имеют то же направление, т.е. если $\angle AEC = \angle BED$ и $\angle DEA = \angle BEC$, то DE и EC, BE и EA образуют одну прямую.

§23. Предложение 16

Во всяком треугольнике при продолжении одной из сторон внешний угол больше каждого из внутренних, <ему> противолежащих.

Пусть треугольник будет ABC и пусть одна его сторона BC будет продолжена до D. Я утверждаю, что внешний угол ACD больше каждого из внутренних противолежащих углов CBA и BAC.

Рассечём AC пополам в E и соединяющую BE продолжим по прямой до F; отложим EF, равную BE (предложение 3), соединим FC и проведём AC до H (черт. 16e).

¹⁵² У Евклида *χάτὰ χορυφήν* соответствует нашим «вертикальным» углам. Специального определения этого термина у Евклида нет. Согласно Евдему, доказываемая теорема принадлежит Фалесу.

¹⁵³ Это следствие (*πόρισμα*), имеющееся не во всех рукописях Евклида, Гейберг считает позднейшей вставкой.

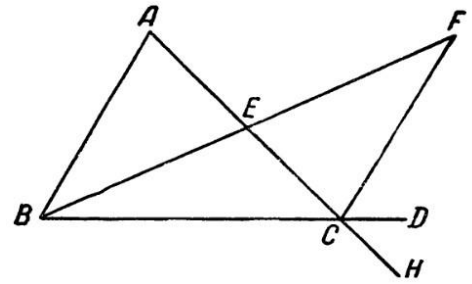
¹⁵⁴ Procli, *Diadochi in primum Euclidis elementorum librum Commentarium*, bearb. Friedlein, Leipzig, 1873. Старое издание Barocius'a, Padova, 1560. – О Прокле см. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, т. I, стр. 463. – Hartmann, *Des Proclus Diadochus Philos. Anfangsgründe der Mathematik*. Philos. Abhandlungen, herausg. Rohn und Natorp, 1 тетр. Giessen, 1909.

¹⁵⁵ Peletarius, *In Euclidis geometrica demonstrationum libri sex*, Lugduni, 1557.

Поскольку теперь AE равна EC , а BE равна EF и вот две <стороны> AE , EB равны двум CE , EF каждой; и угол AEB равен углу EEC , ибо <он расположен> через вершину (предложение 15). Значит, и основание AB равно основанию FC , и треугольник ABE равен треугольнику FEC , и остальные углы равны каждый каждому остальным углам, стягиваемым равными сторонами (предложение 4); значит, угол BAE равен углу ECF .

Но угол ECD больше угла ECF (аксиома 8); значит, угол ACD больше BAE . Таким же образом, <если> разделить BC пополам, будет доказано, что и угол BCN , т.е. ACD (предложение 15), больше ABC .

Значит, во всяком треугольнике при продолжении одной из сторон внешний угол больше каждого из внутренних противолежащих, что и требовалось доказать.



Черт. 16е.

Часть 3. Предложения 17 – 32

§24. Предложение 17

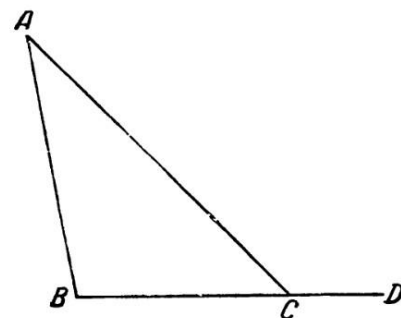
Во всяком треугольнике два угла, взятые вместе при всяком их выборе, меньше двух прямых.

Пусть треугольник будет ABC; я утверждаю, что в треугольнике ABC два угла, взятые вместе при всяком их выборе, меньше двух прямых (черт. 17e).

Действительно, продолжим BC до D (постулат 2).

И поскольку в треугольнике ABC угол ACD внешний, то он больше внутреннего противолежащего ABC (предложение 16). Прибавим общий угол ACB; значит, ACD и ACB <вместе> больше, чем ABC и BCA (аксиома 4). Но ACD и ACB <вместе> равны двум прямым (предложение 13); значит, ABC и BCA меньше двух прямых. Таким же образом докажем, что и углы BAC, ACB меньше двух прямых, и также углы CAB, ABC.

Значит, во всяком треугольнике два угла, взятые при всяком их выборе, меньше двух прямых, что и требовалось доказать.



Черт. 17e.

§25. Предложение 18

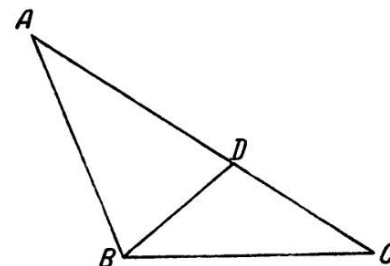
Во всяком треугольнике большая сторона стягивает больший угол.

Пусть треугольник будет ABC, имеющий сторону AC, большую чем AB. Я утверждаю, что и угол ABC больше угла BCA (черт. 18e).

Действительно, поскольку AC больше, чем AB, отложим AD, равную AB, и соединим BD.

И поскольку в треугольнике BCD угол ADB внешний, то он больше внутреннего ему противолежащего DCB (предложение 16). Но угол ADB равен углу ABD, поскольку и сторона AB равна AD (предложение 5); значит, и угол ABD больше ACB; значит, и подално угол ABC больше ACB (аксиома 8).

Значит, во всяком треугольнике большая сторона стягивает больший угол, что и требовалось доказать (49).



Черт. 18e.

§25.1. Комментарий Д.Д. Мордухай-Болтовского

49. Теорема Гаубера. Основные логические аксиомы, — тождества, противоречия и исключённого третьего, — на которых зиждятся силлогизмы, входят наряду с математическими аксиомами в логическое построение математики. В ряде умозаключений вводятся также и *чисто логические теоремы*.

Примером можно выставить доказательство некоторых обратных теорем геометрии с помощью теоремы Гаубера.¹⁵⁶

Эта теорема состоит в следующем: если установлено несколько теорем, условия которых

$n, n', n'', \dots$

обнимают все возможные случаи, а заключения которых $s, s', s'', \dots$ несовместны, то все обратные теоремы верны: из s вытекает n , из $s' \rightarrow n'$, из $s'' \rightarrow n''$ и т.д.

Доказательство. Предположим, что при s не может иметь место n : тогда должны иметь место $n', n'', \dots$, ибо это по условию нашему единственно возможные гипотезы. Но, если выполнено n' , то из этого предположения следует s' , так что рядом с s имеет место и s' ; это же в силу несовместности s и s' быть не может.

¹⁵⁶ Pfleiderer, Scholien zu Euclidis Elementen; тетр. 1, Stuttgart, 1827, стр. 63.

Эта логическая теорема применима к доказательству геометрических теорем и упрощает их.

Примером могут служить как раз предложения 18 и 19 книги I «Начал».

Условиями являются соотношения сторон:

$$AC > AB, AC < AB, AC = AB;$$

заключения:

$$\angle B > \angle C, \angle B < \angle C, \angle B = \angle C.$$

Условия, конечно, единственно возможные.

Заключения, конечно, несовместны. Поэтому на основании теоремы Гаубера сейчас же выводим, что при

$$\angle B > \angle C \rightarrow AC > AB, \text{ (предложение 19 книги I)}$$

$$\angle B < \angle C \rightarrow AC < AB, \text{ (предложение 19 книги I)}$$

$$\angle B = \angle C \rightarrow AC = AB, \text{ (предложение 6 книги I)}$$

§26. Предложение 19

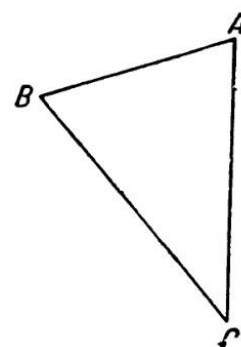
Во всяком треугольнике больший угол стягивается и большей стороной.

Пусть треугольник будет ABC, имеющий угол ABC, больший угла BCA. Я утверждаю, что и сторона AC больше стороны AB (черт. 19e).

Действительно, если это не так, то AC или равна AB или меньше. Но теперь AC не равна AB, ибо тогда и угол ABC был бы равен ACB (предложение 5); но он не <равен>. Значит, AC не равна AB. Но также AC и не меньше AB, ибо тогда и угол ABC был бы меньше ACB (предложение 18). Но он не <меньше>; значит, AC не меньше AB.

Доказано же, что <AC> и не равна <AB>; значит, AC больше AB.

Значит, во всяком треугольнике больший угол стягивается и большей стороной, что и требовалось доказать (50).



Черт. 19e.

§26.1. Комментарий Д.Д. Мордухай-Болтовского

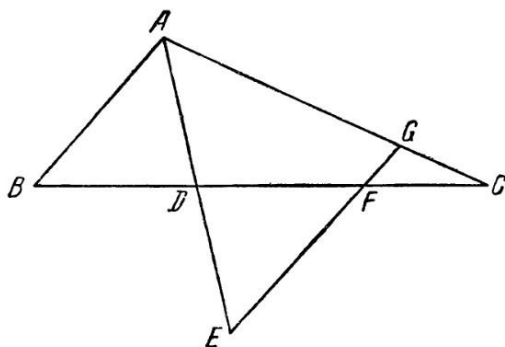
50. Выпрямление доказательства. Предложение 19 очень просто доказывается апагогически. Комментаторы задавались целью дать прямое доказательство.

Оно оказалось довольно сложным. Мы приведём его главным образом потому, что в основе его лежит интересная лемма, которая используется и в других случаях.

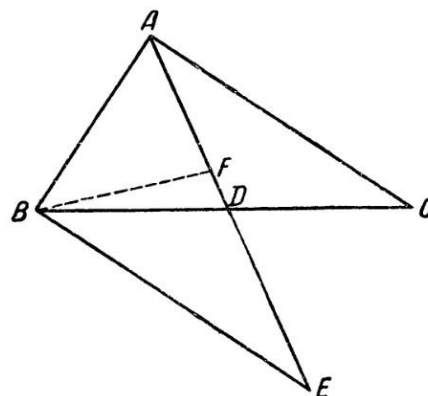
Если угол BAC треугольника ABC делится пополам прямой AD, которая пересекает противоположную сторону BC на отрезки BD и DC, то к меньшему отрезку BD прилежит меньшая сторона AB, а к большему DC большая AC (черт. 15m).

Доказывается лемма так: продолжается прямая AD на отрезок DE = AD и откладывается DF = BD.

Соединяем E с F прямой EG.



Черт. 15m.



Черт. 16m.

Нетрудно доказать равенство треугольников ABD и DEF и равенство углов BAD и DEF; вспомнив, что AD биссектриса, докажем, что $\triangle AEG$ равнобедренный и $AG = GE$.

Но $AC > AG$, $AG = GE > AB$ и потому $AC > AB$.

Чтобы доказать с помощью этой леммы, что при $\angle ABC > \angle ACB$ и $AC > AB$ (черт. 16м), доказываем сначала, что треугольники BDE и ADC (если $BD = DC$ и $AD = DE$) будут равны, затем, что биссектриса BF угла ABE пойдёт внутри ABD, так как $\angle EBD = \angle ACB < \angle ABC$, и потому отрезок $FE > AF$. Отсюда же на основании отмеченной выше леммы получаем, что

$$BE = AC > AB.$$

Нетрудно *анагогически* обратить вышеупомянутую лемму, т.е. доказать, что если AD биссектриса угла BAC, то при $AB < AC$ и $BD < DC$, т.е. к меньшей стороне прилегает меньший отрезок, к большей стороне – больший.

§27. Предложение 20

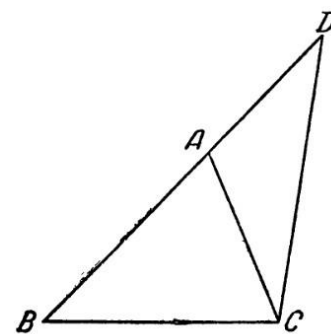
Во всяком треугольнике две стороны, взятые вместе при всяком их выборе, больше оставшейся.

Пусть треугольник будет ABC. Я утверждаю, что в треугольнике ABC две стороны, взятые вместе при всяком их выборе, больше третьей, а именно, BA и AC больше BC, AB и BC больше AC, BC и CA больше AB (черт. 20е).

Действительно, проведём BA до точки D, отложим AD, равную CA (предложение 3), и соединим DC.

Поскольку теперь DA равна AC, то и угол ADC равен углу ACD (предложение 5); значит, угол BCD больше угла ADC (аксиома 8); и поскольку треугольник DCB имеет угол BCD больше угла BDC, а больший угол стягивается и большей стороной, значит, DB больше BC (предложение 19). Но DA равна AC; значит, BA и AC <вместе> больше BC; подобным вот образом докажем, что и AB и BC <вместе> больше CA, а BC и CA <вместе> больше AB.

Значит, во всяком треугольнике две стороны, взятые вместе при всяком их выборе, больше, чем третья; это и требовалось доказать (51).



Черт. 20е.

§27.1. Комментарий Д.Д. Мордухай-Болтовского

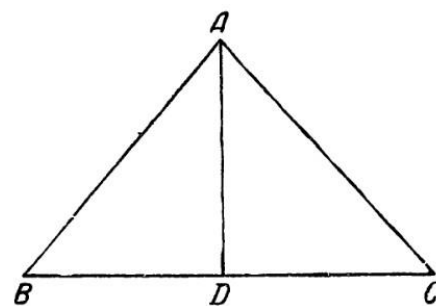
51. Прямая как кратчайшая линия между точками. Эту же теорему по свидетельству Прокла Герон и Порфирий доказывают иначе (черт. 17м).

Угол BAC в треугольнике ABC делится пополам прямой AD.

Внешний угол ADB треугольника BAC больше, чем угол DAC. Но при построении $\angle DAC = \angle BAD$, поэтому в треугольнике BAD $\angle ADB > \angle BAD$. Но против большего угла лежит большая сторона, поэтому $BA > BD$. Так же доказываем, что $AC > DC$, поэтому окончательно $BA + AC > BD + DC = BC$.

Архимед, а за ним Лежандр обращают это положение в *определение прямой*, которая оказывается кратчайшей линией между двумя точками.

Многим положение это представлялось совершенно очевидной истиной. Прокл говорит, что эпикурейские математики считали смешным доказывать такое положение, так как его прекрасно знает осёл, идущий по прямой линии к сену.



Черт. 17м.

§28. Предложение 21

Если в треугольнике на одной из сторон от концов восстановлены будут внутрь две прямые, то восстановленные прямые (вместе) будут меньше двух остальных сторон треугольника, но будут заключать больший угол.

Действительно, пусть в треугольнике ABC на одной из сторон BC будут от концов B, C восстановлены внутрь две прямые BD и DC; я утверждаю, что BD и DC <вместе> меньше

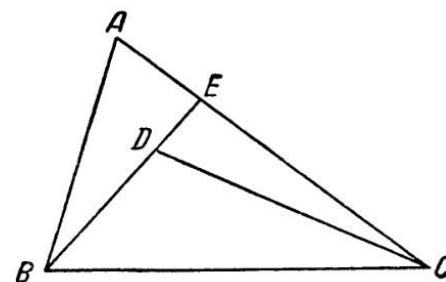
остальных двух сторон треугольника BA и AC , но заключают угол BDC , больший, чем BAC (черт. 21е).

Действительно, проведём BD до E . И поскольку во всяком треугольнике две стороны <вместе> больше оставшейся (предложение 20), то значит, в треугольнике ABE две стороны AB и AE больше BE ; прибавим общую прямую EC ; значит, BA и AC <вместе> больше BE и EC (аксиома 4). Далее, поскольку в треугольнике CED две стороны CE и ED <вместе> больше CD , то прибавим общую DB ; значит, CE и EB больше CD и DB .

Но BA и AC по доказанному больше, чем BE и EC ; значит, и подавно BA и AC больше BD и DC .

Далее, поскольку во всяком треугольнике внешний угол больше внутреннего и противолежащего (предложение 16), то значит, в треугольнике CDE внешний угол BDC больше CED . Вследствие того же тогда и в треугольнике ABE внешний угол CEB больше BAC . Но угол BDC по доказанному больше CEB ; значит, и подавно BDC больше BAC .

Значит, если в треугольнике на одной из сторон от концов восставлены будут внутри две прямые, то восставленные прямые <вместе> меньше двух остальных сторон треугольника, но заключают больший угол, что и требовалось доказать.



Черт. 21е.

§29. Предложение 22

Из трёх прямых, которые равны трём данным [прямым], составить треугольник; нужно, однако, чтобы две <прямые, взятые, вместе>, при всяком их выборе были бы больше оставшейся [вследствие того, что во всяком треугольнике две стороны, <взятые вместе> при всяком их выборе, больше оставшейся].

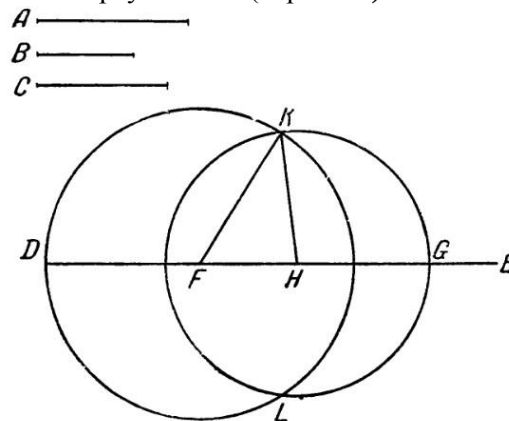
Пусть три данные прямые будут A, B, C , из них две <взятые вместе> при всяком их выборе пусть будут больше оставшейся, а именно, A и B больше C ; A и C больше B , и затем B и C больше A ; требуется вот из прямых, равных A, B, C , составить треугольник (черт. 22е).

Проведём какую-нибудь прямую DE , ограниченную в D и не ограниченную в сторону E , и отложим DF , равную A , затем FH , равную B , и HG , равную C (предложение 3); и из центра F раствором FD опишем круг DKL (постулат 3); затем из центра H раствором HG опишем круг KLG (постулат 3) и соединим KF и KH . Я утверждаю, что из трёх прямых, равных A, B, C , составлен треугольник KFH .

Действительно, поскольку точка F – центр круга DKL , то FD равна FK (определение 15); но FD равна A . И, значит, KF равна A (аксиома 1).

Затем, поскольку точка H – центр круга LKG , то HG равна HK (определение 15); но HG равна C (аксиома 1); значит, и KH равна C . Но и FH равна B ; значит, три прямые KF, FH и HK равны трём прямым A, B, C .

Значит, из трёх прямых KF, FH, HK , которые равны трём заданным прямым A, B, C , составлен треугольник KFH , что и требовалось сделать (52).



Черт. 22е.

§29.1. Комментарий Д.Д. Мордухай-Болтовского

52. Построение треугольника по трём сторонам. Построение отличается от современного тем, что совершается операция предложения 2 – перенос заданных отрезков на прямую. Кроме того, не исследуется условие возможности пересечения проводимых кругов, которое сводится к тому, что сумма двух заданных сторон больше третьей, а разность меньше, хотя в формулировке предложения об этом упоминается.

§30. Предложение 23

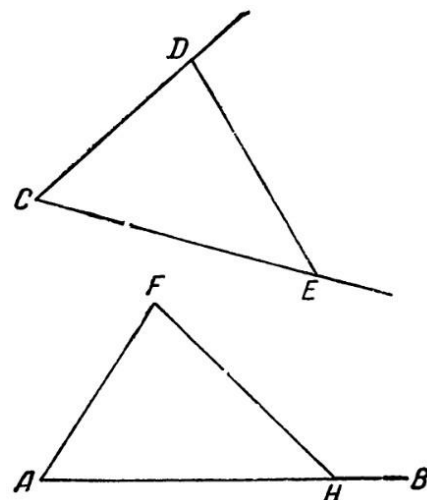
На данной прямой при данной её точке построить прямолинейный угол, равный данному прямолинейному углу.

Пусть данная прямая будет AB , точка же на ней A и заданный прямолинейный угол DCE ; требуется вот на данной прямой AB , при точке её A , построить прямолинейный угол, равный данному (черт. 23е) прямолинейному, углу DCE .

Возьмём на каждой из прямых CD и CE какие-нибудь точки D и E и соединим DE ; и из трёх прямых, которые равны трём CD , DE , CE , составим треугольник AHN (предложение 22), так, чтобы CD была равна AF , CE равна AN и затем DE равна HN (предложение 22).

Поскольку теперь две прямые DC , CE равны двум прямым FA и AN каждая каждой, и основание DE равно основанию HN , то, значит, угол DCE будет равен углу FAH (предложение 8).

Значит, на данной прямой AB при точке её A построен прямолинейный угол FAH , равный данному прямолинейному углу DCE , что и требовалось сделать (53).



Черт. 23е.

