NATURA CUPIDITATEM INGENUIT HOMINI VERI VIDENDI
Marcus Tullius Cicero
(Природа наделила человека стремлением к познанию истины)

Мысли
Об
Истине

Альманах «**МОИ**»
Электронное издание, **ISBN 9984-688-57-7**

Альманах «Мысли об Истине» издается для борьбы с лженаукой во всех ее проявлениях и в поддержку идей, положенных в основу деятельности Комиссии РАН по борьбе с лженаукой и фальсификацией научных исследований. В альманахе публикуются различные материалы, способствующие установлению научной истины и отвержению псевдонаучных заблуждений в человеческом обществе.

Альманах издается с 8 августа 2013 года
Настоящая версия тома выпущена **2015-10-08**

Марина Ипатьева. Лженаука в математике

Казалось бы: Ну какую лженауку можно создать в рамках такой научной дисциплины, как математика!?

Ведь 2 × 2 = 4, и здесь всё до предела ясно, очевидно, не требует никаких гипотез и экспериментов; все истоки знания и все их следствия у всех на виду. Естественно ожидать, что и дальнейшие математические факты будут иметь такую же несомненность, и если даже они иногда и не сразу очевидны, то для выяснения истины существуют доказательства – вещь столь же ясная и несомненная. Откуда тут взяться лженауке? Как только кто-то скажет, что 2 × 2 = 5, так все его просто засмеют!

Но не тут-то было! Люди с туманным мышлением и склонностью ко всякой мистике умудрились даже в математику привнести фантастические вещи, сродни астрологии, телекинезу и спиритизму. И, что самое главное, не только привнесли, но и заставили «официальную математическую науку» эти фантастические вещи (вопреки шквалу первоначальных протестов) признать истиной и принять так, что теперь это в сотнях университетов тысячами профессоров преподается студентам как незыблемая математическая истина, да еще и чрезвычайно важная!

Подавлены и замолкли все крики о том, что 2 × 2 ≠ 5; теперешние поколения молодых людей уже «с молоком матери» усваивают, что 2 × 2 = 5, и потом уже всю дальнейшую жизнь им это будет казаться вещью само собой разумеющейся и не нуждающейся ни в каком пересмотре.

Только вместо положения «2 × 2 = 5» стоит положение «мощность континуума больше мощности счетного множества», краеугольный камень т.н. «канторовской теории множеств».

Ниже я помещаю подборку текстов Валдиса Эгле по этому вопросу, написанных в разное время, и там это дело рассмотрено со всех сторон, дан разбор оригинальных статей самого Георга Кантора и т.д. Не буду повторять приводимые там детали, но в качестве Введения к тем материалам обрисую проблему «с птичьего полета».

В первую очередь в «канторовской теории множеств» нужно различать две части. Одна часть – это применение самого понятия множества; оно плодотворно и нами не оспаривается. Эта часть в Веданской теории (ВТ)[1] называется **квантуализмом**. Вторая часть – это учение о якобы различающихся мощностях бесконечных множеств (и дальше о трансфинитных числах и т.д.). Вот эта часть и есть лженаука. Она в ВТ называется **канторизмом** (а последователи канторизма называются **кантористами**). Канторизм нами отвергается, и рассмотрим вкратце, почему.

Всё это дело начинается с ввода Кантором понятия «взаимно однозначного соответствия». Кантор сам дает пример: сопоставление всех натуральных чисел и четных чисел:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
2	4	6	8	10	12	14	16	18	...

Обе последовательности (оба множества) бесконечны, процесс сопоставления можно продолжать сколько угодно, и этот факт резюмируется как то, что установить взаимно однозначное соответствие можно.

Но это взгляд поверхностный, это первый шаг, ведущий к роковым логическим ошибкам и к лженаучным построениям. Более точным является следующий взгляд.

Здесь имеют место два разных случая.

1) Первый случай (назовем его **зависимым соответствием**) – это когда мы всё время рассматриваем второе множество как отобранное из первого, зависящее от него:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
2	4	6	8	...					

[1] Подробнее об этой теории будет рассказано в следующих выпусках Альманаха.

В этом случае во втором множестве имеются только те числа, которые «уже готовы» в первом множестве; тогда во втором множестве в два раза меньше чисел, чем в первом, и взаимно однозначное соответствие установить нельзя.

2) Второй случай (назовем его **независимым соответствием**) – это когда оба множества мы рассматриваем как не зависящие одно от другого; оба они бесконечны, и взаимно однозначное соответствие установить можно:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
2	4	6	8	10	12	14	16	18	...

Мы не запрещаем ни первый, ни второй случай; мы только требуем, чтобы они оба были на виду, и всегда различались. Очевидно, что Кантор использует второй случай.

Особенность мышления кантористов состоит в том, что они требуют, чтобы всегда говорили и думали только о втором случае, а о первом случае думать, знать и помнить чтобы было запрещено! Они сами ведут себя так, будто только второй взгляд на предмет и существует, и требуют от других, чтобы те тоже вели себя так же.

Если пользоваться независимым соответствием, то «взаимно однозначное соответствие» можно установить между любыми двумя бесконечными множествами – и поэтому такое понятие вообще-то бесплодно и пусто.

Но кантористы думают, будто они нашли такие бесконечные множества, между которыми установить взаимно однозначное соответствие нельзя. Этот вывод они получают таким образом: из предположения о том, что такое соответствие установлено, якобы вытекает противоречие. Вот это противоречие и есть самый самый узловой момент всей их постройки – ложной постройки.

Как спиритическим «медиумам» в книге Хэнзела жизненно необходима была темнота,[2] чтобы можно было проделывать их фокусы, так и кантористам жизненно необходима туманность понятий, чтобы они могли получить свое «противоречие». Как только зажечь свет, все чудеса «медиумов» исчезают, и как только у кантористов уточнить ситуацию и уточнить понятия, так их «противоречие» сразу пропадает.

Оказывается, что они перескочили от независимого соответствия к зависимому и теперь тайком им пользуются (что им дается очень легко, поскольку об этом понятии было запрещено даже думать). Оказывается, что их «диагональный элемент» вовсе не строится, или же, если строится, то имеется среди перенумерованных так, что никакого противоречия не возникает.

Я не буду перебирать здесь все варианты логических ошибок кантористов – они детально разбираются в приводимых ниже текстах. Канторовское «противоречие» изворотливо, как привидение, и может жить только в потемках туманного мышления. А при свете логики на том месте, где обитали канторовские призраки, открывается простая, ясная и четкая картина реальной ситуации. И в этой истинной ситуации никакой лестницы алефов и никаких «трансфинитных кардинальных чисел» – нет.

Тогда возникает вопрос: как это могло получиться, что математики (или, скорее, это не математики, а «математики») нагородили ТАКУЮ белиберду, да еще и отстаивают ее с важным и умным видом! Действительно, тут есть над чем подумать!

Сам Георг Кантор, как известно, был психически больным, и это его полностью оправдывает. Он, так сказать, «невменяем». Его воздушные замки – это бред психически больного человека. (Кантор был болен маниакально-депрессивным психозом; в маниакальной фазе болезни он строил свои учения, а в депрессивной фазе впадал в уныние и вообще не работал).

Первоначально учение Кантора получило жесткий отпор – тогда еще настоящие математики не перевелись. Но что случилось потом? Как потом этот бред стал «математической истиной»? Тут можно приводить много догадок, перечислять многие факторы, но в любом случае очевидно одно: это несомненно было связано с началом общего кризиса математики, с потерей ею ориентиров, потерей фундамента под ногами.

Этот фундамент математике возвращает Веданская теория, но об этом разговор у нас будет в другом месте. Сейчас же нам надо разобраться с канторизмом вне связи с ВТ.