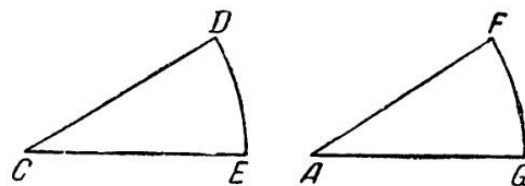
§30.1. Комментарий Д.Д. Мордухай-Болтовского

53. Перенос угла. На основании сказанного выше наш приём переноса угла для Евклида является неприемлемым.

Мы описываем окружность каким-либо радиусом из точки C и тем же радиусом из точки A . Затем засекаем на окружности дугу FG , описанную из точки G радиусом ED , и соединяем прямой с F (черт. 18м).

Евклид не считает себя в праве делать такой перенос отрезков. Он должен задать на CE и CD какие угодно отрезки, так как его построение не упрощается от того, что берутся равные отрезки CE и CD , но наоборот, осложняется, так как требует переноса CE на AG и ED на FG .

Это построение приписывается Энопиду Хиосскому.



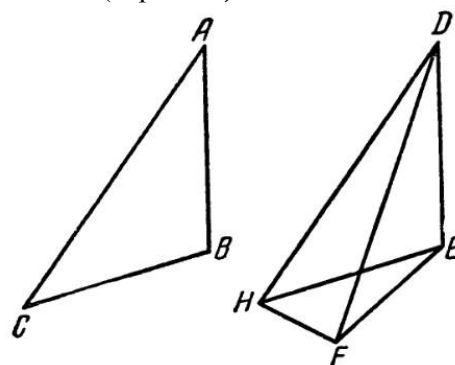
Черт. 18м.

§31. Предложение 24

Если два треугольника имеют две стороны, равные двум сторонам каждая каждой, но заключённый между равными сторонами угол <в одном> больше, <чем в другом>, то и основание <в первом> будет больше основания <во втором>.

Пусть ABC , DEF будут два треугольника, имеющих AB , AC , равные двум сторонам DE , DF каждая каждой, а именно, AB , равную DE , AC , равную DF , угол же при A пусть будет больше угла при D ; я утверждаю, что и основание BC больше основания EF (черт. 24е).

Действительно, поскольку угол BAC больше угла EDF , построим на прямой DE при точке её D угол EDH , равный углу BAC (предложение 23), отложим DH , равную каждой из AC и DF (предложение 3), и соединим EH и FN . Поскольку теперь AB равна DE , AC же DH , и вот две прямые BA , AC равны двум ED , DH каждая каждой; и угол BAC равен углу EDH ; значит, и основание BC равно основанию EH (предложение 4). Далее, поскольку DF равна DH , и угол DHF равен углу DFH (предложение 5); значит, угол DFH больше EFH ; значит, и подавно угол EFH больше ENF . И поскольку EFH есть треугольник, имеющий угол EFH больший,



Черт. 24е.

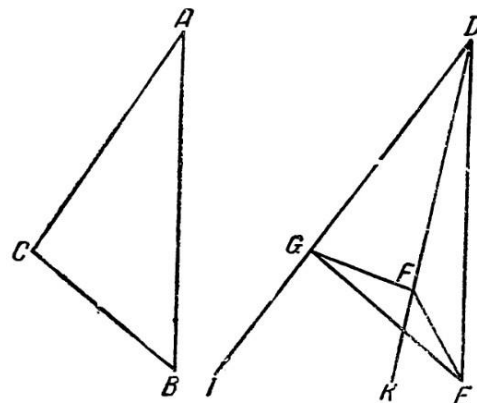
чем $\angle ENF$, больший же угол стягивает большая сторона (предложение 19), значит, и сторона $ЕН$ больше EF . Но $ЕН$ равна BC ; значит, и BC больше EF .

Значит, если два треугольника имеют две стороны, равные двум сторонам каждой каждой, заключённый же между равными сторонами угол <в одном> больше, <чем в другом>, то и основание <в первом> будет больше основания <во втором>, что и требовалось доказать (54).

§31.1. Комментарий Д.Д. Мордухай-Болтовского

54. Корректив Симсона к двадцать четвёртому предложению. Прокл, Кампанус, Командинус,¹⁵⁷ а также Р. Симсон отмечают неполноту евклидова доказательства: Евклид рассматривает только тот случай, когда BC оказывается внутри угла DEF . Но может случиться, что BC упадёт вне DEF ; тогда чертёж будет другой (черт. 19m).

Углы при основании в $\triangle DFG$ равны; следовательно, $\angle KFG = \angle IGF$ (по предложению 5). Но $\angle EFG > \angle KFG$ и потому $\angle EFG > \angle IGF$ и тем более $\angle EFG > \angle EGF$, откуда $EG = BC > EF$ (предложение 19).



Черт. 19m.

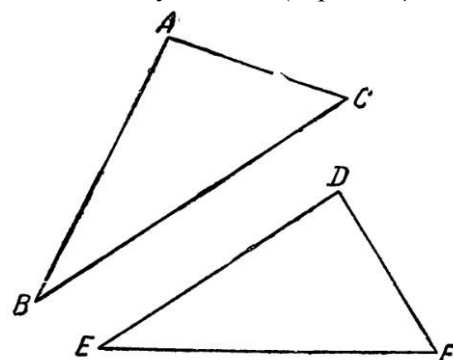
§32. Предложение 25

Если два треугольника имеют две стороны, равные двум сторонам каждой каждой, основание же <в одном> больше, чем основание <в другом>, то и угол, заключённый между равными прямыми <в первом>, больше угла <во втором>.

Пусть ABC , DEF будут два треугольника, имеющих две стороны AB , AC , равные двум сторонам DE , DF каждая каждой, а именно, AB , равную DE , и AC , равную DF ; основание же BC пусть будет больше основания EF ; я утверждаю, что и угол BAC больше угла EDF (черт. 25e).

Действительно, если это не так, то он или равен ему или меньше; но равным углу EDF угол BAC не будет; ибо <тогда> и основание BC было бы равно основанию EF (предложение 4); но оно не <равно>; значит, и угол BAC не равен углу EDF . Но также угол BAC не будет и меньше угла EDF ; ибо <тогда> и основание BC было бы меньше основания EF (предложение 24), но оно не <меньше>; значит, и угол BAC не меньше EDF . Но доказано, что он и не равен; значит, угол BAC больше угла EDF .

Значит, если два треугольника имеют две стороны, равные двум сторонам каждой каждой, основание же <в одном> больше, чем основание <в другом>, то и угол, заключённый между равными прямыми <в первом>, больше угла <во втором>, что и требовалось доказать (55).



Черт. 25e.

§32.1. Комментарий Д.Д. Мордухай-Болтовского

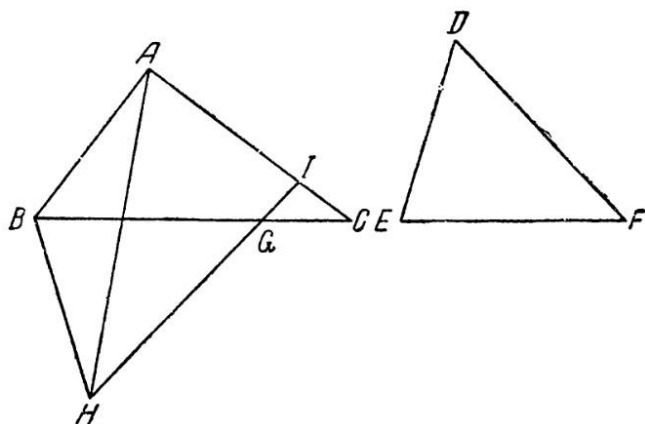
55. Прямое доказательство предложения 25. И здесь, как в случае предложения 19, можно дать прямое доказательство, что по свидетельству Прокла делает Менелай Александрийский.¹⁵⁸ Пусть в треугольниках ABC и DEF стороны $AB = DE$ и $AC = DF$, но $BC > EF$.

На основании $\triangle ABC$ откладывается $BG = EF$, затем строится $\angle GBH = \angle DEF$ и $BH = ED$ (черт. 20m).

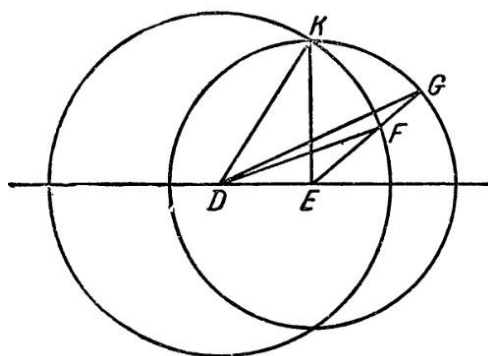
Затем проводится AH и HG до пересечения в I со стороной AC .

¹⁵⁷ О Кампанусе см. Cantor, Vorles., т. II. – Lamberti, Contenta Euclidis Megarensis geometricorum elementorum libri XV Campani Galli tran alpini in eosdem commentariorum libri XV. Parisii, 1516. О Командинусе см. Cantor, т. II, стр. 553. Commandini, Euclidis elementorum libri XV, Parisii, 1576. О Прокле и Р. Симсоне см. примечания выше.

¹⁵⁸ О Менелее см. Cantor, Vorles., т. I, стр. 385.



Черт. 20m.



Черт. 21m.

Тогда $\triangle DEF$ и $\triangle BGN$ равны; отсюда

$$\begin{aligned} HG &= DF = AC, \\ \angle GHB &= \angle EDF. \end{aligned}$$

Но $HI > HG = AC$ и $AC > AI$ и поэтому $HI > AI$, вследствие чего $\angle IAH > \angle IHA$.

Прибавляя к обеим частям неравенства $\angle BAH = \angle BHA$, получаем $\angle BAC > \angle BHG = \angle EDF$.

Прокл даёт ещё другое доказательство этой теоремы.

Предполагая, что $DE = AB$, $DF = AC$, он описывает из точек D, E окружности радиусов $DK = AC$ и $EK = CB$ (черт. 21m).

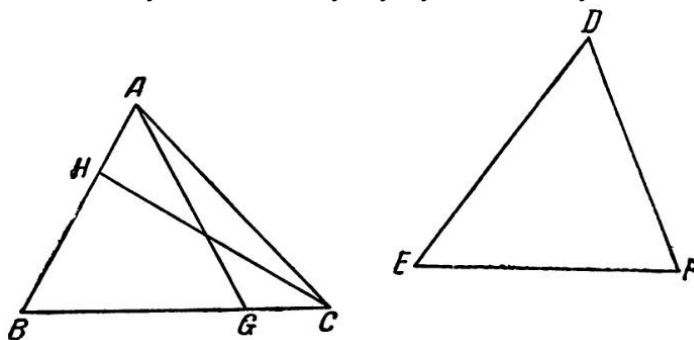
Тогда $\triangle DKE$ будет нашим треугольником $\triangle ABC$.

В $\triangle DFE$ и $\triangle GDE$ $\angle GDE > \angle FDE$, но с другой стороны, $\angle KDE = \angle BAC > \angle GDE$.

§33. Предложение 26

Если два треугольника имеют два угла, равных двум углам каждый каждому, и одну сторону, равную одной стороне, либо заключающейся между равными углами, либо стягивающей один из равных углов, то они будут иметь и остальные стороны равными остальным сторонам [каждая каждой] и оставшийся угол оставшемуся углу.

Пусть будут два треугольника ABC, DEF, имеющих два угла ABC, BCA равные двум углам DEF, EFD каждый каждому, а именно, угол ABC углу DEF и угол BCA углу EFD; пусть также они имеют одну сторону, равную одной стороне, сперва пусть заключающуюся между равными углами, а именно, <сторону> BC, <равную> EF (черт. 26e). Я утверждаю, что они будут иметь и остальные стороны равными остальным сторонам каждая каждой, а именно, AB <стороне> DE, AC <стороне> DF и оставшийся угол оставшемуся углу, а именно, угол BAC углу EDF.



Черт. 26e.

Действительно, если AB не равна DE, то одна из них будет большей. Пусть бо́льшая сторона будет AB; отложим BH, равную DE, и соединим HC.

Поскольку теперь BH равна DE, а BC равна EF, то вот две стороны BH, BC равны двум DE, EF каждая каждой; и угол HBC равен углу DEF; значит, основание HC равно основанию DF, и треугольник HBC равен треугольнику DEF, и остальные углы равны остальным углам, стягиваемым равными сторонами (предложение 4); значит, угол HCB равен углу DFE. Но угол DFE предполагается равным углу BCA; значит, и угол BCH равен BCA, т.е. меньший большему, чего не может быть (аксиома 8). Значит, не может AB быть не равной DE; значит, она равна. Но и BC равна EF; вот две стороны AB, BC равны двум DE, EF каждая каждой; и угол ABC равен

DEF; значит, основание AC равно основанию DF и оставшийся угол BAC равен оставшемуся углу EDF (предложение 4).

Но вот пусть далее будут равны стороны, стягивающие равные углы, как AB и DE; я утверждаю далее, что и остальные стороны будут равны остальным сторонам, а именно, AC равна DF, BC же EF, и, кроме того, оставшийся угол BAC <равен> оставшемуся углу EDF.

Действительно, если BC не равна EF, то одна из них будет большей. Если это возможно, пусть большей будет BC; отложим BG равной EF и соединим AG.

И поскольку BG равна EF, AB же DE, и вот две стороны AB, BG равны двум DE, EF каждая каждой; и заключают равные углы; значит, основание AG равно основанию DF и треугольник ABG равен треугольнику DEF, и остальные углы будут равны остальным углам, стягиваемым равными сторонами (предложение 4). Значит, угол BGA равен углу EFD.

Но угол EFD равен углу BCA; вот в треугольнике AGC внешний угол BGA равен внутреннему и противолежащему BCA, чего быть не может (предложение 16). Значит, BC не будет не равной EF; значит, она равна. Но и AB равна DE, вот две стороны AB, BC равны двум DE, EF каждая каждой и заключают равные углы. Значит, основание AC равно основанию DF, и треугольник ABC равен треугольнику DEF, и оставшийся угол BAC равен оставшемуся углу EDF.

Значит, если два треугольника имеют два угла, равных двум углам каждый каждому, и одну сторону, равную одной стороне, либо заключающей между равными углами, либо стягивающей один из равных углов, то они будут иметь и остальные стороны равными остальным сторонам [каждая каждой], и оставшийся угол оставшемуся углу, что и требовалось доказать (56, 57).

§33.1. Комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского

56. Второй случай конгруэнтности треугольников. Знание равенства треугольников при равенстве одной стороны и двух прилежащих углов Прокл со слов Эвдема приписывает Фалесу Милетскому. С помощью этого свойства Фалес определял расстояние корабля от берега.

Евклид при доказательстве второго случая конгруэнтности треугольников не пользуется, как мы, методом наложения, но прибегает к апагогическому доказательству. Между тем наш приём совершенно в духе Евклида и вполне соответствует доказательству предложения 4.

Евклид выбрал свой путь потому, что он взял общее положение, соединил две теоремы о равенстве треугольников при равенстве их оснований и углов при основании, и о равенстве треугольников при равенстве оснований, одной пары углов при основании и углов, противоположных основаниям.

Какую роль играла эта вторая часть?

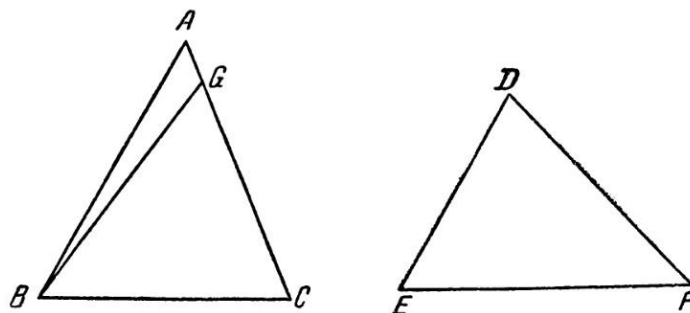
Она могла заменять теорему о равенстве двух прямоугольных треугольников ABC и DEF при равенстве гипотенуз CB и FE и пары острых углов.

У Евклида ее нет. Мы её доказываем с помощью теоремы, что из одной точки на прямую можно опустить только один перпендикуляр (такой теоремы у Евклида тоже нет).

57. Четвёртый случай конгруэнтности треугольников. Четвёртым случаем мы считаем не тот, который выдвигается Евклидом во второй части предложения 26, а другой, неизвестный Евклиду.¹⁵⁹

Если два треугольника ABC и DEF имеют по две стороны, равные каждая каждой $AB = DE$, $BC = EF$, и угол ACB, противоположный большей из равных сторон ($AB > BC$), равен углу DFE, противоположному тоже большей стороне ($DE > EF$), то треугольники будут равны.

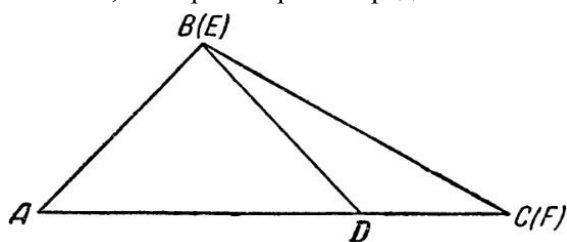
Доказательство ведётся апагогически (черт. 22m).



Черт. 22m.

¹⁵⁹ Объяснение тому странному явлению, что у Евклида нет *четвёртого случая* равенства треугольников, а есть ему отвечающий случай подобия (предложение 7 книги VI), Тропфке находит в том, что в книге I Евклид использовал работы Пифагора, которому этот четвёртый случай не был известен, а в VI – работы Евдокса, жившего гораздо позже (408–355 до н.э.), которому он был уже известен.

В предположении, что $AC > DF$, откладывается на CA отрезок $CG = DF$ и доказывается, что треугольники EDF и BGC равны. Далее, на основании предложения 16 доказывается, что $\angle BGA > \angle BCG$ и потому $\angle BAC$, равный $\angle BGA$, больше $\angle BCA$, и на основании предложения 19, что $AB < BC$, что противоречит предположению. Так же рассматривается случай, когда $AC < DF$.



Черт. 23m.

Р. Симсон формулирует иначе этот случай равенства треугольников. Если два треугольника ABC и DEF имеют по две стороны, равные каждой каждой $AB = DE$, $BC = EF$, и угол ACB , противолежащий стороне AB , равен углу DFE , противолежащему стороне DE , то треугольники будут равны, если углы BAC и EDF , противолежащие равным сторонам BC и EF , будут или оба острые, или прямые, или тупые.

Следует отметить, что треугольники, имеющие по две стороны равные и по равному углу, противолежащему одной из равных сторон, могут быть неравными, если не соблюдено условие, что равные углы противолежат *большой* из равных сторон или что другие углы, противолежащие равным сторонам, оба острые, или прямые, или тупые.

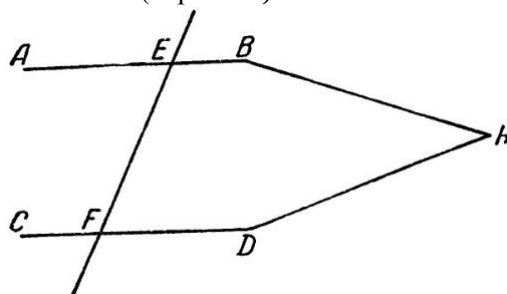
С данными сторонами $CB = EF$, $ED = AB$ и углом $\angle ACB = DFE$ существует не один, а два треугольника $\triangle CDB$ и $\triangle ACB$ (черт. 23m).

§34. Предложение 27

Если прямая, падающая на¹⁶⁰ две прямые, образует накрест лежащие углы, равные между собой, то прямые будут параллельны друг другу.

Пусть прямая EF , падающая на две прямые AB и CD , образует накрест лежащие углы AEF и EFD , равные между собой; я утверждаю, что AB параллельна CD (черт. 27e).

Действительно, если это не так, то AB и CD продолженные сойдутся или со стороны B, D или со стороны A, C . Продолжим их и пусть они сойдутся со стороны B, D в точке H . Вот в треугольнике HEF внешний угол AEF равен внутреннему ему противолежащему EFH ; это же невозможно (предложение 16); значит, AB, CD продолженные не сойдутся со стороны B, D . Таким же вот образом доказано, что не <сойдутся они> и со стороны A, C ; прямые же, которые ни с какой стороны не сходятся, параллельны (определение 23); значит, AB параллельна CD .¹⁶¹



Черт. 27e.

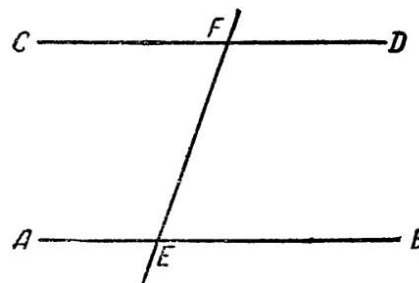
Значит, если прямая, падающая на две прямые, образует накрест лежащие углы, равные между собой, то прямые будут параллельны, что и требовалось доказать (58).

§34.1. Комментарий Д.Д. Мордухай-Болтовского

58. Приём Ома.¹⁶² Ом употребляет оригинальный приём доказательства этой теоремы. Он накладывает на $BEFD$ часть $AEFC$, *перевернув* так, что FE накладывается на EF , FC идёт по EB , а AE по FD (черт. 24m).