Валдис Эгле, автор ВТ, выступал против канторизма с молодости. Первое публичное выступление состоялось 16 февраля 1981 года, и потом эта борьба продолжалась 32,5 года (!). За

---

[2] MOI_003.PDF, стр. 104.

такой период к этой борьбе стали причастны сотни докторов наук и профессоров, которые были в курсе дела и имели возможность высказаться, если бы руководствовались научной этикой.

Но никто из них научной этикой не руководствовался. Под конец этого 32-летнего срока Валдис Эгле, отчаявшись и озлобившись, говорил мне: «Мы имеем дело не с учеными, а с бандой негодяев!».

Сколько в России и вообще в русскоязычном мире имеется профессоров, рассказывающих студентам в университетах о канторовской теории множеств? Я не знаю их числа, но условно примем, что их тысяча.

Так вот, я сейчас обращаюсь к этой тысяче профессоров. Я обращаюсь лично к Вам, тот профессор из этой тысячи, который сейчас читает эти строки.

Вы до сих пор рассказывали студентам то, что Вы рассказывали, – и то, что теперь общепринято. Это можно считать Вашим добросовестным заблуждением и не ставить Вам в вину. Но теперь перед Вами находятся материалы настоящего тома. И Вы уже не можете оставаться в своем прежнем умственном состоянии.

Научная этика требует от Вас, чтобы Вы сделали одно из двух:

1) либо указали, чтó в этих материалах неправильно, в чем состоит их ошибочность,

2) либо признали их правильными, и тогда отказались от того, что Вы преподаете студентам в отношении «теории множеств».

Если же Вы будете увиливать от этого выбора (а именно так в течение 32 лет и вело себя большинство тех, кого Валдис Эгле назвал «бандой негодяев»), то Вы из добросовестно заблуждающегося становитесь злостным мошенником, намеренно преподающим студентам ложь. Вы тогда становитесь вором, крадущим те деньги, которые Вам платят за то, чтобы Вы давали студентам истину, – платит государство, какие-то фонды или сами студенты.

И тогда Вы не можете рассчитывать, что с Вами будут обращаться иначе, чем того заслуживает мошенник и вор.

Перчатка брошена, тысяча профессоров!

Делайте свой выбор между указанными выше двумя возможностями, если хотите считаться порядочными людьми!

Неужели вы не способны разобраться в таком простом вопросе?!

Вас – тысяча, а я теперь – одна.

Марина Ипатьева

17 сентября 2013 года

В начале подборки материалов я помещаю научно-популярную статью Джозефа Даубена «Георг Кантор и рождение теории трансфинитных множеств» из журнала «В мире науки» 1983 года. Она – и мои комментарии к ней – должны ввести нас в основную проблематику нашей темы.

Джозеф У. Даубен.
Георг Кантор и рождение теории трансфинитных множеств

«В мире науки»
Scientific American · Издание на русском языке[3]
№ 8 · Август 1983 · С. 76–86
http://www.ega-math.narod.ru/Singh/Cantor.htm

Насколько велико бесконечное множество? Кантор доказал существование иерархии бесконечностей, каждая из которых «больше» предшествующей.[4] Его теория множеств – один из краеугольных камней математики[5]

Природа бесконечности всегда была предметом спора. О том, что она интересовала ещё древних мыслителей, свидетельствуют знаменитые парадоксы Зенона Элейского, который доказывал, что движение мыслить невозможно, поскольку движущийся объект проходит бесконечное число точек в конечное время. Разработанное Ньютоном в XVII в. исчисление бесконечно малых позволило по-новому подойти к описанию движения, однако математически строгая формулировка инфинитезимальных идей была предложена лишь спустя два с лишним столетия. Впоследствии проблемы, связанные с бесконечностью, стали рассматриваться в теории множеств, ставшей по существу фундаментом современной математики. Следует отметить, что в ходе своего развития идея бесконечности имела теологический оттенок, порой игравший определённую роль в решении вопроса о приемлемости математических и философских теорий, связанных с понятием бесконечности. Всё сказанное имеет отношение к жизни и деятельности немецкого математика Георга Кантора.

Сущность трудов Кантора хорошо известна: разработав то, что он назвал арифметикой трансфинитных чисел, он придал математическое содержание идее актуальной бесконечности. При этом он заложил основы теории абстрактных множеств и внёс существенный вклад в основание анализа и в изучение континуума вещественных чисел. Самое замечательное достижение Кантора состояло в доказательстве того, что не все бесконечные множества количественно эквивалентны, т.е. имеют одинаковую мощность, а потому их можно сравнивать друг с другом. Например, множество точек прямой и множество всех рациональных чисел являются бесконечными. Кантор сумел доказать, что мощность первого множества превосходит мощность второго. Идеи Кантора оказались столь неожиданными и противоречащими интуиции, что знаменитый французский математик Анри Пуанкаре назвал теорию трансфинитных чисел «болезнью», от которой математика должна когда-нибудь излечиться. Леопольд Кронекер – учитель Кантора и один из самых авторитетных математиков Германии – даже нападал на Кантора лично, называя его «шарлатаном», «ренегатом» и «растлителем молодежи».

---

[3] **МОИ:** Хотя переводчик данной статьи написал много примечаний к ней с выраженным собственным мнением, но его имя в журнальной публикации не указано.

[4] **МОИ:** Если пользоваться понятием <u>зависимого</u> соответствия, то (бесконечная!) «иерархия бесконечностей» была известна уже задолго ДО Кантора – та, которую можно образовать по правилу Лопиталя. Кантор именно <u>отказался</u> от этой иерархии своим вводом <u>независимого</u> соответствия. А потом он «доказал» новую иерархию таким путем, что тайком (и незаметно для самого себя и для его читателей) вернулся обратно к зависимому соответствию. Если оставаться последовательно при независимом соответствии, то никакой «иерархии бесконечностей» нет. Если же использовать зависимое соответствие, то иерархия была уже до Кантора. Так что Кантор здесь ничего, кроме путаницы, не создал.

[5] **МОИ:** «Одним из краеугольных камней математики» является само использование понятия множества (квантуализм). А учение о «иерархии бесконечностей» (канторизм) НЕ является «краеугольным камнем математики». Это лженаука, толкующая о несуществующих вещах, точно так же, как астрология толкует о влиянии звезд на судьбу человека или как парапсихология толкует о психокинезе.

Известно также, что Кантор был подвержен «нервным заболеваниям», участившимся с возрастом и всё более ослаблявшим его. Эти расстройства были, по-видимому, симптомами болезни мозга. Недавнее исследование английского историка математики Айвора Граттана-Гинеса, опиравшегося на анализ истории болезни Кантора, хранящейся в психиатрической лечебнице в Галле (ГДР), говорит о том, что Кантор страдал маниакально-депрессивным психозом. Тем не менее для ранних биографов Кантора характерно стремление представить учёного, пытавшегося защитить свою сложную теорию, но всё более подверженного длительным нервным расстройствам, несчастной жертвой гонений со стороны современников.

Такие представления искажают истину, сводя к тривиальности действительные интеллектуальные устремления непредвзято мыслящих противников канторовской теории. Они также умаляют силу и широту защиты Кантором своих идей. Сначала он воздерживался от введения трансфинитных чисел, считая, что идею актуальной бесконечности нельзя сформулировать непротиворечиво, а потому ей не место в строгой математике. Однако, по его собственному свидетельству, он вскоре преодолел своё «предубеждение» в отношении трансфинитных чисел, ибо понял, что без них нельзя построить теорию бесконечных множеств. Собственные первоначальные сомнения позволили Кантору предвосхитить оппозицию с разных сторон и вооружиться как философскими и теологическими, так и математическими аргументами. Более того, отстаивая свою теорию, он сумел придать идеям, лежащим в её основе, значительную силу.