Тогда при предположении пересеканности EB и FD в G прямые EA и FC должны тоже *пересечься* в другом направлении в H , и мы получим две прямые, пересекающиеся в двух точках G и H , что противно аксиоме 9 Евклида о двух прямых, заключающих пространство.

В доказательстве Ома имеется фузионистическая



Черт. 24m.

¹⁶⁰ У Евклида ἐμπίπτω — впадаю, падаю на.

¹⁶¹ Кеплер первый мыслит параллельные прямые как пересекающиеся в бесконечности. Введение понятия о бесконечно удалённой точке приписывается Дезаргу, хотя его понимание и не совпадает с современным.

¹⁶² Ohm, Ebene Raumwissenschaft, 2 Aufl., Berlin, 1835, § 26, стр. 111.

идея использования трёхмерного пространства, тогда как Евклид предпочитает не пользоваться ею.

§35. Предложение 28

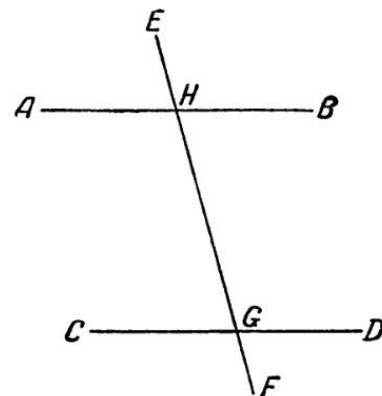
Если прямая, падающая на две прямые, образует внешний угол, равный внутреннему противолежащему с той же стороны, или внутренние односторонние <углы вместе>, равные двум прямым, то прямые будут параллельны между собой.

Пусть прямая EF , падающая на две прямые AB , CD , образует внешний угол $ЕНВ$, равный внутреннему противолежащему <с той же стороны расположенному> углу $НGD$, или внутренние односторонние углы $ВНГ$, $НGD$, <вместе> равные двум прямым; я утверждаю, что AB параллельна CD (черт. 28е).

Действительно, поскольку угол $ЕНВ$ равен углу $НGD$, но угол $ЕНВ$ равен $АНГ$ (предложение 15), то значит, и $АНГ$ равен $НGD$ (аксиома 1); и они накрест лежащие; значит, AB параллельна CD (предложение 27).

Далее, поскольку $ВНГ$ и $НGD$ <вместе> равны двум прямым, также и углы $АНГ$ и $ВНГ$ равны двум прямым (предложение 13), то значит, $АНГ$ и $ВНГ$ <вместе> равны $ВНГ$ и $НGD$ (аксиома 1). Отнимем общий угол $ВНГ$; значит, остаток $АНГ$ равен остатку $НGD$ (аксиома 3); и они накрест лежащие; значит, AB параллельна CD (предложение 27).

Значит, если прямая, падающая на две прямые, образует внешний угол, равный внутреннему противолежащему с той же стороны, или внутренние односторонние <углы вместе>, равные двум прямым, то прямые будут параллельны между собой, что и требовалось доказать.



Черт. 28е.

§36. Предложение 29

Прямая, падающая на параллельные прямые, образует накрест лежащие углы, равные между собой, и внешний угол, равный внутреннему, противолежащему с той же стороны, и внутренние односторонние углы, <вместе> равные двум прямым.

Пусть на параллельные прямые AB , CD падает прямая EF ; я утверждаю, что она образует накрест лежащие углы $АНГ$, $НGD$ равные и внешний угол $ЕНВ$, равный внутреннему противолежащему углу $НGD$, и внутренние односторонние углы $ВНГ$, $НGD$, <вместе> равные двум прямым (черт. 29е).

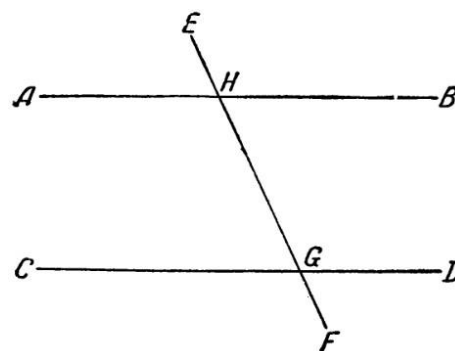
Действительно, если угол $АНГ$ не равен $НGD$, то один из них больший. Пусть будет больший $АНГ$.

Прибавим общий угол $ВНГ$; значит, $АНГ$ и $ВНГ$ <вместе> больше $ВНГ$ и $НGD$.

Но $АНГ$ и $ВНГ$ <вместе> равны двум прямым (предложение 13) [и], значит, $ВНГ$, $НGD$ <вместе> меньше двух прямых. Прямые же, продолжаемые неограниченно, сходятся со стороны, <где углы> меньше двух прямых (постулат 5), значит, AB , CD , продолжаемые неограниченно сойдутся; но они не сходятся вследствие того, что предполагаются параллельными; значит, не может $АНГ$ быть не равным $НGD$; значит, он равен. Но угол $АНГ$ равен углу $ЕНВ$ (предложение 15); и значит, $ЕНВ$ равен $НGD$ (аксиома 1).

Прибавим общий угол $ВНГ$; значит, $ЕНВ$ и $ВНГ$ <вместе> равны $ВНГ$ и $НGD$. Но $ЕНВ$ и $ВНГ$ <вместе> равны двум прямым (предложение 13); и значит, $ВНГ$ и $НGD$ <вместе> равны двум прямым.

Значит, прямая, падающая на параллельные прямые, образует накрест лежащие углы, равные между собой, и внешний угол, равный внутреннему противолежащему, и внутренние односторонние углы, <вместе> равные двум прямым, что и требовалось доказать (59, 60, 61, 62, 63).



Черт. 29е.

§36.1. Комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского

59. Абсолютные теоремы. В истории геометрии постулат 5 Евклида сыграл особенно важную роль. Тщетность попыток его доказательства стимулировала создание неевклидовой геометрии, сперва геометрии Лобачевского,¹⁶³ в которой из данной точки можно провести не одну прямую, не пересекающую данную, а пучок, заключающийся между двумя прямыми, называемыми параллельными, а затем геометрии Римана,¹⁶⁴ в которой изъят не только постулат 5, но и 9-я евклидова аксиома.

Предложения и построения, имеющие место в геометриях Евклида и Лобачевского, называются *абсолютными*.

До теоремы 29 идут положения, не зависящие от аксиомы о параллельных. Их можно также признать *абсолютными*, если ввести в некоторые из них известные ограничения. Можно было бы перенести их на сферу, на которой большие круги обладают теми же свойствами, что и римановы прямые, но при этом поставить условие, что вся фигура заключается в одной полусфере.

Теоремы о равенстве треугольников в этом смысле являются абсолютными теоремами; абсолютной же является теорема о том, что внешний угол больше внутреннего с ним не смежного, и вытекающее отсюда положение о параллельности в случае равенства накрестлежащих углов.

Абсолютными являются построения, относящиеся к проведению перпендикуляров и к делению угла и отрезка пополам.

60. Аксиома о параллельных в античное время. В настоящее время вполне строго доказано, что постулат 5 не выводится из других аксиом.

Из различных попыток доказательства постулата 5, базирующихся на ему эквивалентных утверждениях, для нас наиболее интересными являются те, которые содержат в себе некоторые идеи, получившие развитие в геометрии, и те, которые имеют *методическое значение*, т.е. могут быть положены в основу различных школьных методических приёмов изучения параллельных.

Недостаточно ясные доказательства Прокла и Птолемея, безусловно соответствующие упадку античной геометрии, для нас мало интересны. О параллельных вовсе не так много в античное время размышляли, как это нам теперь кажется. Следует обратить внимание на то, что ни Аполлоний,¹⁶⁵ ни Архимед ничего не оставили, из чего мы могли бы вывести заключение об их интересе к этому вопросу.

Видимо, вопросом этим начали интересоваться только в I в. нашей эры.

Я думаю, что и Гемина и Птолемея¹⁶⁶ он интересовал не в той степени, как это нам теперь кажется.

К Посидонию и Гемину относят только новое *определение параллельных*. Из того, что они описывали параллельные как прямые равноотстоящие (иначе чем Евклид), ещё вовсе не вытекает, что они давали вместо евклидова другое доказательство предложения 29.

До Прокла остаётся только один Птолемей, давший совершенно неудовлетворительное доказательство аксиомы о параллельных.

Верно только одно, что аксиома о параллельных выступила на видное место много позже Евклида, и проблема эта была поставлена математиками не эпохи *расцвета*, а эпохи *упадка*, скорее комментаторами, чем оригинальными мыслителями.

Стремился ли античный комментатор к более строгому обоснованию евклидовых «Начал», я сильно сомневаюсь.

61. Потенциальная бесконечность и параллельные. Следует сказать несколько слов об интересном доказательстве Валлиса.

Валлис постулирует возможность существования треугольника, подобного данному, что равносильно, правда в специальной форме, постулированию гомогенности пространства.

Рассуждение Валлиса¹⁶⁷ заключается в следующем: пусть AC и BD – две прямые, обладающие тем свойством, что углы CAB и DBA, образуемые ими с какой-нибудь секущей AB,

¹⁶³ Н.И. Лобачевский, Полное собрание сочинений, т. I. Сочинения по геометрии, М.–Л., 1946.

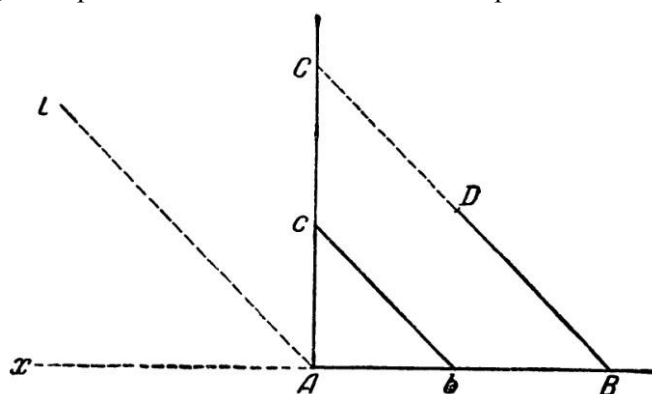
¹⁶⁴ Б. Риман, Сочинения, М.–Л., 1948. – Сборник «Об основаниях геометрии», Казань, 1895. – Богомолов С., Введение в неевклидову геометрию, М.–Л., 1934.

¹⁶⁵ Об Аполлонии см. Cantor, Vorles., т. I, стр. 318. – Kegelschnitte, пер. Balsam, Berlin, 1861, Conica, ed. Heiberg, Leipzig, 1891–1893. – Zeuthen, Die Lehre von den Kegelschnitte im Alterthum, Kopenhagen, 1886.

¹⁶⁶ О Птолемея см. Cantor, Vorles., т. I, стр. 387.

дают в сумме величину, меньшую $2d$; предположим для определённости, что угол $\angle CAB$ прямой, а $\angle DBA$ острый (черт. 25m). Требуется доказать, что прямая BD обязательно должна пересечь AC .

Передвинем прямую BD параллельно самой себе так, чтобы она заняла положение AL. Поскольку угол LAx равен острому углу DBx, то полупрямая AL будет вся целиком заключаться внутри прямого угла CAx и все точки AL будут находиться *слева* от AC. Передвинем теперь AL чуть-чуть вправо так, чтобы точка A перешла бы в положение b и, таким образом, оказалась *справа* от A. Невозможно предполагать, чтобы при достаточно малом Ab передвинутая полупрямая AL не имела



Черт. 25m.

бы ни одной точки слева от AC . Но если так, то она, передвинутая в положение bc , обязательно должна пересечь AC в некоторой точке s . Доказавши, таким образом, существование треугольника Abc , Валлис строит при точке B угол CBA , равный углу cbA , и затем на прямой AB получает треугольник ABC , подобный построенному Abc : сторона BC этого треугольника пересечёт AC в некоторой точке C . Но поскольку через B проходят две прямые BD и BC , образующие с AB один и тот же угол $DBA = \angle A$ и $CBA = cbA$, то эти две прямые должны обязательно совпасть; следовательно, прямая BD будет пересекать AC в той же точке C .

Только ли гомогенность пространства постулируется здесь Валлисом?

Нет, в данном рассуждении постулируется, кроме того, нечто в высшей степени важное, а именно, общий принцип теории пределов,¹⁶⁸ правда без определённой формулировки, который впервые дан Лейбницем в метафизической форме и Ньютоном – в математической.

Отрезок Ab , при котором bc пересекает AC , должен существовать, ибо если бы он не существовал, то он не будет существовать и тогда, когда Ab обращается в нуль (по-нашему – в пределе); но в таком случае при совпадении b с A не будет общей точки у bc и AC , что, конечно, нелепо.

Валлис мыслит, как Понселе¹⁶⁹ при установлении своего принципа непрерывности: «Если некоторое положение имеет место, когда некоторые величины не обращаются ни в нуль, ни в бесконечность и не принимают мнимых значений, то положение остаётся верным и в том случае, когда эти ограничения сняты».

Теперь этот принцип, развенчанный из ранга аксиом, служит уже не для доказательства, а лишь как эвристический метод отыскания новых геометрических истин. Валлису при его смутном понимании предела представлялось совершенно очевидным то, что теперь таковым не является вовсе.

62. Актуальная бесконечность и параллельные. Приведём доказательство постулата 5, данное Берtrandом, который оперирует с актуальной бесконечностью. Подобного рода операции были в большой моде среди математиков XVIII в., которые, оперируя с бесконечными величинами, как с конечными, жестоко запутывались в противоречиях (особенно грешен в этом отношении был Фонтенель), что вызвало изгнание актуальной бесконечности и замену её потенциальной – понятием о пределе в смысле Д'Аламбера и в нашем.

Теперь мы ясно сознаём, что бесконечность может получить права гражданства лишь при условии отказа от целого ряда свойств, присущих конечным величинам. Поскольку она может стать «равной» своей части, то нельзя определять «меньше» как существование в какой-либо части большего: одну и ту же гиперболу можно расположить и так, что её ветвь будет заключаться в угле, образованном её асимптотами, и так, что она сама будет заключать эти асимптоты.

Вполне понятно, почему Л. Бертран подошёл к доказательству аксиомы о параллельных с помощью актуальной бесконечности; действительно, именно он определил прямую

¹⁶⁷ Wallis, *Opera Oxoniae*, 1659–1699, т. II, стр. 665.

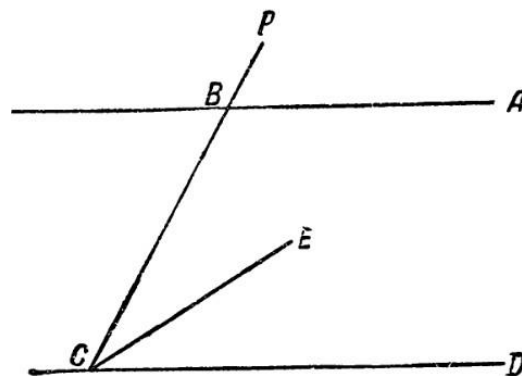
¹⁶⁸ D'Alembert, Encyclopédie des arts et des métiers etc. (Diderot), Limite. – Д. Мордухай-Болтовской, Исследования о происхождении некоторых основных идей современной математики, V, Генезис и история теории пределов, Известия С.КХ.У., 1928, т. III (XV), стр. 103.

¹⁶⁹ Poncelet, Applications d'Analyse à la Géométrie., т. II, 1864, стр. 173.

изогенностью частей, на которые она делит плоскость, именно он определил угол как неопределённую (бесконечную) часть плоскости, ограниченную двумя пересекающимися прямыми.

Прежде всего утверждается, что всякий угол больше полосы между двумя параллельными, так как плоскость можно покрыть конечным числом выходящих из одной точки углов, равных данному, тогда как та же самая плоскость покрывается лишь бесконечно большим числом параллельных полос.

Затем, если мы построим два равных угла DCB и ABP (черт. 26m), то по предложению 27 будем иметь две параллельные прямые AB и CD. Возьмём прямую CE так, чтобы угол ECD был меньше угла ABP = DCB так, что CE попадает в полосу ABCD. Тогда, если пересечения CE и AB не существует совершенно и прямая CE находится целиком в полосе ABCD, то угол DCE должен быть меньше этой полосы (ибо он целиком в ней заключается), что противоречит основной предпосылке.



Черт. 26m.

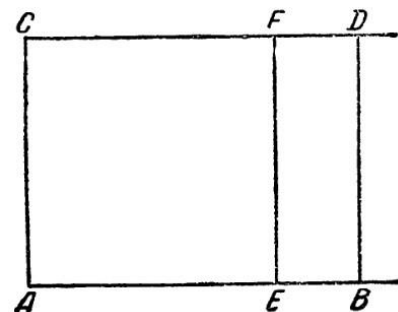
В отношении идейного содержания большее значение имеют исследования Ламберта¹⁷⁰ и первое доказательство Лежандра.¹⁷¹

Они выявляют *гомогенность* евклидовского пространства в форме отсутствия в нём *абсолютной* меры. Лежандр обнаруживает, что предположение, что сумма углов в треугольнике меньше двух прямых (предварительно доказав, что она не может быть больше), приводит к выражению стороны в виде функции от углов, которая, конечно, должна содержать линейный параметр.

63. Роберт Симсон. Укажем *схематически* ход доказательства Р. Симсона.

Оно представляет синтез идей Прокла, Нассир-Эддина¹⁷² и Клавия,¹⁷³ из него путем упрощений вырабатывались школьные доказательства.

Первое положение Р. Симсона.¹⁷⁴ Если две равные прямые AC и BD стоят к прямой AB под прямым углом и из точки F прямой CD опущен на AB перпендикуляр EE, то EF, AC, BD будут равны (черт. 27m).



Черт. 27m.

Если бы, говорит Р. Симсон, это было бы не так, то CD сперва подходила бы, а затем отходила бы, чего быть не может. Это положение входит в теорему Клавия.

Второе положение. Если к прямой с одной её стороны под прямыми углами проводятся две равные прямые и соединяются их концы, то соединяющая прямая образует тоже прямые углы с прямыми, вершины которых они соединяют.

Это лемма Нассир-Эддина, положение Клавия и установка гипотезы прямого угла Саккери.

Отсюда выводится, что в параллелограмме, в котором три угла прямые, и четвёртый угол должен быть прямым.

Третье положение. Если две прямые образуют острый угол, то на каждой можно найти такую точку, что перпендикуляр, опущенный на другую, будет больше всякой данной величины. Этим положением, как аксиомой, пользуется Прокл.

Четвёртое положение. Если две прямые пересекаются третьей под равными углами – одним внутренним, другим внешним, то существует прямая, пересекающая обе под прямым углом.

Пятое положение представляет постулат 5 Евклида.

¹⁷⁰ Stäckel und Engel, Die Theorie der Parallellinien..., Leipzig, Teubner, 1895.

¹⁷¹ См. Legendre, Éléments de Géométrie. 1794. Есть русский перевод 1837.

¹⁷² Euclidis elementorum libri XIII; studio Nasserredini. Roma, 1657, 1801. См. также Wallisii, Opera, т. II, стр. 659.

¹⁷³ См. Ch. Clavii, Euclidis elementorum libri XV, Roma, 1574.

¹⁷⁴ См. R. Simson, Euclidis elementorum libri priores sex item undecima et duodecima, Glasguae, 1756.

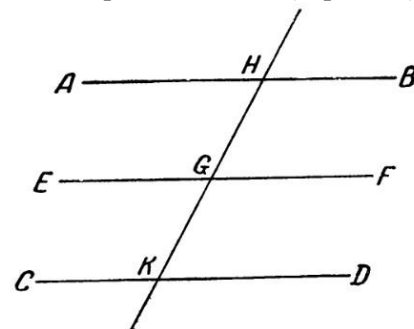
§37. Предложение 30

<Прямые>, параллельные той же прямой, параллельны и между собой.

Пусть каждая из АВ, CD параллельна EF; я утверждаю, что АВ параллельна CD (черт. 30е). Действительно, пусть на них падает прямая НК.

И поскольку на параллельные прямые АВ, EF упала прямая НК, то значит, угол АНК равен углу HGF (предложение 29). Далее, так как на параллельные прямые EF, CD упала прямая НК, то угол HGF равен HKD (предложение 28). Доказано же, что и угол АНК равен HGF, и значит, угол АНК равен углу HKD; и они накрестлежющие. Значит, АВ параллельна CD (предложение 27).

[Значит, параллельные той же прямой, параллельны и между собой]; это и требовалось доказать (64).



Черт. 30е.

§37.1. Комментарий Д.Д. Мордухай-Болтовского

64. Транзитивность параллельности. Отношение параллельности обладает свойствами, аналогичными тем, которыми обладает равенство

$$a = b \rightarrow b = a,$$

$$a = b, b = c \rightarrow a = c,$$

т.е. свойствами *коммутативности* и *транзитивности*.

Исключая постулат 5 и определяя параллельные прямые, как предельные прямые, между которыми заключаются прямые не пересекающиеся (сверхпараллельные), мы вынуждены эти положения доказывать.

Предложение 30 является эквивалентным постулату 5. Остроградский принимает его за основную аксиому теории параллельных.

§38. Предложение 31

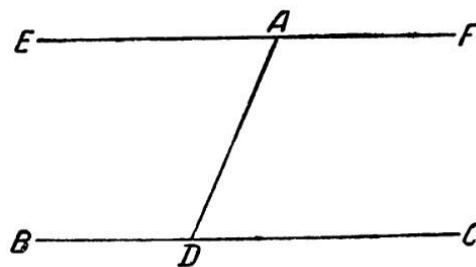
Провести через данную точку прямую линию, параллельную данной прямой.

Пусть данная точка будет А, данная же прямая ВС (черт. 31е); требуется вот через точку А провести прямую линию, параллельную прямой ВС.

Возьмём на ВС какую-нибудь точку D и соединим AD; и построим на прямой DA при её точке А угол DAE, равный углу ADC (предложение 23); и продолжим по одной прямой с EA прямую AF.

И поскольку прямая AD, падающая на две прямые ВС, EF, образовала накрестлежющие углы EAD, ADC, равные между собой, то значит, EAF параллельна ВС (предложение 27).

Значит, через данную точку А проведена прямая линия EAF, параллельная данной прямой ВС, что и требовалось сделать.

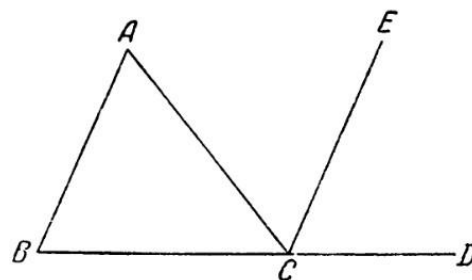


Черт. 31е.

§39. Предложение 32

Во всяком треугольнике по продолжении одной из сторон внешний угол равен двум внутренним и противолежащим, и внутренние три угла треугольника <вместе> равны двум прямым.

Пусть треугольник будет ABC, продолжим одну его сторону BC до D; я утверждаю, что внешний угол ACD равен двум внутренним и противолежащим CAB, ABC, и что внутренние три угла треугольника ABC, BCA, CAB <вместе> равны двум прямым (черт. 32е). Действительно, проведём через точку С прямую CE, параллельную АВ.



Черт. 32е.

И поскольку AB параллельна CE и на них пала AC , то накрестлежащие углы BAC , ACE равны между собой (предложение 29). Далее, поскольку AB параллельна CE и на них пала прямая BD , то внешний угол ECD равен внутреннему и противолежащему ABC (предложение 29). Но ACE по доказанному равен BAC ; значит, весь угол ACD равен двум внутренним и противолежащим углам BAC и ABC .

Прибавим общий угол ACB ; значит, углы ACD и ACB (аксиома 2) равны трём углам ABC , BAC , CAB .

Но ACD и ACB равны двум прямым (предложение 13); и значит, ACB , CBA , CAB <вместе равны> двум прямым.

Значит, во всяком треугольнике по продолжении одной из сторон внешний угол равен двум внутренним и противолежащим <вместе>, и внутренние три угла треугольника <вместе> равны двум прямым; что и требовалось доказать (65, 66).

§39.1. Комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского

65. Сумма углов в треугольнике. Прокл, а за ним Клавий приводят несколько иное доказательство, которое вводят сейчас в некоторые учебники¹⁷⁵ (черт. 28m).

Вспомогательная прямая DF проводится через вершину A параллельно основанию BC . При A оказываются сосредоточены все углы треугольника, так как $\angle ABC = \angle DAB$ и $\angle ACB = \angle FAC$ как пары накрестлежащих углов.

Вот два интересных исторических вопроса, которые занимали Ганкеля.

Каким образом заключили, что сумма углов треугольника равна двум прямым, и какой формы было первое логическое доказательство этой теоремы?

Первые сведения по геометрии устанавливались с помощью дробления площади вспомогательными прямыми на треугольники. Вначале имелось в виду лишь *определение площадей плоских фигур*, но при дальнейшей эволюции геометрии средство это было применено для изучения форм.

Вот простейшие геометрические факты этого рода, отмечаемые Платоном в его диалоге «Тимей»: дробление треугольника на два, образование квадрата из двух или четырёх треугольников и т.д.

Одним из фактов, представлявшихся важным в глазах пифагорейцев, было то, что плоскость возможно заполнить только тремя родами правильных многоугольников: треугольниками, четырёхугольниками и шестиугольниками.

По мнению Ганкеля, первое доказательство теоремы о сумме углов треугольника относилось только к равностороннему треугольнику и вытекало именно отсюда.

Сумма шести углов равносторонних треугольников, как сходящихся в одной точке, равна $4d$, каждый угол одна шестая $4d$, а сумма углов $2d$.

Фалесу приписывается положение о том, что угол, опирающийся на диаметр, прямой. Ганкель думает, что положение это принималось Фалесом без доказательств, как непосредственно очевидная истина, но что уже из неё он выводил то, что сумма углов в прямоугольном треугольнике равна двум прямым. Переход же к общему случаю не представляет затруднения.

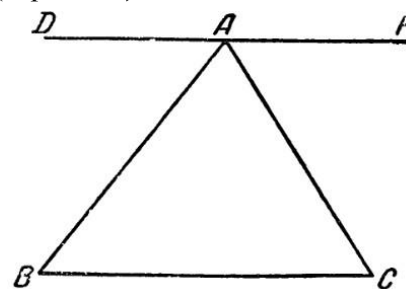
Аристотель в «Метафизике» упоминает об этой теореме как ему известной.

По Проклу, доказательство предложения 32, получающееся после проведения через вершину треугольника прямой параллельно основанию, принадлежит Пифагору (вернее пифагорейцам).

В учебниках иногда употребляется фономическое доказательство предложения 32 с помощью прямой, которая, вращаясь около вершин A , B , C от стороны b до c , от c до a , от a до b , совершает полный оборот в $4d$, так что сумма внешних углов равна $4d$, а на долю внутренних остаётся $2d$.

66. Сумма углов многоугольника. В наших учебниках за теоремой о сумме углов в треугольнике следует формула для суммы углов в выпуклом многоугольнике:

$$S = (n - 2) 2d.$$



Черт. 28m.

¹⁷⁵ Enriques, Gli. Elementi, стр. 108.

У Евклида совсем нет формул не только символической, но и риторической (словесной) алгебры. Конечно, нельзя сказать, чтобы содержание этой формулы не могло быть выражено на евклидовом языке, но выражение должно быть очень сложно и будет вообще не соответствовать общему характеру «Начал», которые занимаются свойствами геометрических объектов, их сравнением, но совершенно не занимаются измерением; число для них только предмет изучения, но не средство измерения.

О сумме углов в многоугольнике впервые говорит Прокл. Формулу дает Региомонтан (1436–1476).

Интересно отметить, что и многие старые комментаторы идут по пути Евклида.

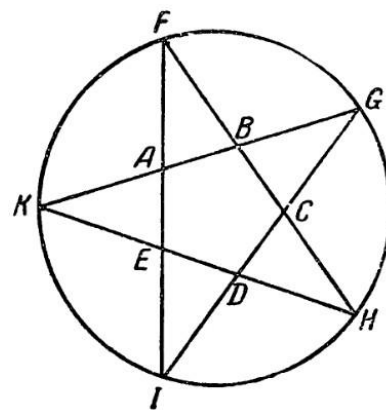
Кампано занимается не суммой углов n -угольника вообще, но *доказывает*, что сумма углов в звёздчатом пятиугольнике равна двум прямым.

В основу своего вывода он кладёт первую часть предложения 32.

Он замечает, рассматривая $\triangle AIG$ (черт. 29m), что внешний угол GAF равен сумме $I + G$. Таким же образом, рассматривая $\triangle KBH$, он получал, что $KBF = K + H$.

Но из $\triangle ABF$ получаем, что сумма углов: $\angle F + \angle GAF + \angle KBF = 2d$, так что действительно

$$\angle F + \angle G + \angle H + \angle I + \angle L = 2d.$$



Черт. 29m.

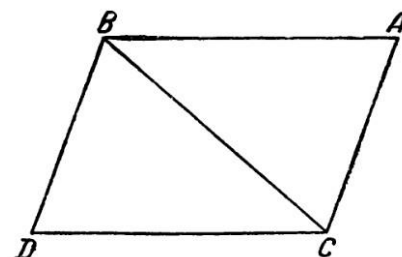
Часть 4. Предложения 33 – 48

§40. Предложение 33

Прямые, соединяющие с одной и той же стороны равные и параллельные <прямые>, и сами равны и параллельны.

Пусть равные и параллельные <прямые> будут AB , CD и пусть их соединяют с одной и той же стороны прямые AC , BD ; я утверждаю, что и AC и BD равны и параллельны (черт. 33е).

Соединим BC . И поскольку AB параллельна CD и на них упала BC , то накрестлежащие углы ABC , BCD равны между собой (предложение 29). И поскольку AB равна CD , а BC общая, то вот две стороны AB , BC равны двум CD , BC ; и угол ABC равен углу BCD ; значит, и основание AC равно основанию BD , и треугольник ABC равен треугольнику BCD , и остальные углы равны остальным углам каждый каждому (предложение 4), стягиваемым равными сторонами; значит, угол ACB равен CBD .



Черт. 33е.

И поскольку прямая BC , падающая на две прямые AC , BD , образовала равные между собой накрестлежащие углы, то значит, AC параллельна BD (предложение 27). Но она же по доказанному и равна ей.

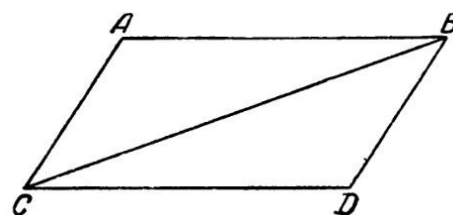
Значит, прямые, соединяющие с одной и той же стороны равные и параллельные <прямые>, и сами равны и параллельны, что и требовалось доказать.

§41. Предложение 34

В <образованных> параллельными линиями площадях¹⁷⁶ противоположные стороны и углы равны между собой и диаметр¹⁷⁷ разделяет их пополам.

Пусть <образованная> параллельными линиями площадь будет $ACDB$, диаметр же её BC ; я утверждаю, что в параллелограмме $ACDB$ противоположные стороны и углы равны между собой и диаметр BC делит его пополам (черт. 34е).

Действительно, поскольку AB параллельна CD и на них упала прямая BC , то накрестлежащие углы ABC , BCD равны между собой (предложение 29). Далее, поскольку AC параллельна BD и на них упала BC , то накрестлежащие углы ACB и CBD равны между собой (предложение в 29). Вот ABC , BCD два треугольника, имеющих два угла ABC , BCA , равных двум углам BCD , CBD каждый каждому, и одну сторону, равную одной стороне между равными углами, а именно, общую сторону BC ; и значит, они будут иметь и остальные стороны, равные остальным каждая каждой, и оставшийся угол, равный оставшемуся углу (предложение 26); значит, сторона AB равна CD , AC же BD и ещё угол BAC равен углу CDB . И поскольку угол ABC равен BCD , а CBD углу ACB , значит, весь угол ABD равен всему ACD (аксиома 2). Но угол BAC , как уже доказано, равен CDB .



Черт. 34е.

Значит, в <образованных> параллельными линиями площадях противоположные стороны и углы равны между собой. Вот я утверждаю, что и диаметр делит их пополам. Действительно, поскольку AB равна CD и BC общая, то вот две стороны AB , BC равны двум CD , BC каждая

¹⁷⁶ У Евклида стоит *τὸ παραλληλόγραμμον χωρίον* – буквально параллельнолинейная (по образцу *εὐθύγραμμον* – прямолинейная) площадь – часть плоскости, ограниченная двумя парами параллельных прямых. В дальнейшем говорится просто «параллелограмм».

¹⁷⁷ У Евклида *ἡ διάμετρος* – поперечник. Этот термин одинаково относится и к параллелограмму и к кругу; он показывает, что первые геометры мыслили параллелограмм (точнее прямоугольник) вписанным в круг. До Евклида термин «диаметр» употребляется Гиппократом и Платоном (в «Меноне»). Наш термин «диагональ» (*διὰ γωνίας* – через углы, подразумевается, проходящий) встречается у Евклида только один раз в нашем смысле этого слова. Тот же смысл имеет это слово у Герона.

каждой; и угол ABC равен углу BCD (предложение 29), и значит, основание AC равно DB (предложение 4), и [значит], треугольник ABC равен треугольнику BCD .

Значит, диаметр BC делит пополам параллелограмм $ABCD$, что и требовалось доказать (67).

§41.1. Комментарий Д.Д. Мордухай-Болтовского

67. Свойства параллелограммов. В настоящее время, изучая параллелограммы, мы не ограничиваемся только равенством противоположных сторон и углов.

У Евклида даже нет упоминания о взаимопересечении диагоналей пополам. Нет изучения прямоугольника и ромба.

Комментаторы, начиная с Клавия, особенное внимание обращали на теоремы, получаемые обращением евклидовых теорем.

Если через A обозначить свойство иметь равные противоположные углы; B – иметь равные противоположные стороны; C – иметь пересекающиеся пополам диагонали; D – быть параллелограммом, то положение 34 сформулируется так для четырехугольника: если D , то A и B . Клавий доказывает, что если A , то D , если B , то D , если C , то D .

К предложению Евклида, выявляющему диагонали как оси симметрии ромба, прибавляется положение Клавия, по которому прямая, проходящая через пересечение диагоналей, разделяется в этой точке пополам. Отсюда, конечно, родится понятие о центре симметрии.

В современных учебниках разбираются ещё специальные свойства ромбов и прямоугольников (перпендикулярность диагоналей в ромбе и равенство их в прямоугольнике).

В Мераиской программе изучение параллелограммов связывается с общей теорией *симметрии*; параллелограмм оказывается фигурой, имеющей *центр* симметрии (в точке пересечения диагоналей); ромб – центр и две оси симметрии (диагонали), прямоугольник – центр и две оси симметрии (прямые, соединяющие середины противоположных сторон), квадрат объединяет свойства прямоугольника и ромба (центр и четыре оси симметрии).

Следует обратить внимание на аксиоматическую конструкцию доказательств теории о свойствах параллелограмма, ромба и прямоугольника. Если не пользоваться евклидовой аксиомой о параллельных, то о фигуре $ABCD$, в которой углы A и B при нижнем основании равны каждый прямому углу, а боковые стороны AC и BD имеют равные длины, можно сказать только, что она *прямоугольная трапеция*, и доказать, что углы C и D при верхнем основании тоже равны. Относительно их можно сделать три гипотезы: они могут быть острыми (тогда мы будем иметь геометрию Лобачевского), тупыми (геометрию Римана, если ещё соответственным образом изменить аксиомы сочетания и порядка) или прямыми (геометрия Евклида). Во всех трёх геометриях будут иметь место следующие теоремы: диагонали AD и BC равны (но не обязательно пересекаются пополам), прямая, соединяющая середины верхнего и нижнего оснований, является осью симметрии и поэтому перпендикулярна как к верхнему, так и к нижнему основаниям.

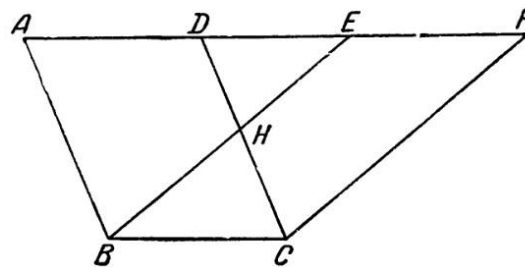
§42. Предложение 35

Параллелограммы, находящиеся на том же основании и между теми же параллельными, равны между собой.

Пусть $ABCD$, $EBCF$ будут параллелограммы, находящиеся на том же основании BC и между теми же параллельными AF и BC ; я утверждаю, что параллелограмм $ABCD$ равен¹⁷⁸ параллелограмму $EBCF$ (черт. 35e).

Действительно, поскольку $ABCD$ есть параллелограмм, то прямая AD равна BC (предложение 34). Вследствие того же вот и EF равна BC (предложение 34); так что и AD равна EF (аксиома 1), и DE общая; значит, вся AE равна всей DF (аксиома 2).

Но и AB равна DC (предложение 34); вот две стороны EA , AB равны двум FD , DC каждой; и угол FDC равен углу EAB (предложение



Черт. 35e.

¹⁷⁸ У Евклида ἴσος – равный. Поскольку у Евклида фигура рассматривается как часть плоскости, то и равенство фигур понимается как равенства заключённых в них частей плоскости – их площадей.

29) внешний внутреннему; значит, основание EB равно основанию FC , и треугольник EAB будет равен треугольнику DFC (предложение 4). Отнимем общую часть DNE ; значит, остаток-трапеция $ABND$ равна остатку-трапеции $ENCF$ (аксиома 3); прибавим общий треугольник HBC ; значит, весь параллелограмм $ABCD$ равен всему параллелограмму $EBCF$ (аксиома 2).

Значит, параллелограммы, находящиеся на том же основании и между теми же параллельными, равны между собой, что и требовалось доказать (68).

§42.1. Комментарий Д.Д. Мордухай-Болтовского

68. Равносоставленные и эквивалентные фигуры. В гильбертовской теории площадей¹⁷⁹ различаются фигуры равносоставленные и фигуры эквивалентные или равновеликие.

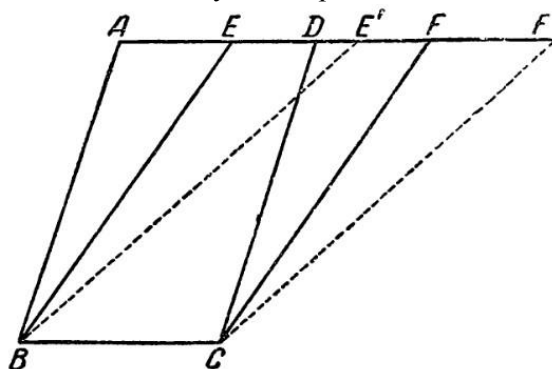
В первом случае фигуры разлагаются на равные (конгруэнтные) многоугольники.

Во втором случае это разложение имеет место после присоединения к каждой равносоставленных частей.

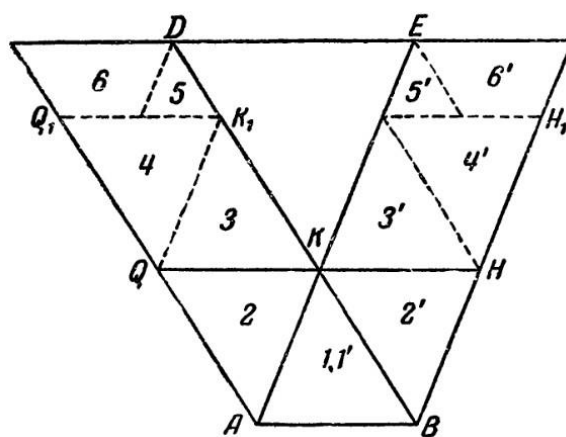
Равносоставленные фигуры являются и равновеликими, но не наоборот.

Конечно, это понимание равновеликости построено для того, чтобы развить теорию площадей, не используя аксиомы непрерывности, иное, чем у Евклида.

Для последнего равновелики те фигуры, которые имеют ту же площадь, а площадь – это величина, сущность которой как первичного понятия им не определяется. Следует отметить, что он не даёт измерения площади *числом*. Вообще же площадь можно охарактеризовать числом только после установления понятия об иррациональном числе и взаимно однозначном соответствии между геометрическими величинами и числами.



Черт. 30m.



Черт. 31m.

В предложении 35 рассматривается только наиболее сложный случай, когда E выходит за AD (черт. 30m) и когда приходится устанавливать равносоставленность присоединением части DCF .

В том случае, когда E попадает между A и D , оба параллелограмма имеют общую часть – трапецию $BEDC$ и, кроме того, по равному треугольнику AEB и DCF .

Если доказать, что фигуры, равносоставленные с третьей, равносоставлены между собой (как это делает Гильберт), то в несколько приёмов, переходя от $ABCD$ к $BEFC$, потом к $BE'F'C$ и т.д., можно доказать равносоставленность параллелограммов при условии предложения 35.

Но это можно сделать непосредственно, как показывает следующий чертеж (черт. 31m).

Через точку K пересечения сторон BD и AE параллелограммов проводим $QH \parallel AB$.

Затем, взяв $QQ_1 = QA$ и $NN_1 = BN$, проводим $Q_1N_1 \parallel AB$ и т.д.

Тогда два параллелограмма, как нетрудно видеть, разобьются на соответственно равные части (1, 1'), (2, 2'), (3, 3'), (4, 4'), (5, 5'), (6, 6').