*

Рис.1. Фотография Кантора и его жены (примерно 1880 г.). К этому времени его работы уже получили известность. В одной из них он доказал, что бесконечное множество действительных чисел, представленное континуумом точек на прямой, больше бесконечного множества всех рациональных чисел. Он показал также, что можно определить бесконечные величины, названные трансфинитными числами, которые описывают такое различие. Через несколько лет после того, как был сделан этот снимок, Кантор испытал сильный приступ маниакально-депрессивного психоза, который в конце концов положил конец его творческому пути в математике. Оригинал этой фотографии находится в частной коллекции Эгберта Шнайдера.

Георг Фердинанд Людвиг Филипп Кантор родился 3 марта 1845 г. в России, в Санкт-Петербурге. Его мать, Мария Анна Бём, происходила из семьи талантливых музыкантов; наиболее известным был её дядя Жозеф Бём, директор консерватории в Вене и основатель школы скрипачей, откуда вышли многие виртуозы того времени. Его отец Георг Вольдемар Кантор был удачливым коммерсантом и благочестивым лютеранином, передавшим сыну глубокие религиозные убеждения. В своей популярной книге «Люди математики», впервые опубликованной в 1937 г., Э. Белл отмечает, что причиной психических расстройств, которым был подвержен Кантор, является Эдипов комплекс. Однако сохранившиеся письма и другие свидетельства об отношениях Георга с отцом указывают на совершенно противоположное. Отец был чутким человеком, внимательным к своим детям и проявлял особый, но ненавязчивый интерес к воспитанию старшего сына.

Когда Кантор был ещё ребёнком, семья переехала из России в Германию, и именно там началось его обучение математике. Защитив в 1868 г. диссертацию по теории чисел, он получил степень доктора в Берлинском университете. Два года спустя он занял должность приват-доцента в Университете в Галле – респектабельном учреждении, но не столь престижном для математиков, как университеты в Гёттингене или Берлине. Один из его коллег в Галле, Генрих Эдуард Гейне, работал в то время над теорией тригонометрических рядов, и он побудил Кантора заняться сложной проблемой единственности таких рядов. В 1872 г. в возрасте 27 лет Кантор опубликовал статью, содержавшую весьма общее решение этой проблемы, в которой он использовал идеи, выросшие впоследствии в теорию бесконечных множеств.