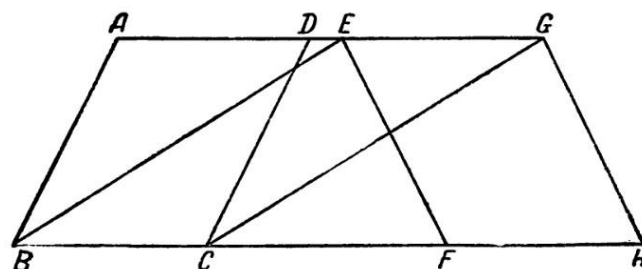
§43. Предложение 36

Параллелограммы, находящиеся на равных основаниях и между теми же параллельными, равны между собой.

¹⁷⁹ D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, Leipzig, 1899–1930 (гл. IV).

Пусть $ABCD$, $EFHG$ будут параллелограммы, находящиеся на равных основаниях BC и FH и между теми же параллельными AG и BH ; я утверждаю, что параллелограмм $ABCD$ равен параллелограмму $EFHG$ (черт. 36e).

Действительно, соединим BE , CG . И поскольку BC равна FH , но FH равна EG (предложение 34), и значит, BC равна EG (аксиома 1). Они же и параллельны. И соединяют их EB , GC ; прямые же, соединяющие с одной стороны равные и параллельные, и сами равны и параллельны (предложение 33) [и EB , GC , значит, равны и параллельны]. Значит, $EBCG$ параллелограмм. И он равен $ABCD$ (предложение 35); ибо он имеет с ним то же основание BC и находится между теми же параллельными BC , AG (предложение 35).



Черт. 36e.

Вследствие того же самого вот и $EFHG$ равен тому же $EBCG$, так что и параллелограмм $ABCD$ равен параллелограмму $EFHG$ (аксиома 1).

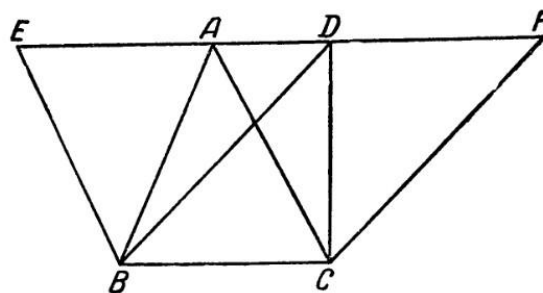
Значит, параллелограммы, находящиеся на равных основаниях и между теми же параллельными, равны между собой, что и требовалось доказать.

§44. Предложение 37

Треугольники, находящиеся на том же основании и между теми же параллельными, равны между собой.

Пусть треугольники ABC , DBC находятся на том же основании BC и между теми же параллельными AD , BC ; я утверждаю, что треугольник ABC равен треугольнику DBC .

Продолжим AD в обе стороны (черт. 37e) до E и F и через B проведём прямую BE , параллельную CA (предложение 31), а через C проведём CF , параллельную BD (предложение 31). Значит, каждая из <фигур> $EBCA$ и $DBC F$ – параллелограмм; и они равны (предложение 35), ибо находятся на том же основании BC и между теми же параллельными BC и EF ; и половина параллелограмма $EBCA$ есть треугольник ABC , ибо диаметр AB делит его пополам (предложение 34); половина же параллелограмма $DBC F$ – треугольник DBC , ибо диаметр DC делит его пополам (предложение 34): [половины же равных равны между собой] (аксиома 6). Значит, треугольник ABC равен треугольнику DBC .



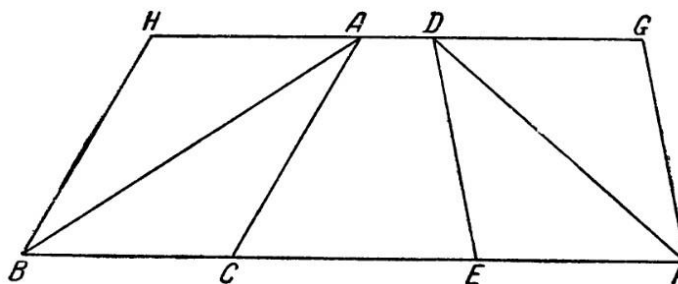
Черт. 37e.

Значит, треугольники, находящиеся на том же основании и между теми же параллельными, равны между собой, что и требовалось доказать.

§45. Предложение 38

Треугольники, находящиеся на равных основаниях и между теми же параллельными, равны между собой.

Пусть треугольники ABC , DEF находятся на равных основаниях BC , EF и между теми же параллельными BF и AD ; я утверждаю, что треугольник ABC равен треугольнику DEF (черт. 38e).



Черт. 38e.

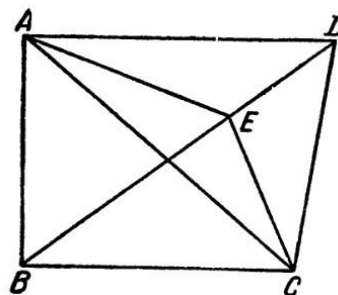
Действительно, продолжим AD в обе стороны до H и G и через B проведём BH , параллельную CA (предложение 31), а через F проведём FG , параллельную DE (предложение 31). Значит, каждая из <фигур> $HBCA$, $DEFG$ – параллелограмм; и $HBCA$ равен $DEFG$ (предложение 36), ибо они находятся на равных основаниях BC и EF и между теми же параллельными BH и FG (предложение 36); и половина параллелограмма $HBCA$ есть треугольник ABC (предложение 34), ибо диаметр AB отсекает его пополам; половина же параллелограмма $DEFG$ – треугольник FED (предложение 34), ибо диаметр DF отсекает его пополам. [Половины же равных равны между собой] (аксиома 6); значит, треугольник ABC равен треугольнику DEF .

Значит, треугольники, находящиеся на тех же основаниях между теми же параллельными, равны между собой, что и требовалось доказать.

§46. Предложение 39

Равные треугольники, находящиеся на том же основании и с той же стороны, находятся и между теми же параллельными.

Пусть ABC , DBC будут равные треугольники, находящиеся на том же основании BC и с той же его стороны (черт. 39е); я утверждаю, что они находятся в тех же параллельных. Действительно, соединим AD ; я утверждаю, что AD параллельна BC .



Черт. 39е.

Действительно, если это не так, то проведём через точку A прямую AE , параллельную BC (предложение 31) и соединим EC . Значит, треугольник ABC равен треугольнику EBC (предложение 37), ибо он находится с ним на том же основании BC и между теми же параллельными (предложение 37). Но ABC равен DBC ; и значит, DBC равен EBC (аксиома 1) – больший меньшему; это же невозможно (аксиома 8); значит, не будет AE параллельна BC .

Подобным же вот образом докажем, что и никакая другая <прямая> кроме AD ; значит, AD будет параллельна BC .

Значит, равные треугольники, находящиеся на том же основании и с той же стороны, находятся между теми же параллельными, что и требовалось доказать.

§47. Предложение 40¹⁸⁰

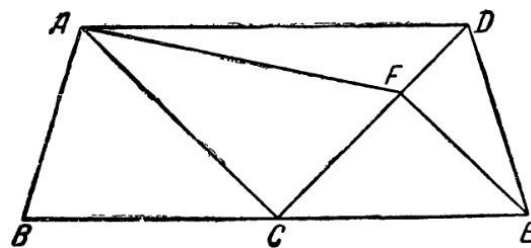
Равные треугольники, находящиеся на равных основаниях и с той же стороны, находятся и между теми же параллельными.

Пусть ABC , CDE будут равные треугольники на равных основаниях BC , CE и с той же стороны (черт. 40е); я утверждаю, что они находятся и между теми же параллельными.

Действительно, соединим AD ; я утверждаю, что AD параллельна BE .

Действительно, если это не так, проведём через A прямую AF , параллельную BE (предложение 31), и соединим FE . Значит, треугольник ABC равен треугольнику FCE (предложение 38), ибо они находятся на равных основаниях BC и CE и между теми же параллельными BE и AF (предложение 38). Но треугольник ABC равен треугольнику DCE ; и, значит, треугольник DCE равен треугольнику FCE (аксиома 1), больший меньшему, это же невозможно (аксиома 8); значит, не будет AF параллельна прямой BE . Подобным же вот образом докажем, что и никакая другая <прямая>, кроме AD ; значит, AD параллельна BE .

Значит, равные треугольники, находящиеся на равных основаниях и с той же стороны, находятся между теми же параллельными, что и требовалось доказать.



Черт. 40е.

¹⁸⁰ Это предложение является позднейшей добавкой, как это установил Гейберг на основании найденных вновь египетских папирусов уже после выхода его издания Начал.

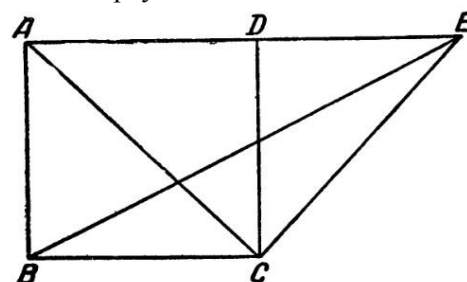
§48. Предложение 41

Если параллелограмм имеет с треугольником одно и то же основание и находится между теми же параллельными, то параллелограмм будет вдвое большим треугольника.

Пусть параллелограмм ABCD с треугольником EBC имеет одно и то же основание BC, и пусть он находится между теми же параллельными BC, AE; я утверждаю, что параллелограмм ABCD будет вдвое большим треугольника EBC (черт. 41e).

Действительно, соединим AC. Вот треугольник ABC равен треугольнику EBC (предложение 37), ибо он с ним на том же основании BC и между теми же параллельными BC, AE (предложение 37). Но параллелограмм ABCD вдвое больше треугольника ABC, ибо диаметр AC делит его пополам (предложение 34); так что параллелограмм ABCD вдвое больше и треугольника EBC.

Значит, если параллелограмм имеет с треугольником одно и то же основание и находится между теми же параллельными, то параллелограмм будет вдвое больше треугольника, что и требовалось доказать (69).



Черт. 41e.

§48.1. Комментарий Д.Д. Мордухай-Болтовского

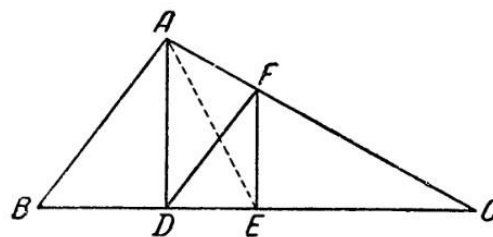
69. Деление площадей. К предложениям 38, 39, 40, 41 примыкают сильно интересовавшие математиков эпохи Возрождения проблемы о *делении площадей*.¹⁸¹

Простейшей задачей является задача о делении площади треугольника пополам прямой, проходящей через вершину.

Если провести медиану AE (т.е. соединить A с серединой E стороны BC), то получаем решение задачи. Треугольники ABE и AEC будут равновелики (черт. 32m).

Пелетье делит треугольник пополам прямой, проходящей через данную точку F на стороне AC.

Он из F проводит прямую FE к E – середине BC и из A проводит AD || EE; тогда FD даёт решение задачи.



Черт. 32m.

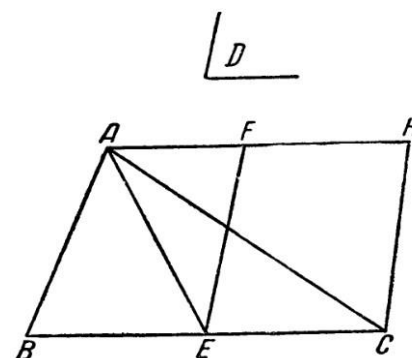
В самом деле, треугольники ADF и ADE, имеющие одно и то же основание AD и вершины F и E на FE || AD, равновелики, поэтому DFC = DEF + EFC = AEF + EFC = AEC = $\frac{1}{2}ABC$.

§49. Предложение 42

Построить¹⁸² равный данному треугольнику параллелограмм в данном прямолинейном угле.

Пусть данный треугольник будет ABC, данный же прямолинейный угол D; требуется вот построить равный треугольнику ABC параллелограмм в угле, равном прямолинейному углу D (черт. 42e).

Рассечём BC пополам в E (предложение 10), соединим AE, построим на прямой EC при её точке E угол CEF, равный D (предложение 23); и через A проведём AH, параллельную EC (предложение 31); через C же проведём CH, параллельную EF (предложение 31); значит, FECH есть параллелограмм. И поскольку BE



Черт. 42e.

¹⁸¹ Willke, Neue erleuchtende Methode den Inhalt gerade Figuren zu finden, Halle, 1757. – F. Mayer, Prakt. Geometrie, Halle, 1758. – Gervien, Crell's Journal, 1833. – Halt, Geometrical dissections and transpositions. Messenger of Mathematics, 1877. – Rethy, Rausenberger, Dobriner, Mathematische Annalen 38, 42, 43, 45. – Вебер и Вельштейн, Энциклопедия элементарной математики, т. II, кн. 1, Одесса, 1913. – Фуррер, Геометрические головоломки. – Klugel, Mathem. Worterbuch, т. 2, стр. 214.

¹⁸² У Евклида συστήσασθαι – составить; термин, применяющийся к треугольнику и параллелограмму. При построении квадрата (предложение 46) Евклид употребляет слово ἀναγράφει ἀπὸ – начертить на. Эту разницу подчёркивает Прокл.

равна ЕС, то и треугольник АВЕ равен треугольнику АЕС (предложение 38), ибо они находятся на равных основаниях ВЕ, ЕС и между теми же параллельными ВС, АН (предложение 38); значит, треугольник АВС вдвое больше треугольника АЕС. Но и параллелограмм FECH вдвое больше треугольника АЕС (предложение 41), ибо имеет с ним то же основание и находится с ним между теми же параллельными; значит, параллелограмм FECH равен треугольнику АВС и имеет угол CEF, равный данному D.

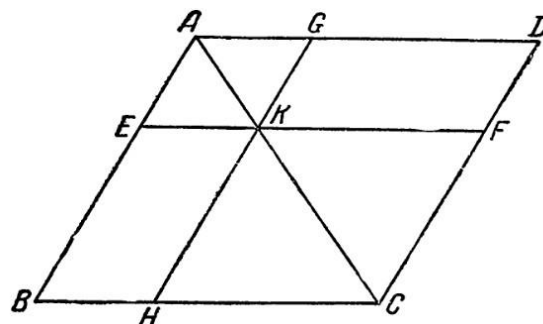
Значит, построен равный данному треугольнику АВС параллелограмм FECH в угле CEF, который равен углу D, что и требовалось сделать.

§50. Предложение 43

Во всяком параллелограмме «дополнения»¹⁸³ расположенных по диаметру параллелограммов равны между собой.

Пусть будет параллелограмм ABCD, диаметр же его AC, по AC же пусть будут параллелограммы EG, FH, так называемые же «дополнения» – BK, KD, я утверждаю, что дополнение BK равно дополнению KD (черт. 43е).

Действительно, поскольку ABCD – параллелограмм, диаметр же его AC, то треугольник ABC равен треугольнику ACD (предложение 34). Далее, поскольку EG – параллелограмм, диаметр же его AK, то треугольник AEK равен треугольнику AGK (предложение 34). Вследствие того же вот и треугольник KFC равен треугольнику KHC (предложение 34). Поскольку теперь треугольник AEK равен треугольнику AGK, а KFC равен KHC, то треугольник AEK вместе с KHC равен треугольнику AGK вместе с KFC (аксиома 2); и весь треугольник ABC равен всему ADC; значит, остающееся «дополнение» BK равно остающемуся «дополнению» KD (аксиома 3).



Черт. 43е.

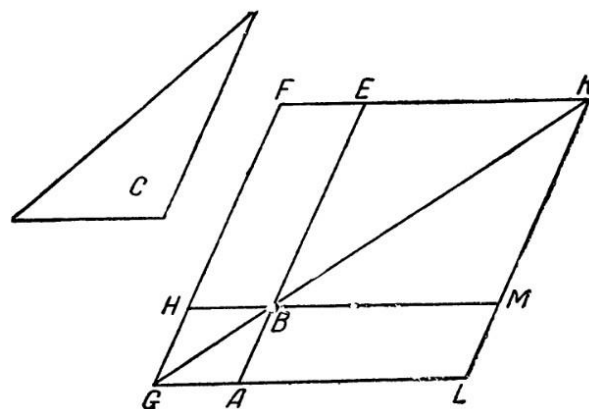
Значит, во всяком параллелограмме «дополнения» расположенных по диаметру параллелограммов равны между собой, что и требовалось доказать.

§51. Предложение 44

К данной прямой «приложить»¹⁸⁴ равный данному треугольнику параллелограмм в данном прямолинейном угле.

Пусть данная прямая будет АВ (черт. 44е), данный же треугольник С, данный же прямолинейный угол D; требуется вот к данной прямой АВ «приложить» параллелограмм, равный данному треугольнику С, в угле, равном D (черт. 44е).

Построим равный треугольнику С параллелограмм BEFH в угле EBH, который равен D (предложение 42); и поместим его так, чтобы BE была по одной прямой с АВ, доведём FH до G, через А проведём AG, параллельную как ВН, так EF (предложение 31), и соединим GB. И поскольку на параллельные AG и EF упала прямая GF, значит, углы AGF и GFE <вместе> равны двум прямым (предложение 29); значит, BGN и HFE <вместе> меньше двух прямых; со стороны же углов, меньших чем два прямых, продолженные неограниченно <прямые> сходятся; значит, GB, FE при продолжении сойдутся. Продолжим их и пусть они сойдутся в К; через точку К проведём KL, параллельную как EA, так FG (предложение 31), и продолжим GA, HB до точек L, М.



Черт. 44е.

¹⁸³ У Евклида *παρὰληρόματα*. Термин объяснён в тексте предложения.

¹⁸⁴ У Евклида *παράβαλιν* – буквально «прикинуть».

Значит, GLKF будет параллелограмм, диаметр же его GK, по GK же два параллелограмма АН, МЕ, так называемые же «дополнения» LB, BF; значит, LB равно BF (предложение 43). Но BF равно треугольнику С; и значит, LB равно С. И поскольку угол НВЕ равен АВМ, а НВЕ равен D, то значит, и АВМ равен углу D.

Значит, к данной прямой АВ приложен равный треугольнику С параллелограмм LB в угле АВМ, который равен D, что и требовалось сделать.

§52. Предложение 45

Построить равный данной прямолинейной фигуре параллелограмм в данном прямолинейном угле.

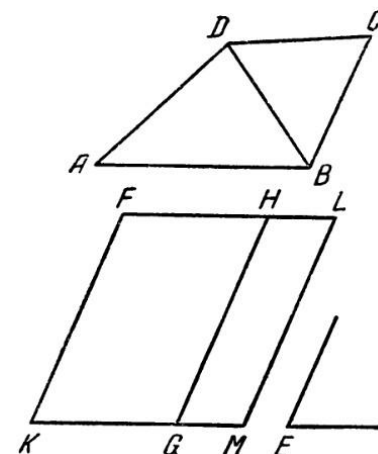
Пусть данная прямолинейная фигура будет ABCD, данный же прямолинейный угол E; требуется вот построить равный прямолинейной фигуре ABCD параллелограмм в угле, равном E (черт. 45e).

Соединим DB и построим равный треугольнику ABD параллелограмм FG в угле GKF, который равен E (предложение 42); и приложим к прямой HG равный треугольнику DBC параллелограмм HM в угле HGM, который равен E (предложение 44).

И поскольку угол E равен каждому из GKF, HGM, то значит, и GKF равен HGM (аксиома 1). Прибавим общий угол KGH; значит, FKG, KGH <вместе> равны KGH, HGM (аксиома 2). Но FKG, KGH равны двум прямым (предложение 29); значит, и KGH, HGM равны двум прямым (аксиома 1). Вот при некоторой прямой HG в точке её G две прямые KG, GM, расположенные не по одну и ту же сторону, образуют смежные углы, равные <вместе> двум прямым; значит, KG будет по одной прямой с GM (предложение 14).

И поскольку на параллельные KM, FN упала прямая GH, то накрестлежащие углы MGH, GHF равны между собой (предложение 29). Прибавим общий угол GHL; значит, углы MGH, GHL <вместе> равны GHF, GHL (аксиома 2). Но MGH, GHL <вместе> равны двум прямым (предложение 29); значит, и GHF и GHL равны двум прямым (аксиома 1, предложение 29); значит, FN будет по одной прямой с HL (предложение 14). И поскольку FK равна и параллельна GN, но GN <равна и параллельна> также и ML, то значит, и KF равна и параллельна ML (аксиома 1, предложение 30); и соединяют их прямые KM, FL; и значит, KM, FL равны и параллельны (предложение 33); значит, KFLM – параллелограмм. И поскольку треугольник ABD равен параллелограмму FG, а DBC параллелограмму HM, то значит, вся прямолинейная <фигура> ABCD равна всему параллелограмму KFLM (аксиома 2).

Значит, построен равный данной прямолинейной фигуре ABCD параллелограмм KFLM в угле FKM, который равен данному E, что и требовалось сделать (70).



Черт. 45e.

§52.1. Комментарий Д.Д. Мордухай-Болтовского

70. Преобразование площадей. Другая задача, также очень интересовавшая математиков эпохи Возрождения, это задача о *преобразовании площадей*¹⁸⁵ (задача о построении фигуры определённого типа, равновеликой заданной).

Евклидом ставится проблема о построении квадрата, равновеликого данной прямолинейной фигуре. Евклид не имел алгебры, но он получал геометрическим путём то, что мы получаем с помощью алгебры; кроме того, он оперировал самими площадями, а не числами, которые измеряют эти площади.

Роль извлечения квадратного корня из числа у него играло построение стороны квадрата, равновеликого данной прямолинейной фигуре.

¹⁸⁵ Willke, Neue erleuchtende Methode den Inhalt gerade Figuren zu finden, Halle, 1757. – F. Mayer, Prakt. Geometrie, Halle, 1758. – Gervien, Crell's Journal, 1833. – Halt, Geometrical dissections and transpositions. Messenger of Mathematics, 1877. – Rethy, Rausenberger, Dobriner, Mathematische Annalen 38, 42, 43, 45. – Вебер и Вельштейн, Энциклопедия элементарной математики, т. II, кн. 1, Одесса, 1913. – Фуррь, Геометрические головоломки. – Klugel, Mathem. Worterbuch, т. 2, стр. 214.

Предложения 42, 43, 44, 45 следует рассматривать как ряд предложений, направленных к предложению 14 книги II, дающему окончательное решение поставленной проблемы: *построить квадрат равновеликий* (Евклид говорит – «равный») *данной прямолинейной фигуре*.

§53. Предложение 46

На данной прямой надстроить¹⁸⁶ квадрат.

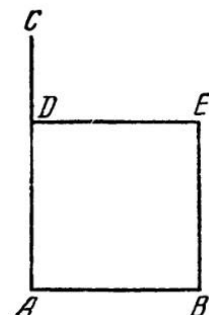
Пусть данная прямая будет АВ, требуется на прямой АВ надстроить квадрат (черт. 46е).

Проведём к прямой АВ от её точки А под прямым углом <прямую> АС (предложение 11) и отложим АД, равную АВ (предложение 3); и через точку D параллельно АВ проведём DE (предложение 31), через же точку В параллельно АД проведём BE (предложение 31).

Значит, ADEB есть параллелограмм; значит, АВ равна DE, а АД равна BE (предложение 34). Но АВ равна АД; значит, четыре <прямые> ВА, АД, DE, EB равны между собой; значит, параллелограмм ADEB равносторонний. Я утверждаю вот, что он и прямоугольный.

Действительно, поскольку на параллельные АВ, DE упала прямая АД, значит, углы BAD и ADE <вместе> равны двум прямым (предложение 29). Угол же BAD прямой; значит, прямой и ADE. В <образованных> же параллельными линиями площадях противоположные стороны и углы равны между собой (предложение 34); значит, и каждый из противоположных углов ABE, BED прямой; значит, ADEB прямоуголен.

Доказано же, что он и равносторонен; значит, он квадрат (определение 22) и надстроен на АВ, что и требовалось сделать (71).

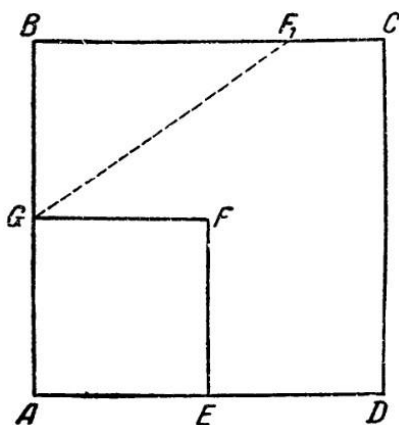


Черт. 46е.

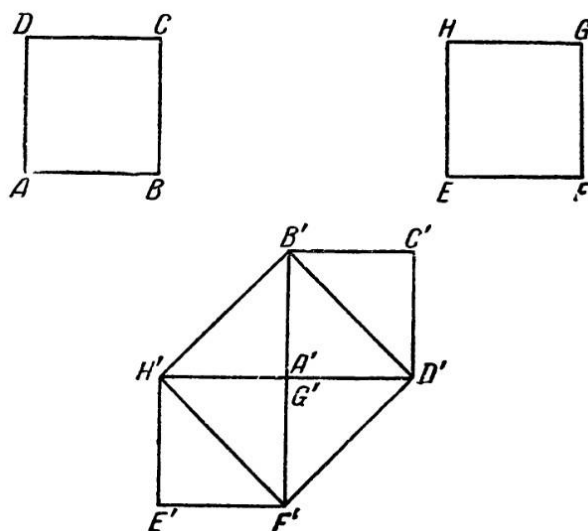
§53.1. Комментарий Д.Д. Мордухай-Болтовского

71. Квадрат и его сторона. Евклид указывает, как по стороне построить квадрат. Его комментаторы ставят задачу, как по площади квадрата (они коротко говорят «по квадрату») найти его сторону.

Выражая всё через числа, мы знаем, что уравнение $x^2 = a$ имеет только одно положительное решение.



Черт. 33m.



Черт. 34m.

Комментаторы доказывали *геометрически*, что проблема допускает одно решение, что равные (в евклидовом смысле) квадраты имеют равные стороны.

Конечно, проще всего было бы доказывать это апагогически. Если предположить, что AEFG и ADCB равны, но $AE < AD$, мы можем, согласно Евклиду, построить квадрат AEFG, который весь окажется внутри ABCD; в противном случае мы получили бы, например, пересечение сторон GF и BC в точке F_1 , а из этой точки имели бы два перпендикуляра F_1B и F_1G на BA (черт. 33m).

¹⁸⁶ У Евклида ἀναγράφει – см. примечание к предложению 42.

Прокл вместо этого простого *апагогического* доказательства даёт очень сложное прямое. Я в кратких чертах его намечу.

Оба квадрата переносятся в положение $A'B'C'D'$, $E'F'G'H'$ так, чтобы точка A' совпала с G' , а $G'F'$ служила продолжением $B'A'$ (черт. 34m).

Затем, имея в виду, что диагональю квадрат отсекается пополам (предложение 34) и что квадраты по условию равны, мы получим, что (в силу аксиомы 2) $F'B'D' = B'H'D'$, а так как эти треугольники имеют одно и то же основание, то (по предложению 39) $F'D' \parallel H'B'$.

Отсюда доказывается равенство $\triangle H'B'A'$ и $\triangle G'F'D'$ и равенство $\triangle H'F'B'$ и $\triangle H'F'D'$ и параллельность $B'D'$ и $H'F'$.

В результате оказывается, что $B'D' = H'F'$ и от равенства диагоналей нетрудно перейти и к равенству сторон.

Следует отметить, что теорема 39 доказывается Евклидом апагогически; поэтому, если иметь в виду весь путь от аксиом, то теорема эта всё-таки доказывается апагогически.

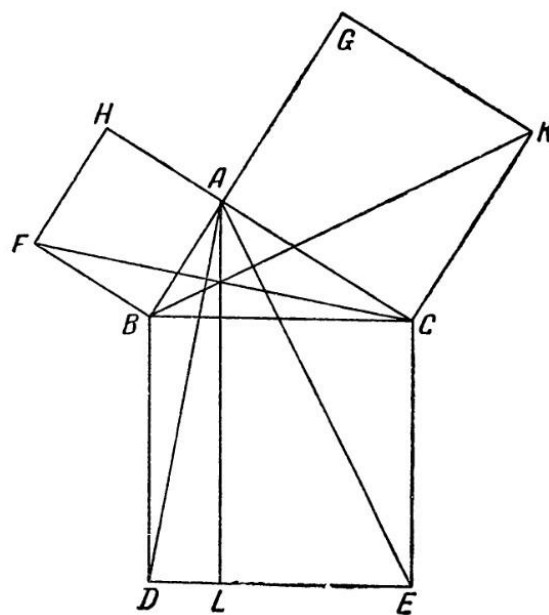
Правда, при обосновании первого доказательства используется теорема о том, что из данной точки можно опустить только один перпендикуляр на данную прямую, которой у Евклида нет. Но предложение это, как отмечает большинство комментаторов, сейчас всё же выводится как непосредственное следствие из евклидовского предложения 16.

§54. Предложение 47

В прямоугольных треугольниках квадрат на стороне, стягивающей прямой угол,¹⁸⁷ равен <вместе взятым> квадратам на сторонах, заключающих прямой угол.

Пусть ABC – прямоугольный треугольник, имеющий прямой угол BAC ; я утверждаю, что квадрат на BC равен <вместе взятым> квадратам на BA и AC (черт. 47e).

Действительно, надстроим на BC квадрат $BDEC$, а на BA , AC надстроим <квадраты> HB , GC (предложение 46); и через A проведём AL , параллельную как BD , так и CE (предложение 31); соединим AD , FC . И поскольку каждый из углов BAC , BAH прямой (определение 10), то вот на некоторой прямой BA при её точке A две прямые AC , AH , расположенные не по одну сторону, образуют смежные углы, <вместе> равные двум прямым; значит, CA будет по <одной> прямой с AH (предложение 14). Вследствие того же вот и BA будет по одной прямой с AG . И поскольку угол DBC равен углу FBA (аксиома 1), ибо каждый из них прямой, то прибавим общий угол ABC ; значит, весь угол DBA равен всему FBC (аксиома 2). И поскольку DB равна BC , а FB равна BA (определение 22), то вот две стороны DB , BA равны двум сторонам BC , FB каждая каждой; и угол DBA равен углу FBC ; значит, и основание (предложение 4) AD равно основанию FC , и треугольник ABD равен треугольнику FBC (предложение 4). И удвоенный треугольник ABD есть параллелограмм BL (предложение 41), ибо они имеют то же основание BD и расположены между теми же параллельными BD , AL (предложение 41). Удвоенный же треугольник FBC (предложение 41) есть квадрат HB ; ибо они имеют то же основание FB и расположены между теми же параллельными FB и HC ; [но удвоенные равных величин равны между собой (аксиома 5)]; значит, и параллелограмм BL равен квадрату HB . Подобным же вот образом, соединяя AE , BK , будет доказано, что и параллелограмм CL равен квадрату GC ; значит, весь квадрат $BDEC$ равен двум квадратам HB и GC вместе взятым. И $BDEC$ есть квадрат, надстроенный на BC , а HB , GC – на BA , AC ; значит, квадрат на стороне BC равен <вместе взятым> квадратам на сторонах BA , AC .



Черт. 47e.

¹⁸⁷ Точный перевод евклидова $\eta \pi \lambda \epsilon \upsilon \rho \acute{\alpha} \tau \eta \nu \omicron \rho \theta \eta \nu \gamma \omega \nu \iota \alpha \nu \upsilon \pi \omicron \tau \epsilon \iota \nu \omicron \upsilon \sigma \sigma \alpha$ – отсюда наш термин «гипотенуза».

Значит, в прямоугольных треугольниках квадрат на стороне, стягивающей прямой угол, равен <вместе взятым> квадратам на сторонах, заключающих прямой [угол]; что и требовалось доказать (72, 73).

§54.1. Комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского

72. Доказательства теоремы Пифагора.¹⁸⁸ Многочисленные доказательства теоремы Пифагора делятся на следующие виды:

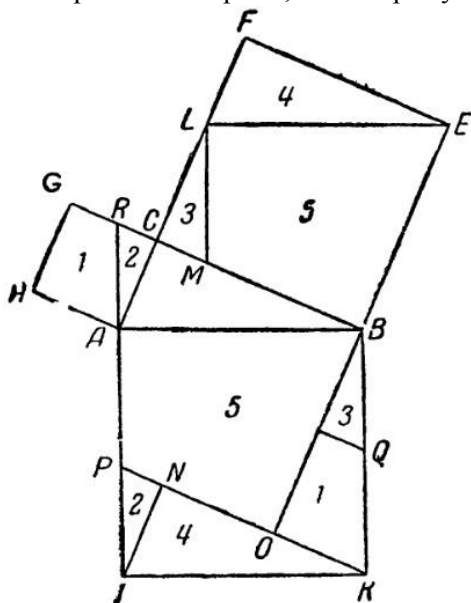
1) Доказательство, которое даётся в «Началах» и, по свидетельству Прокла, принадлежит самому Евклиду.

Оно основывается на равновеликости треугольников с равными высотами и равными основаниями и выводится из равновеликости параллелограммов с равными основаниями и высотами как фигур эквивалентных в смысле Гильберта на основании аксиомы 6 книги I «Начал»: половины равных величин равны между собой.

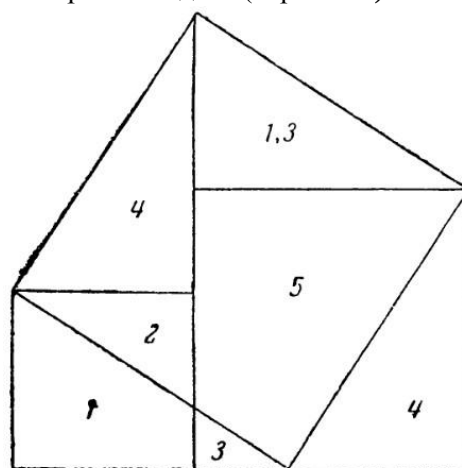
Доказательство это не может быть непосредственно представлено на модели.

2) Доказательство равноставленности. Особенного внимания заслуживает доказательство Anaritius (900 г. нашей эры).

Мы прилагаем чертёж, по которому может быть построена модель (черт. 35m).



Черт. 35m.



Черт. 36m.

На чертеже $LE \parallel AB$, $AR \perp AB$ и $LM \perp AB$, BO продолжение BE , $KP \perp OB$ и $IN \perp PK$, $BQ = LM$. Мы не будем излагать доказательство. Отметим, что очень ходкое в настоящее время доказательство, изображённое на черт. 36m, представляет по существу доказательство Анариция, но только при другом расположении квадратов, построенных на гипотенузе и катетах.

Такого же типа доказательство представлено на черт. 37m.

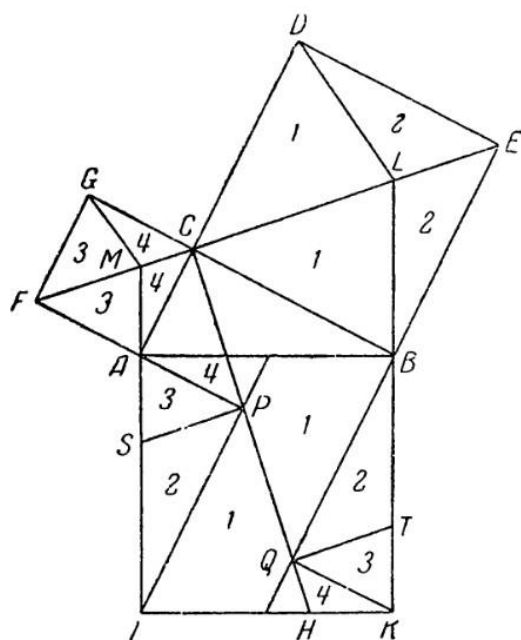
3) Доказательство, основанное на равноставленности фигур, полученных из данных прибавлением (черт. 38m).

Доказывается, что два равных шестиугольника $AFGDEB$ и $CAILKB$ состоят – первый из квадратов, построенных на катетах, и двух треугольников $ABC = GDC$, второй – из квадрата, построенного на гипотенузе, и из двух таких же треугольников $ABC = ILK$.

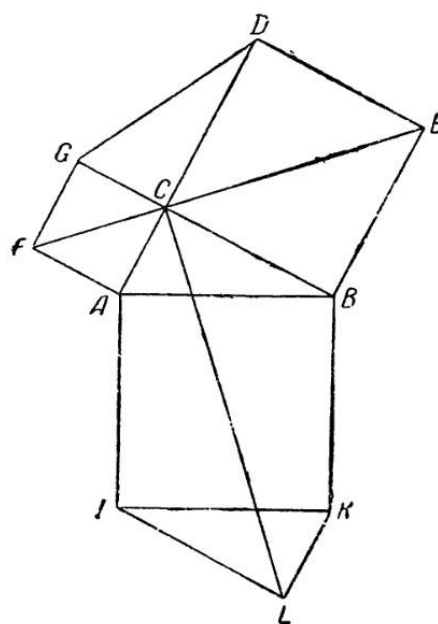
4) Доказательства, построенные на некоторых алгебраических тождествах, которые можно заменить соответствующими теоремами книги II «Начал»; о них будем говорить в комментариях к книге II.

5) Доказательства, основанные на теории подобия; о них будем говорить в комментариях к книге VI.

¹⁸⁸ История теоремы: Cantor, Vorles., т. I, стр. 142, у индусов стр. 613, у китайцев стр. 637, о Пифагоре стр. 137. – Allman, Greek Geometry from Thales to Euclid, Dublin, 1889. – Enriques, Gli elementi, стр. 135. – Цейтен, История математики в древности и в средние века, М.–Л., 1932. О теореме Пифагора говорят Плутарх, Витрувий, Диоген Лаэртский: Plutarchus, Opera, Ed. Didot, т. 4, стр. 272, 1332. – Vitruvius, De architectura, кн. 9, стр. 2. – Diogenes Laertius, De vita philosophorum, кн. 8, стр. 207.

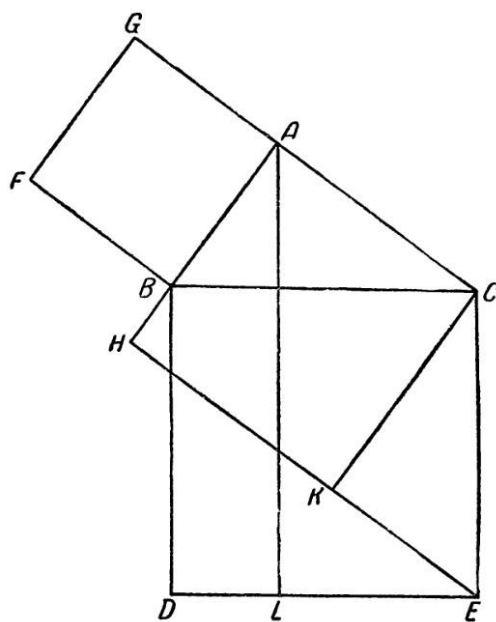


Черт. 37m.

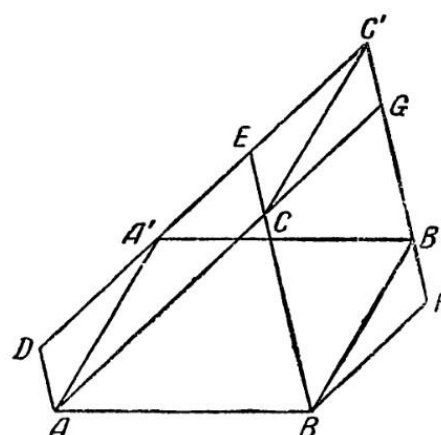


Черт. 38m.

Интересно отметить *упрощение*, предлагаемое Лицманом к доказательству Евклида и состоящее в том, что квадрат, построенный на одном из катетов, направляется внутрь (черт. 39m).



Черт. 39m.



Черт. 40m.

73. Теорема Паппа.¹⁸⁹ Обобщением теоремы Пифагора является теорема Паппа Александрийского (III в. нашей эры).

Во всяком треугольнике ABC (черт. 40m) параллелограмм ABA'B', который построен на одной стороне треугольника *внутри* последнего и имеет две вершины A' и B' вне треугольника, равновелик сумме двух параллелограммов ACFD и BCGF, построенных на двух других сторонах треугольника так, что стороны их, параллельные сторонам треугольника, проходят через вершины первого параллелограмма.¹⁹⁰

Доказываем, что $\triangle A'B'C' = \triangle ABC$.

¹⁸⁹ Pappi Alexandrini, Collectiones, ed. Hultsch. Berolini, 1876–1878. – Ozanam, Recréations Math., Paris, 1778.

¹⁹⁰ Нетрудно видеть, что намеченные в условии свойства присущи такому доказательству теоремы Пифагора по Евклиду, в котором квадрат на гипотенузе строится *внутри*, а квадраты на катетах – *наружу*.

Параллелограммы $AA'C'C$ и $BB'C'C$ равновелики данным параллелограммам $ADEC$ и $BFGC$ вследствие равенств высот и оснований.

Если от фигуры $AA'C'B'B$ отнять $\triangle A'C'B'$ то остаётся параллелограмм $AA'B'B$.

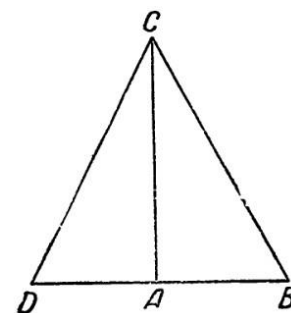
Если же отнять треугольник $ABC = A'B'C'$, то остаётся сумма параллелограммов $AA'C'C + BB'C'C$ или равная ей сумма параллелограммов $ADEC + BFGC$.