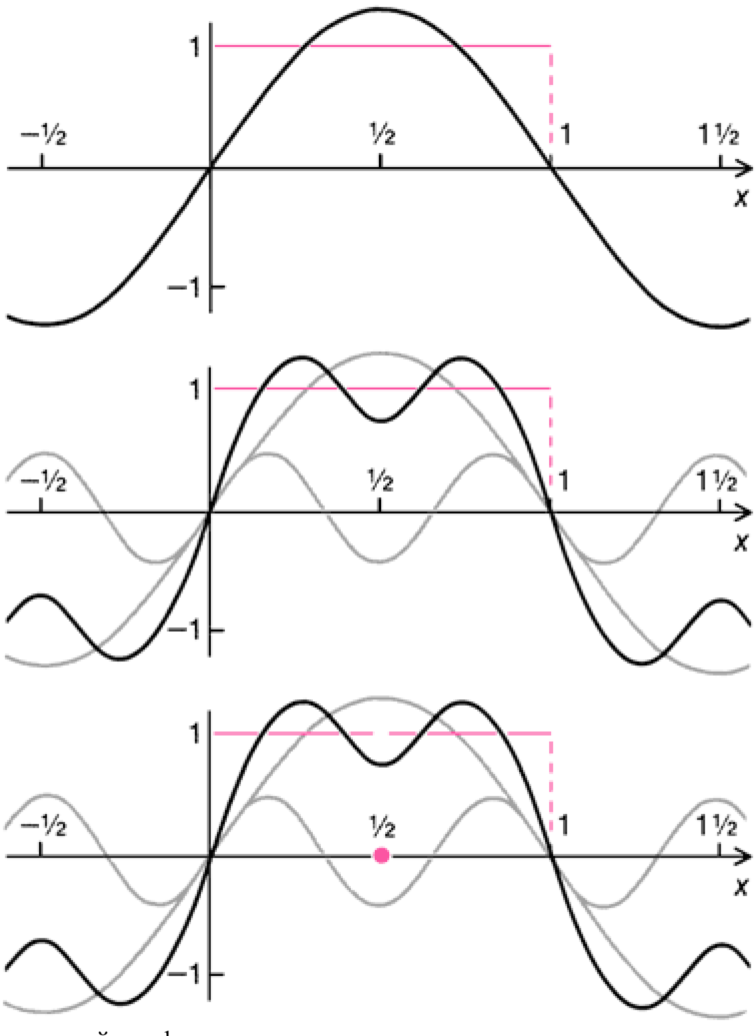


Рис.2. Гладкий непрерывный график, ординаты точек которого зависят от значений соответствующих точек на оси *x*, можно с любой требуемой точностью аппроксимировать тригонометрическим рядом, т.е. суммой синусов и косинусов. Например, прямая горизонтальная линия, отстоящая на единицу длины вверх от оси *x* (*цветная*), может быть аппроксимирована наложением синусоидальных колебаний (*серые кривые*); изображены две первые стадии аппроксимации (*чёрные кривые наверху и в середине*). Тригонометрический, аппроксимирующий график является единственным. Однако, даже если график не непрерывен, его часто можно аппроксимировать единственным тригонометрическим рядом. Например, если ординаты точек графика равны всюду единице, за исключением точки $x = ½$, то тригонометрический ряд, сходящийся к непрерывной линии, сходится и к ломаной линии, за исключением точки $x = ½$, (*внизу*). Кантор показал, что график можно аппроксимировать единственным тригонометрическим рядом, даже если число точек, в которых график не непрерывен, бесконечно, при условии, что точки разрыва распределены на оси *x* некоторым специальным образом.

Проблема, подсказанная Гейне, проистекает из трудов французского математика Жана Батиста Жозефа Фурье. В 1822 г. Фурье показал, что график любой «достаточно гладкой» кривой (т.е. кривой, имеющей максимум конечное число точек разрыва) может быть представлен всюду на интервале в виде суммы некоторого бесконечного тригонометрического ряда. Другими словами, накладывая друг на друга бесконечное число синусоидальных и косинусоидальных колебаний, каждую точку на этой «достаточно гладкой» кривой, за исключением точек разрыва, можно аппроксимировать с любой требуемой степенью точности [см. рис.2]. Говорят, что такой ряд сходится к кривой или функции, за исключением конечного числа точек, или же сходится «почти всюду». Результат Фурье имел большое значение, поскольку он указывал, что некоторые сложные функции могут быть представлены в виде суммы синусов или косинусов, с которыми легче оперировать математически. Однако, чтобы оправдать такую замену, требовалось доказать, что к функции сходится только один такой тригонометрический ряд. Условия, при которых сходящийся к функции тригонометрический ряд является единственным, и начал исследовать Кантор.