§55. Предложение 48

Если в треугольнике квадрат на одной стороне равен <вместе взятым> квадратам на остальных двух сторонах, то заключённый между остальными двумя сторонами треугольника угол есть прямой.

Пусть в треугольнике ABC квадрат на одной стороне BC равен <вместе взятым> квадратам на сторонах BA и AC ; я утверждаю, что угол BAC прямой (черт. 48е).

Действительно, проведём от точки A под прямым углом к AC <прямую> AD (предложение 11), отложим AD , равную BA , и соединим DC . Поскольку DA равна AB , то и квадрат на DA равен квадрату на AB . Прибавим общий квадрат на AC ; значит, квадраты на DA , AC равны квадратам на BA , AC (аксиома 2). Но квадратам на DA , AC равен квадрат на DC (предложение 47), ибо угол DAC прямой; квадратам же на BA , AC равен квадрат на BC , ибо так предполагается; значит, квадрат на DC равен квадрату на BC , так что и сторона DC равна BC ; и поскольку DA равна AB , AC же общая, то вот две стороны DA , AC равны двум BA , AC ; и основание DC равно основанию BC ; значит (предложение 8), и угол DAC [будет] равен BAC . Угол же DAC прямой, значит, прямой и BAC .



Черт. 48е.

Значит, если в треугольнике квадрат на одной стороне равен <вместе взятым> квадратам на остальных двух сторонах, то заключённый между остальными двумя сторонами треугольника угол – прямой, что и требовалось доказать (74).

§55.1. Комментарий Д.Д. Мордухай-Болтовского

74. Теорема, обратная теореме Пифагора. Эта теорема в настоящее время доказывается (это делали и некоторые комментаторы) на основании предложений 12 и 13 книги II, дающих так называемую обобщённую теорему Пифагора, которая выражается в современной символике формулами:

$$CB^2 = CA^2 + AB^2 + 2AC \cdot AD \text{ (для тупого угла)}$$

$$CB^2 = CA^2 + AB^2 - 2AC \cdot AD \text{ (для острого угла).}$$

Следовательно, для тупоугольного треугольника

$$CB^2 > CA^2 + AB^2,$$

для остроугольного

$$CB^2 < CA^2 + AB^2,$$

для прямоугольного

$$CB^2 = CA^2 + AB^2.$$

Мы имеем три случая, удовлетворяющих условиям теоремы Гаубера,¹⁹¹ и получаем три обратные теоремы, среди которых есть и обратная пифагоровской.

Эта трихотомия может служить иллюстрацией другой теоремы, с которой связано не всегда уясняемое учеником понятие о противоположных и обратных теоремах.

Из четырёх предложений:

1) A есть B ; 2) B есть A ; 3) «не A » не есть B ; 4) «не B » не есть A , где 1) есть прямое предложение, 2) – ему обратное, 3) – ему противоположное и 4) – обратное противоположному; каждые два влекут за собой остальные два.

Например, из 1) и 3) необходимо вытекает 2); действительно, если бы B оказалось «не A », то мы имели бы одновременно: некоторое «не A » есть B и всякое «не A » не есть B – согласно предложению 3), что привело бы к противоречию.

Ученик часто неясно представляет сущность обратной теоремы и не всегда понимает различие между необходимыми и достаточными условиями. В сущности он повторяет те же

¹⁹¹ См. комментарий 49.

ошибки, через которые проходило и всё человечество. Интересно отметить, что Гиппократ Хиосский при своих квадратурах луночек пользуется всеми тремя теоремами, обратными Пифагоровой и её обобщениям для косоугольных треугольников, тогда как «Начала» Евклида (и, по всей вероятности, также и «Начала» Гиппократа) не содержат теорем, обратных обобщениям теоремы Пифагора.

Мы имеем четвёрку теорем:

- 1) Если угол A треугольника прямой, то $BC^2 = AB^2 + AC^2$.
- 2) Если $BC^2 = AB^2 + AC^2$, то угол A прямой.
- 3) Если угол A не прямой, то BC^2 не равно $AB^2 + AC^2$.
- 4) Если BC^2 не равно $AB^2 + AC^2$, то угол A не прямой.

Не всегда обращают должное внимание на предложение 2), между тем как именно оно, а не сама теорема Пифагора, имело важное значение при построении прямого угла при помощи «египетского» треугольника со сторонами 3, 4, 5 и ему аналогичных.

Герман Вейль. Аксиоматика Гильберта

Weyl Herman. «David Hilbert and His Mathematical Work». Bull. Amer. Math. Soc. 50 (1944), 612–654; Bol. Soc. Mat. Sao Paulo 1 (1946), 76–104; 2 (1947), 37–60. Русский перевод в книге Констанс Рид. «Гильберт». «Наука», Москва, 1977.

Ниже дана одна глава («Аксиоматика») из этого сочинения.

Аксиоматика

Трудно придумать большую пропасть, чем та, которая отделяла последнюю работу Гильберта по теории числовых полей от его классической книги *Основания геометрии*, опубликованной в 1899 году. Единственным предвестником последней служила одна заметка 1895 года о прямой как кратчайшей линии. Однако О. Блюменталь сообщает, что уже в 1891 году Гильберт, обсуждая работу Г. Винера о роли теорем Дезарга и Паппа, о которой тот докладывал на одном из математических собраний, сделал замечание, в двух словах передающее суть аксиоматического метода: «Следует добиться того, чтобы во всех геометрических утверждениях слова *точка, прямая, плоскость* можно было заменить словами *стол, стул, кружка*».

Греки представляли себе геометрию как дедуктивную науку, которая занимается чисто логическими выводами из небольшого количества заранее установленных аксиом. Этой программы придерживались как Евклид, так и Гильберт. Однако список аксиом Евклида был далеко не полным, у Гильберта же он полон и его рассуждения не содержат логических пробелов. Евклид пытался дать описательное определение основных пространственных объектов и соотношений, участвующих в его аксиомах; Гильберт же отказался от такого подхода. Всё, что нам надо знать об этих основных понятиях, содержится в аксиомах. Аксиомы, каковы они есть, являются, по сути дела, их неявными (и по необходимости неполными) определениями. Евклид считал аксиомы очевидными, его интересовало реальное пространство физического мира. Однако в дедуктивной системе геометрии очевидность и даже истинность аксиом несущественны; они служат лишь предположениями, из которых выводятся логические следствия. В самом деле, существует много различных материальных интерпретаций основных понятий, для которых аксиомы становятся верными. Например, аксиомы n -мерной евклидовой векторной геометрии соблюдаются, если брать в качестве вектора распределение постоянного тока в электрической цепи, состоящей из n проводников, соединенных в некоторых точках разветвления, и принять в качестве квадрата длины вектора джоулево тепло, выделяемое током за единицу времени. При построении геометрии на аксиоматической основе стремятся к максимальной экономии, для чего проясняют роль различных групп аксиом. Взятые в своём естественном порядке, это аксиомы инцидентности, порядка, конгруэнтности, параллельности и непрерывности. Например, если это возможно, теорию геометрического подобия или площадей многоугольников строят без аксиом непрерывности.

Во всем этом Гильберт не был одинок, однако в его исполнении чувствуется рука мастера. Выдающейся фигурой среди его предшественников является М. Паш, который прошел длинный путь от Евклида, выявив скрытые аксиомы порядка и с методической ясностью построив дедуктивную систему проективной геометрии (1882 год). Другими из них были Ф. Шур из Германии и представители блистательной школы итальянских геометров (Пеано, Веронезе), которые также принялись за разработку этих вопросов. В выборе основных понятий Гильберт более консервативен, чем итальянцы: вполне сознательно он придерживается традиций Евклида с его тремя классами неопределяемых элементов – точек, прямых, плоскостей – и его отношениями инцидентности, порядка и конгруэнтности сегментов и углов. Это придает особую прелесть книге Гильберта, как будто вы глядите в лицо, хорошо знакомое и в то же время величественно преображенное.

Одно дело – построить геометрию на прочном основании, и совсем другое – исследовать логическую структуру построенного сооружения. Если я не ошибаюсь, Гильберт был первым, кто мог свободно переходить на этот более высокий, «метагеометрический» уровень; он

систематически изучает взаимную независимость своих аксиом и устанавливает независимость некоторых из самых фундаментальных геометрических теорем от той или иной ограниченной группы аксиом. Его метод основан на *построении моделей*: показывается, что модель противоречит одной из аксиом и удовлетворяет требованиям всех остальных аксиом, из чего следует, что первая не может быть следствием остальных. Одним из выдающихся примеров этого метода, известным с давних пор, служит модель неевклидовой геометрии Кэли–Клейна. Для неархимедовой геометрии Веронезе Леви-Чивита построил незадолго до Гильберта удовлетворительную арифметическую модель. Вопрос о *непротиворечивости* тесно связан с вопросом о независимости. Относящиеся сюда общие идеи кажутся нам теперь почти банальными, настолько радикальным оказалось их влияние на наше математическое мышление. Гильберт высказал их на ясном и точном языке, воплотив их в своей книге, подобной кристаллу: монолитное целое с многими гранями. Её художественные качества, безусловно, способствовали её успеху как шедевр научной литературы.

При построении своих моделей Гильберт демонстрирует поразительную по разнообразию изобретательность.

Самыми интересными примерами мне кажутся, во-первых, тот, где он показывает, что теорема Дезарга не следует из аксиом инцидентности на плоскости, но аксиомы инцидентности на плоскости вместе с теоремой Дезарга позволяют вложить плоскость в пространство более высокой размерности, в котором будут выполняться все аксиомы инцидентности, и, во-вторых, тот пример, где он решает вопрос о необходимости аксиомы непрерывности Архимеда для того, чтобы восстановить все аксиомы конгруэнтности, исключив из них возможность отражений.

Из чего строятся модели? Клейнова модель неевклидовой геометрии может пониматься как демонстрация того, что любой, кто признает евклидову геометрию с её точками, прямыми и т.п., может равным образом получить и неевклидову геометрию простой сменой терминологии. Сам Клейн предпочитал другую интерпретацию в терминах проективного пространства. Однако аналитическая геометрия Декарта давно предлагала более общий и удовлетворительный путь, безусловно известный Риману, Клейну и многим другим: всё, что нам нужно для наших конструкций, – это поле вещественных *чисел*. Поэтому любое противоречие в евклидовой геометрии должно обязательно проявиться как противоречие в аксиомах арифметики, на которых основаны наши действия с вещественными числами. Никто до Гильберта так ясно этого не высказал. Он формулирует полный и простой список аксиом для вещественных чисел. Система арифметических аксиом обладает такими же заменяемыми частями, как и система геометрических аксиом. С чисто алгебраической точки зрения самыми важными аксиомами являются аксиомы (коммутативного или некоммутативного) *поля*. Любое такое абстрактное числовое поле может служить основой для построения соответствующих геометрий. *Vice versa* ¹⁹² можно определять числа и операции над ними, исходя из некоторого пространства, удовлетворяющего определенным аксиомам. Дезаргово *Streckenrechnung*, ¹⁹³ которым пользовался Гильберт, служило тому прекрасным примером. В общем случае этот обратный процесс намного сложнее. Чикагская школа Э.Г. Мура продолжила исследования Гильберта, а О. Веблен, в частности, много сделал для того, чтобы вскрыть полное соответствие между проективными пространствами, удовлетворяющими некоторым простым аксиомам инцидентности (без аксиом порядка), и абстрактно определяемыми числовыми полями. ¹⁹⁴

Буквально, вопрос о независимости есть вопрос о доказательстве невозможности вывода одного утверждения из других. При этом объектом исследования становятся сами утверждения, а не те объекты, к которым они относятся; предварительно же мы тщательно анализируем логический механизм дедукции. Метод моделей представляет собой удивительный трюк, позволяющий избавиться от такого рода логических исследований. Однако за этот отход от основной проблемы приходится дорого платить: мы сводим всё к вопросу непротиворечивости арифметических аксиом, который остается открытым. Аналогичным образом утверждение о *полноте*, буквально означающее, что каждое общее утверждение об объектах, участвующих в аксиомах, может быть выведено из них, заменяется на *категоричность* (по Веблену). Последнее

¹⁹² Наоборот (*лат.*). – *Прим. ред.*

¹⁹³ Исчисление отрезков (*нем.*). – *Прим. ред.*

¹⁹⁴ Среди более поздних достижений в этих вопросах я упомяну работу: Шван (W. Schwan), *Streckenrechnung und Gruppentheorie*, Math. Z. **3** (1919), 11–28. Полная библиография работ по аксиоматике геометрии после Гильберта заняла бы, по-видимому, много страниц. Я воздержусь от цитирования соответствующих имён. – *Прим. авт.*

означает, что любая возможная модель изоморфна одной-единственной модели, с помощью которой доказывалась непротиворечивость. В этом плане Гильберт доказывает, что существует только «одна», декартова геометрия, удовлетворяющая всем его аксиомам. Только в случае конечных проективных пространств Дж. Фано и О. Веблена, например проективной плоскости из семи точек, модель является чисто комбинаторной схемой и вопросы непротиворечивости, независимости и полноты могут быть решены в абсолютном смысле. Сам Гильберт, по-видимому, никогда не думал об иллюстрации своей концепции аксиоматического метода с помощью чисто комбинаторных схем, хотя они и представляют собой самые простые примеры.

Подход к основаниям геометрии, совершенно отличный от того, который был изложен в его книге, был предложен Гильбертом в одной работе, являющейся одним из самых ранних документов теоретико-множественной топологии. С точки зрения механики главной задачей для геометрии является возможность описания движения твердого тела. Такова была точка зрения Гельмгольца, охарактеризовавшего группы движения евклидова пространства с помощью нескольких простых аксиом. Эту проблему продолжал разрабатывать и Софус Ли в связи со своей общей теорией непрерывных групп. Теория Ли зависит от некоторых предположений дифференцируемости; в одной из своих Парижских проблем Гильберт предложил избавиться от них. В упомянутой работе ему это удалось в случае проблемы Гельмгольца для плоскости. Доказательство трудное и утомительное; вполне естественно, что теперь условие непрерывности кладется в основу определения и не играет той решающей роли, как это было в его «*Основах*». Другие авторы, Р.Л. Мур, Н.Дж. Леннес, В. Зюс, Б. фон Керекьярто, значительно разработали проблему, следуя этим топологическим соображениям. Быть может, будет интересно добавить немного личных воспоминаний. Гильберт определяет двумерное многообразие с помощью окрестностей, требуя выделения некоторого класса «допустимых» взаимно однозначных отображений каждой окрестности на некоторую жорданову область в декартовой плоскости, связанных друг с другом непрерывными преобразованиями. Когда в 1912 году я читал в Гёттингене курс по римановым поверхностям, я обратился к работе Гильберта и заметил, что сами эти окрестности могут служить определением этого класса отображений. Окончательное определение было дано затем Ф. Хаусдорфом; аксиомы Хаусдорфа определили лицо топологии.¹⁹⁵ (Однако, когда нам приходится определять дифференцируемое многообразие, мы до сего дня придерживаемся косвенного определения Гильберта; ср. О. Веблен и А.Н. Уайтхед, *Основания дифференциальной геометрии*, М., ИЛ, 1949.)

Фундаментальный вопрос об абсолютном доказательстве непротиворечивости аксиом, который должен был лечь в основу всего математического анализа и даже канторовской теории множеств во всей её безумной общности, постоянно находился в воображении Гильберта, о чем свидетельствует его доклад на международном конгрессе в Гейдельберге 1904 году. Из него видно, что он уже был на этом пути, хотя и далеко от цели. Затем наступило время, когда его всецело захватили интегральные уравнения, а позже физика. Спустя некоторое время, в 1917 году, послышался его громкий голос о старой проблеме в цюрихской речи *Axiomatisches Denken*.¹⁹⁶ К тому времени трудности, связанные с основаниями математики, достигли критического состояния и положение дел взывало о помощи. Под влиянием неотразимых парадоксов в теории множеств Дедекин и Фреге отказались от своей работы по природе чисел и арифметических утверждений: Бертран Рассел указал на иерархию типов, которые, не будучи «ограничены» грубой силой, подрывали арифметическую теорию континуума. Наконец, Л.Э.Я. Брауэр своим интуиционизмом открыл нам глаза и заставил увидеть, насколько общепринятая математика идет дальше таких утверждений, которые могут претендовать на реальный смысл и истинность, основанную на очевидности. Мне жаль, что в своей оппозиции Брауэру Гильберт никогда открыто не признал того большого долга, который он, равно как и другие математики, имел перед Брауэром за это открытие.

Гильберт не хотел приносить тяжелые жертвы, которых требовала точка зрения Брауэра. Он увидел, по крайней мере в общих чертах, тот путь, который позволит избежать этого жестокого увечья. В то же время он был обеспокоен признаками колебания в среде математиков, ряд которых открыто встал на сторону Брауэра. Моя собственная статья о *Grundlagenkrise*¹⁹⁷ в

¹⁹⁵ Параллельное развитие, во главе которого стоял Э.Г. Мур, происходило в Америке. Так как мне приходится писать главным образом по памяти, мой рассказ неизбежно окрашивается местными гёттингенскими традициями. – *Прим. авт.*

¹⁹⁶ Аксиоматическое мышление (нем.). – *Прим. ред.*

¹⁹⁷ Кризис оснований (нем.). – *Прим. ред.*

Math. Z. 10 (1921), написанная в первые беспокойные послевоенные годы в Европе, характерна для тех настроений. В результате всего этого Гильберт всерьёз возвращается к проблемам оснований. Он уверен, что абсолютная строгость может быть восстановлена без «совершения предательства нашей науки». В его голосе, произносящем «die Grundlagenfragen einfürallemal aus der Welt zu schaffen»¹⁹⁸, слышится гнев и решимость. «Запретить математику использовать принцип исключенного третьего, – говорит он, – всё равно что запретить астроному пользоваться телескопом или боксеру кулаками». Гильберт сознавал, что сами математические утверждения не могут стать объектами математического исследования, предназначенного доказать их непротиворечивость в первоначальном смысле, пока они не будут сведены к простым формулам. Алгебраические формулы типа $a+b=b+a$ представляют собой самые привычные примеры. Процесс логического вывода, с помощью которого первоначально полученные формулы дают новые формулы, должен быть описан без всякого упоминания значения этих формул. Этот процесс должен начинаться с некоторых основных формул, аксиом, которые должны быть явно выписаны. Так, в его *Основаниях геометрии* значение геометрических терминов стало несущественным, хотя смысловое значение таких логических терминов, как «и», «не», «если...», «то...», всё ещё сохранялось. Теперь же предлагалось уничтожить всякие следы наличия смысла. В частности, логические символы, такие, как $\rightarrow$ в $a \rightarrow b$ (читается: «из a следует b »), являются составной частью формул. Гильберт полностью согласен с Брауэром в том, что огромное большинство математических утверждений не имеет «реального» характера утверждений, передающих определенное содержание, основанное на очевидности. Однако он настаивает на том, что нереальные, «идеальные утверждения» необходимы для «полноты» нашей математической системы. Он противостоит Брауэру, который просил нас отбросить то, что не имеет смысла, тем, что полностью избавляется от притязаний на содержательность, пытаясь доказывать не истинность отдельного математического предложения, а непротиворечивость системы. Он уверен, что игра в дедукцию, проводимая по правилам, никогда не приведет к формуле $0 \neq 0$. В этом смысле и только в этом он обещает спасти взращенную нами классическую математику. Тем, кто обвиняет его в стремлении свести математику к сплошной игре, он прежде всего указывает на то, что введение идеальных элементов в целях полноты является общим методом во всех областях математики – например, идеальные точки вне достижимой области пространства, без которых последнее было бы неполным; далее он отмечает, что в смежной с математикой науке, физике, также сверяют с экспериментом не отдельные утверждения, а всю систему в целом.

Но как можно убедиться в том, что «дедуктивная игра» никогда не приведет к противоречию? Не придется ли нам это доказывать с помощью дедукции из аксиом, т.е. тем же математическим методом, справедливость которого мы подвергаем сомнению? Ясно, что это привело бы к регрессу *ad infinitum*.¹⁹⁹ Должно быть, Гильберту, как поборнику аксиоматического метода, было трудно признать, что вопрос о непротиворечивости приходилось решать с помощью *интуитивного рассуждения*, основанного не на аксиомах, а на очевидности. Однако, в конце концов, неудивительно, что окончательное слово должно оставаться за всевидящим интеллектом. Уже при сообщении правил игры нам приходится рассчитывать на него. Игра происходит без слов, но правила должны быть *сказаны*, а любое суждение об этой игре, в частности о её непротиворечивости, должно быть высказано *словами*. Кстати, описывая интуитивную основу для своей *Beweistheorie*,²⁰⁰ Гильберт демонстрирует выдающееся мастерство в этом, увы, столь неопределенном средстве сообщения, как язык. Относительно того, что он считает очевидным в своих «метаматематических» рассуждениях, Гильберт более авторитетен, чем сам папа римский, более требователен, чем Кронекер или Брауэр. Однако ничего нельзя поделаться с тем, что наше рассуждение о гипотетической последовательности формул, оканчивающейся формулой $0 \neq 0$, ведётся в гипотетической общности и использует очевидность такого сорта, которую формалист с презрением окрестил бы как приложение принципа полной индукции. Элементарная арифметика может быть основана на таких интуитивных рассуждениях, как это описано самим Гильбертом. Однако для введения бесконечности в полной мере, в которой она встречается в высшей математике, нам требуется формальный аппарат переменных

¹⁹⁸ Избавиться от вопросов оснований раз и навсегда (нем.). – Прим. ред.

¹⁹⁹ До бесконечности (лат.). – Прим. ред.

²⁰⁰ Теория доказательства (нем.). – Прим. ред.

и «кванторов». Тем самым, Гильберт предпочитает провести четкую границу: он становится строгим формалистом в математике и строгим интуиционистом в метаматематике.

По-видимому, стоит кратко объяснить, каким образом формализм Гильберта позволяет восстановить *принцип исключенного третьего*, служивший главным объектом критики Брауэра. Рассмотрим бесконечную последовательность чисел 0, 1, 2, ... Любое свойство A чисел (например, «быть простым») может быть представлено пропозициональной функцией $A(x)$ (« x простое»), из которой подстановкой конкретного числа b вместо переменной x можно получить конкретное утверждение $A(b)$ (« b простое»). Согласно принципу, отрицаемому Брауэром и которого хочет придерживаться Гильберт, имеем либо

существует число x , для которого справедливо утверждение $A(x)$,

либо

$A(x)$ не справедливо ни для какого x .

Принимая его, мы сможем найти некоторого «представителя» r для свойства A , т.е. такое число, что для любого числа b $A(b)$ влечет $A(r)$, $A(b) \rightarrow A(r)$. Действительно, в случае (а) мы возьмем за r одно из чисел x , для которых справедливо $A(x)$, а в случае (б) берем любое r . Так, Аристид является представителем честности, ибо, как говорили афиняне, если есть честный человек, то это – Аристид. Предполагая, что нам известен представитель, мы сможем решить вопрос, существует ли честный человек или все – нечестные; для этого нам всего лишь надо посмотреть *на него*: если он нечестен, то и все нечестны. В случае чисел мы даже можем сделать выбор представителя однозначным – в случае (а) мы берем за r *наименьшее* число, для которого справедливо $A(x)$, а в противоположном случае (б) берем $r=0$. Таким образом, r получается из A с помощью некоторого оператора ρ_x , $r = \rho_x A(x)$, который можно применить к любому мыслимому свойству A . Пропозициональная функция может содержать, кроме x , другие переменные $y, z, \dots$ Тем самым, к оператору ρ необходимо приписывать индекс x , точно так же как при интегрировании надо указывать, по какой переменной оно производится. Оператор ρ_x исключает переменную x ; например, $\rho_x A(x, y)$ есть пропозициональная функция от одного y . Оператор такого рода называется квантором. Итак, мы записываем нашу аксиому в виде

$$A(b) \rightarrow A(\rho_x A(x)). \quad 8)$$

При этом не обязательно выбирать представителя однозначным способом; наше конкретное правило действует лишь в случае, когда x пробегает множество чисел 0, 1, 2, ... Вместо этого мы будем считать, что квантор ρ_x обладает универсальной приложимостью и в каждом случае выбирает для нас некоторого представителя. Аксиома выбора Цермело оказывается, таким образом, вплетенной в принцип исключенного третьего. Это смелый шаг, но чем смелее, тем лучше; лишь бы быть уверенным, что мы остаемся в рамках непротиворечивости!

В формализме пропозициональные функции заменяются *формулами*, обращение с которыми должно быть описано без ссылок на их значение. В общем случае переменные $x, y, \dots$ будут встречаться среди символов некоторой формулы A . Мы говорим, что символ ρ_x *связывает* переменную x в формуле A , если он предшествует этой формуле,²⁰¹ и говорим, что x *свободна* в формуле A , если она не связана квантором с индексом x . При этом $x, y, \rightarrow, \rho_x$ представляют собой символы, входящие в формулу; готические буквы не применяются для обозначения таких символов, а используются для коммуникации. Нашу основную аксиому (8) более естественно рассматривать как правило для образования аксиом. Она выражает следующее: возьмите любую формулу A , в которой x является единственной свободной переменной, и любую формулу b без свободных переменных и с их помощью образуйте новую формулу

$$A(b) \rightarrow A(\rho_x A). \quad 9)$$

²⁰¹ Если мы хотим во всём дальнейшем буквально понимать правило « ρ_x связывает x », мы должны $a \rightarrow b$ записывать в виде

Здесь $A(b)$ обозначает формулу, полученную из A подстановкой всей формулы b на место переменной x всюду, где она входит свободно.

Таким образом, в соответствии с определенными правилами формулы могут быть *получены как аксиомы*. Дедукция основывается на правиле силлогизма: из двух формул a и $a \rightarrow b$, полученных ранее, первая из которых стоит слева от символа $\rightarrow$, мы *получаем* формулу b .

Каким образом предлагает Гильберт убедиться в том, что дедуктивная игра никогда не приведет к формуле $0 \neq 0$? Вот его основная идея. Пока мы имеем дело только с «конечными» формулами, т.е. с формулами, не содержащими кванторов $\rho_x, \rho_y, \dots$, вопрос об их истинности или ложности можно решить, просто посмотрев на них. С присутствием ρ такое описательное суждение о формулах становится невозможным – самоочевидность больше не работает. Однако любая конкретная дедукция представляет собой последовательность формул, в которых участвует только конечное число аксиоматических правил типа (9). Предположим, что ρ_x является единственным квантором и всюду, где он встречается, за ним следует *одна и та же конечная* формула A . Другими словами, мы имеем дело с формулами типа (9):

$$A(b_1) \rightarrow A(\rho_x A), \dots, A(b_h) \rightarrow A(\rho_x A). \quad (10)$$

Предположим, кроме того, что формулы $b_1, \dots, b_h$ конечны. В этом случае можно произвести *приведение*, заменяя формулу $\rho_x A$ каждый раз, когда она встречается в нашей последовательности, некоторой конечной формулой r . В частности, формулы (10) примут вид

$$A(b_1) \rightarrow A(r), \dots, A(b_h) \rightarrow A(r). \quad (11)$$

Теперь мы видим, как нужно выбирать r : если мы последовательно просматриваем конечные формулы $A(b_1), \dots, A(b_h)$ и обнаруживаем, что одна из них, скажем $A(b_3)$, истинна, то мы принимаем b_3 . Если же все они ложны, то мы берём r наугад. Таким образом, все приведённые формулы (11) «истинны» и наше предположение о том, что дедукция ведет к ложной формуле $0 \neq 0$, приводит к *противоречию*. Основным здесь является то, что в конкретной дедукции встречается только конечное число явно указанных составляющих $b_1, \dots, b_h$. Если мы ошибочно выберем, например, Алкивиада вместо Аристиды как представителя неподкупности, то наша ошибка не будет иметь последствий, если только те немногие из людей (из бесконечной толпы афинян), с которыми мы имеем дело, все являются подкупными.

Немного более сложным, будет случай, когда мы разрешим, чтобы формулы $b_1, \dots, b_h$ содержали ρ_x , считая, однако, что за ним всегда следует одна и та же формула A . В этом случае мы сначала сделаем *пробную* редукцию, заменив $\rho_x A$, скажем, числом 0. После этого формулы $b_1, \dots, b_h$ заменятся редуцированными конечными формулами $b_1^0, \dots, b_h^0$, а формулы (10) – формулами

$$A(b_1^0) \rightarrow A(0), \dots, A(b_h^0) \rightarrow A(0).$$

Такая редукция вполне пригодна, если только $A(0)$ не будет ложна и в то же время одна из формул $A(b_1^0), \dots, A(b_h^0)$, скажем $A(b_3^0)$, истинна. Но тогда мы сможем взять b_3^0 как вполне законного представителя формулы A , и со второй редукцией, заменяющей $\rho_x A$ на b_3^0 , снова всё будет в порядке.

Однако это только самые первые трудности, которые нас ожидают. Кванторы $\rho_x, \rho_y, \dots$ с различными переменными, применённые к различным формулам, встанут перед нами, нагромождаясь друг на друга. Мы сделаем пробную редукцию, которая в некоторых местах может и не пройти; эта неудача научит нас, как её исправить. Однако исправленная редукция может не пройти в других местах. Создается впечатление, что мы находимся в замкнутом круге, и возникает вопрос, каким образом надо делать последовательные редукции, чтобы быть уверенным, что окончательная редукция будет хорошей во всех местах нашей последовательности формул. Ничто так не способствовало прояснению замкнутого характера обычных трансфинитных рассуждений в математике, как эти попытки убедиться в непротиворечивости, несмотря на все порочные круги.

Символизм для формализации математики, а также общий подход и первые попытки доказательства непротиворечивости принадлежат Гильберту. Своей дальнейшей разработкой эта программа обязана его молодым сотрудникам П. Бернайсу, В. Аккерману и Дж. фон Нейману. Последние два доказали непротиворечивость «арифметики», вернее, той её части, которая ещё обходится без опасной аксиомы о превращении предикатов в множества. Одно время казалось, что этот пробел незначителен, и уже разрабатывались подробные планы для проникновения в

анализ. Затем произошла катастрофа: допуская, что непротиворечивость уже установлена, К. Гёдель указал способ построения арифметических утверждений, истинность которых очевидна, но которые тем не менее не выводятся в рамках формализма. Его метод применим как к гильбертову, так и к любому другому, не слишком ограничительному формализму. Из двух совокупностей, первая из которых состоит из всех формул, получаемых в формализме Гильберта, а вторая – из всех реальных утверждений, истинность которых очевидна, ни одна не содержит другую (при условии, что непротиворечивость формализма может быть установлена). Очевидно, что вопрос о *полноте* формализма в том абсолютном смысле, в котором его видел Гильберт, был тем самым снят. Когда позже Г. Генцен восполнил пробел в доказательстве непротиворечивости арифметики, существенность которого была обнаружена открытием Гёделя, ему пришлось это сделать с помощью значительного снижения требований Гильберта к очевидности.²⁰² Границы того, что заслуживало доверия с интуитивной точки зрения, вновь стали неопределенными. Так как защита отчизны-арифметики поглотила все силы, наступление на анализ так и не началось, не говоря уже об общей теории множеств.

В таком положении эта проблема находится в настоящее время; никакого окончательного решения не видно. Но независимо от того, что принесет будущее, нет никакого сомнения в том, что Брауэр и Гильберт подняли проблему оснований математики на новый уровень. О возвращении на позиции *Principia Mathematica* Рассела и Уайтхеда не может быть и речи.

Гильберт – поборник аксиоматического метода. Он считал, что этот метод имеет универсальное значение не только в математике, но и во всех науках. Его исследования в области физики пронизаны аксиоматическим духом. В своих лекциях он любил иллюстрировать этот метод примерами из биологии, экономики и т.д.

Современная эпистемологическая интерпретация науки испытала большое влияние его идей. Временами, когда он восхвалял аксиоматический метод, казалось, будто он хочет сказать, что этот метод полностью вытеснит конструктивный или генетический метод. Я уверен, что, по крайней мере в поздние его годы, это не было его настоящим мнением. Хотя исходные математические объекты он вводит с помощью аксиом своей символической системы, формулы строятся им в самом явном и конечном виде. В последнее время аксиоматический метод распространился на все ветви математического дерева. Одна из них, алгебра, насквозь пронизана аксиоматическим духом. Аксиомы играют здесь, можно сказать, служебную роль, являясь средством для определения области изменения переменных, участвующих в явных конструкциях. Однако нетрудно представить себе картину и по-другому, что именно они являются основными действующими лицами. Нейтральная точка зрения отдает должное как той, так и другой стороне; немалая доля привлекательности современных математических исследований обязана счастливому сочетанию аксиоматического и генетического методов.

²⁰² G. Gentzen, Math. Ann. **112** (1936), 493–565. [Русский перевод: Г. Генцен, *Непротиворечивость чистой теории чисел*, сб. «Математическая теория логического вывода», М., «Наука», 1967, 77–153.] – Прим. авт.

Марина Ипатьева. Основания геометрии

Я подготовила издание Первой книги «Начал» Евклида с комментариями Мордухай-Болтовского в том виде, как это представлено выше, и приступила к комментированию этих текстов в духе Веданской теории. В этом комментировании я дошла до шестого предложения Евклида, когда мое занятие было внезапно прервано письмом от академика Ю.Г. Решетняка; необходимость написания ответов ему оторвала меня от дальнейшего продвижения по текстам Евклида и Мордухай-Болтовского; к этому присоединилась еще и поломка компьютера, его ремонт и необходимость после этого переинсталлировать и заново настраивать операционную систему и все прикладные программы.

В результате, Женя-Меммий, мне не удалось завершить этот том с твоей фотографией впереди преподнести тебе прямо 1 сентября, как было задумано. (Ну ничего, получишь хоть с опозданием).

Честно говоря, Женька, твой облик в моих глазах сильно полинял после вступления в битву академика Решетняка. Кто ты? – просто мямля, не способный выдать из себя ни слова, а он хоть и говорит много глупостей, но всё-таки хоть что-то говорит. Поэтому настоящую статью я адресую не только тебе, но также и ему, тем более, что в Википедии написано, что он тоже занимался геометрией.

Я не стала возвращаться к комментированию Евклида и Мордухай-Болтовского, от которого меня так внезапно оторвали. В принципе дальнейшие комментарии были бы довольно однообразны: есть некоторая совокупность продуктов конструкторских программ; Евклид что-то утверждает об этих продуктах; в доказательствах он использует новое конструирование дополнительными программами и опирается на прежде полученные знания о подобных продуктах. Эти доказательства дедуктивны, но в начале дедуктивной цепочки у Евклида стоят не аксиомы, а некоторые элементарные знания о продуктах конструкторских программ.

Если я когда-нибудь вернусь к комментированию приведенных выше текстов, то новые комментарии, чтобы отличить их от тех, что существовали до момента Перелома, буду снабжать датами написания. А пока что я весь предыдущий материал оставляю в том состоянии, в каком он находился в момент вступления в бой академика Решетняка, и добавляю здесь только общее подведение итогов:

1. Евклид не создал и не имел цели создавать аксиоматический метод. Слова Вейля

Греки представляли себе геометрию как дедуктивную науку, которая занимается чисто логическими выводами из небольшого количества заранее установленных аксиом. Этой программы придерживались как Евклид, так и Гильберт.

не соответствуют действительности и являются проекцией его собственных (и вообще современной математики) взглядов на античную эпоху.

2. Весь образ мышления Евклида и способ изложения им материала свидетельствуют, что перед его глазами стояли не аксиомы, а мозговые программы, хотя, разумеется, в то время этот предмет геометрии не мог быть назван по имени и четко описан.

3. Даже всё свое изложение Евклид начал в первых трех предложениях с демонстрации принципов вложенности программ, каковая демонстрация вызвала большое недоумение у сторонников аксиоматического метода.

4. Построение геометрии как науки разворачивается над полем различных продуктов мозговых программ. Здание этой науки есть хранилище сведений о соотношениях между этими продуктами.

5. При этом некоторые знания (некоторые соотношения, например, те, о которых говорит теорема Пифагора) не являются «очевидными», т.е. человеческий мозг без специальной процедуры доказательства не может обнаружить и констатировать данное соотношение.

6. Процедура доказательства дает мозгу это знание (констатирует данное соотношение), опираясь на ранее полученные знания. Так образовывается (дедуктивная) цепочка доказательств.

7. В начале этой дедуктивной цепочки стоят такие знания о продуктах мозговых программ, которые мозг может констатировать непосредственно сам, без доказательства. Они называются «очевидными».

8. Но эти знания не есть аксиомы в том смысле, как их понимает современная математика. Хорошо это иллюстрируют слова Гильберта, приводимые Вейлем:

«Следует добиться того, чтобы во всех геометрических утверждениях слова *точка, прямая, плоскость* можно было заменить словами *стол, стул, кружка*».

Нет! Это фундаментально ошибочная установка, которая приведет математику в тупик (наиболее ярким проявлением которого для самих математиков являются теоремы Гёделя).

9. Наоборот: следует добиваться того, чтобы мозговые программы вышли из тысячелетней тени и стали в явном виде рассматриваться и обсуждаться.

10. Вместо аксиоматического построения «Grundlagen der Geometrie» нужно создавать некоторую «каноническую форму» тех мозговых программ, которыми геометрия порождена. Реальные программы очень разнообразны, поэтому в качестве «канонического» нужно брать некоторый усредненный их вариант и описать его средствами, похожими на алгоритмические языки, применяемые в программировании.

11. Вместо исследования того, от каких аксиом что зависит, нужно исследовать, от каких программ что зависит.

12. Аксиомы геометрии (например, аксиомы Гильберта), конечно, отражают некоторые фундаментальные соотношения в продуктах мозговых программ. Но то, что они оторваны от реального, материального предмета, который они (на самом деле) призваны описывать, является не их достоинством – как полагали Гильберт и его последователи, – а их крупным недостатком.

13. Никогда НЕЗНАНИЕ предмета, о котором мы рассуждаем, не может быть лучше ЗНАНИЯ этого предмета. А аксиоматический метод во-первых, сам порожден незнанием подлинного предмета, и, во-вторых, означает попытку узаконения этого незнания.

14. По аксиомам Гильберта (или по любым другим) невозможно построить геометрию (способность мыслить о геометрии) в голове робота, а по знаниям о мозговых программах – можно.

15. Само то пространство, в котором действуют мозговые конструкторские программы геометрии, НЕ является физическим пространством (которое, как известно из теории относительности, отнюдь не трехмерно-евклидово).

16. Трехмерное евклидовое пространство – «сцена» евклидовой геометрии – тоже является продуктом мозговых программ – пространством топокодера.

Таковы подлинные основания геометрии.

Марина Ипатьева

2 сентября 2014 года

Научно-популярное издание
«Мысли об Истине»
Выпуск № 24
Сформирован 2 сентября 2014 года

Все читатели приглашаются принять участие в создании альманаха МОИ и присылать свои статьи и заметки для этого издания по адресу: Marina.Olegovna@gmail.com. Если присланные материалы будут соответствовать направлению Альманаха и минимальным требованиям информативности и корректности, то они будут опубликованы в нашем издании.

Основной вид существования Альманаха МОИ – в виде PDF-файлов в Вашем компьютере. Держите все выпуски МОИ в одной папке. Скачать PDF-ы можно с разных мест в Интернете, и не важно, откуда номер скачан. В Интернете нет одной фиксированной резиденции МОИ.

Содержание

Декларация Троицкого	2
<i>Евклид. Начала, книга I</i>	4
§1. Предисловие переводчика.....	4
Часть 1. Определения, постулаты, аксиомы.....	6
§2. Определения (1)	6
§3. Комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского.....	7
§4. Постулаты (18)	17
§5. Общие понятия (24)	17
§6. Комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского.....	18
§7. Комментарии Марины Ипатьевой.....	28
Часть 2. Предложения 1 – 16.....	39
§8. Предложение 1 (29, 30).....	39
§9. Предложение 2	42
§10. Предложение 3	42
§11. Предложение 4	43
§12. Предложение 5	44
§13. Предложение 6	48
§14. Предложение 7	50
§15. Предложение 8	50
§16. Предложение 9	52
§17. Предложение 10	54
§18. Предложение 11	54
§19. Предложение 12	56
§20. Предложение 13	56
§21. Предложение 14	57
§22. Предложение 15	58
§23. Предложение 16	58
Часть 3. Предложения 17 – 32.....	60
§24. Предложение 17	60
§25. Предложение 18	60
§26. Предложение 19	61
§27. Предложение 20	62

§28. Предложение 21	62
§29. Предложение 22	63
§30. Предложение 23	64
§31. Предложение 24	64
§32. Предложение 25	65
§33. Предложение 26	66
§34. Предложение 27	68
§35. Предложение 28	69
§36. Предложение 29	69
§37. Предложение 30	73
§38. Предложение 31	73
§39. Предложение 32	73
Часть 4. Предложения 33 – 48.....	76
§40. Предложение 33	76
§41. Предложение 34	76
§42. Предложение 35	77
§43. Предложение 36	78
§44. Предложение 37	79
§45. Предложение 38	79
§46. Предложение 39	80
§47. Предложение 40	80
§48. Предложение 41	81
§49. Предложение 42	81
§50. Предложение 43	82
§51. Предложение 44	82
§52. Предложение 45	83
§53. Предложение 46	84
§54. Предложение 47	85
§55. Предложение 48	88
<i>Герман Вейль. Аксиоматика Гильберта</i>	<i>90</i>
Аксиоматика	90
<i>Марина Ипатьева. Основания геометрии.....</i>	<i>97</i>
Содержание	99