*

В 1870 г. Кантор доказал, что если функция непрерывна всюду на интервале, то её представление тригонометрическим рядом единственно.[6] Его следующий шаг состоял в ослаблении требования непрерывности функции всюду на интервале.[7] Предположим, например, что график аппроксимируемой функции представляет собой прямую, параллельную оси x, за исключением точки $x = ½$, в которой функция принимает значение 0 вместо 1. Кантор показал, что если условие сходимости в точке $x = ½$ и нарушается, то всё равно существует единственный тригонометрический ряд, который сходится к этой функции в остальных точках. То есть другого тригонометрического ряда, который мог бы аппроксимировать эту функцию, не существует. Далее Кантор легко распространил свой результат на функции, имеющие любое конечное число точек разрыва, которые он назвал исключительными точками.[8]

В 1872 г. Кантор публикует работу, представляющую собой важнейшее открытие. Стремясь к более общей формулировке теоремы единственности, он доказал, что если исключительные точки распределены на оси x некоторым специальным образом, то их может быть и бесконечно много. Установить это можно было только на основе точного описания бесконечного множества исключительных точек. Однако для этого, как понимал Кантор, необходим более глубокий анализ континуума точек на оси x. Так, исследуя сходимость тригонометрических рядов, Кантор постепенно начинает сосредоточивать своё внимание на соотношении точек в континууме.

Кантор принял за аксиому, что всякой точке непрерывной линии соответствует некоторое число, которое он назвал действительным числом, чтобы отличить его от «мнимых» чисел, кратных $\sqrt{-1}$. Обратно, каждому действительному числу соответствует только одна точка прямой. Следовательно, проблема описания континуума точек прямой эквивалентна проблеме определения действительных чисел и исследованию их свойств. Статья Кантора, опубликованная в 1872 г., имела большое значение ещё и потому, что в ней было дано изложение этих свойств.

Основную трудность в теории действительных чисел представляют такие числа, как π и $\sqrt{2}$, не являющиеся рациональными. (Рациональное число – это такое число, которое можно выразить в виде частного двух целых чисел. Ещё в античности было известно, что $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ и многие другие корни являются иррациональными.) Так как правомерность рациональных чисел не вызывала сомнений, Кантор пошёл по пути, указанному Карлом Вейерштрассом, одним из его бывших учителей в Берлинском университете. Кантор предположил, что всякое иррациональное число может быть представлено бесконечной последовательностью рациональных чисел. Например, число $\sqrt{2}$ можно представить бесконечной последовательностью рациональных чисел

---

[6] Формулировка этого результата Кантора не вполне корректна. Его правильнее описать так: если функция действительного переменного задана сходящимся к ней тригонометрическим рядом в каждой точке, то такое её представление единственно. Здесь нет речи об условии непрерывности, поскольку произвольная непрерывная функция может привести к расходящемуся тригонометрическому ряду в одной или даже бесконечном множестве точек. (*Прим. переводчика*)

[7] Кантор ослаблял требование сходимости ряда к значению функции в каждой точке. (*Прим. переводчика*)

[8] На самом деле у Кантора речь шла не о точках разрыва, а о точках, в которых ряд расходится или не представляет значение функции, и именно такие точки он называл исключительными. (*Прим. переводчика*)

1; 1,4; 1,41; ... . В соответствии с этим все иррациональные числа можно понимать как геометрические точки числовой прямой, т.е. так же как и рациональные числа.

*

Несмотря на преимущества канторовского подхода, некоторые математики приняли его как вызов, поскольку он предполагал существование множеств или последовательностей чисел, имеющих бесконечно много элементов. Философы и математики отвергали концепцию завершённых бесконечностей со времён Аристотеля главным образом вследствие тех логических парадоксов, к которым, как казалось, они приводят. Например, Галилей указывал, что если в математике принять бесконечные завершённые множества, то чётных чисел должно быть столько же, сколько чётных и нечётных вместе. Всякому чётному числу можно сопоставить целое число, равное половине его величины, таким образом налицо взаимно однозначное соответствие между элементами того и другого множества. Некоторые теологи, например Фома Аквинский, также были против идеи завершённой бесконечности,[9] считая её прямым вызовом единой и абсолютно бесконечной природе бога.

Чтобы избежать подобные возражения, математики стремились проводить чёткое различие между бесконечностью, рассматриваемой как завершённая величина, и бесконечностью, рассматриваемой как потенциальная, т.е. представляемой неопределённой суммой или рядом членов, стремящихся к некоторому пределу. Правомерной они считали лишь потенциальную бесконечность. В 1831 г. своё отношение к завершённым бесконечностям Карл Фридрих Гаусс выразил словами, которые Кантор однажды назвал слишком категорическими. В письме Генриху Шумахеру Гаусс писал: «Что касается Вашего доказательства, я прежде всего протестую против применения бесконечной величины как завершённой, в математике это никак не допустимо. Понятие бесконечности есть лишь способ выражения понятия предела»[10].

Говоря о пределах, можно было избежать парадоксов, связанных с актуальными бесконечностями. Например, прибавляя дополнительные цифры к десятичному разложению числа π, можно аппроксимировать истинное значение π с возрастающей точностью. Однако Гаусс утверждал, что все члены десятичного разложения числа π не могут быть даны. Действительно, для точного определения π требовалось бы взять бесконечное число членов как что-то целое, другими словами, взять актуально бесконечное множество чисел – операция, которую Гаусс отказывался допускать.

Кантор не был одинок в изучении свойств континуума. В 1872 г., когда появилась его вышеуказанная статья, немецкий математик Рихард Дедекинд тоже опубликовал анализ континуума, основанный на бесконечных множествах. В своей работе Дедекинд явно высказал идею, позднее уточнённую Кантором: «Прямая бесконечно более богата индивидуумами-точками, чем область... рациональных чисел индивидуумами-числами». Сказанное можно представить следующим образом. Если на отрезке прямой рассмотреть распределение точек, соответствующих рациональным числам, то сколь бы малым ни был этот отрезок, на нём имеется бесконечно много рациональных точек. Суть идеи Дедекинда состояла в том, что, несмотря на плотность рациональных точек на отрезке прямой, на нём всё же найдётся место, чтобы вставить бесконечное число иррациональных точек. Такая иррациональная точка, как √2, попадает между рациональными точками, и таким образом множество рациональных чисел, хотя оно и всюду плотно, всё же разрежено, имеет «щели» и не является непрерывным.[11]

Утверждение Дедекинда верно отражало суть понятия континуума, за исключением одного важного аспекта. Взяв идеи Дедекинда за основу, нельзя установить, насколько бесконечное множество точек континуума превышает бесконечное множество рациональных точек. Великий

---

[9] **МОИ:** Вот здесь уже Даубен идет по ложному (но традиционному!) следу. Он представляет дело так, будто вопрос состоит в том, признать или не признать «завершенную» (т.е. актуальную) бесконечность. Но вопрос НЕ в этом! Независимо от того, как мы смотрим на потенциальную или актуальную бесконечность, в любом случае мы должны различать зависимое и независимое соответствие. Неверная постановка вопроса и приводит всех их (в т.ч. Даубена) к неверным выводам. У них нет ясного понимания ситуации, нет четкой ее картины, модели!

[10] **МОИ:** Эта цитата много раз обсуждалась в литературе. Дело там было сложнее, чем получается у Даубена. Гаусс вообще-то допускал и актуальную бесконечность – и правильно делал. Актуальная бесконечность вполне допустима, но и при актуальной бесконечности можно различать зависимое и независимое соответствие. И если их различать, то к ошибкам Кантора и кантористов не придем.

[11] **МОИ:** Множество вещественных чисел (т.н. «континуум») тоже не является непрерывным, но этот вопрос мы рассмотрим когда-нибудь позже. (MOI_06, §67, стр. 53).

вклад в решение этого вопроса был сделан Кантором, когда он в 1874 г. опубликовал свою статью «Об одном свойстве совокупности всех действительных алгебраических чисел»[12] в «Журнале чистой и прикладной математики» Августа Леопольда Крелле, называемом также журналом Крелле, – наиболее авторитетном среди математиков периодическом издании того времени.

*

Фактически Кантор воспользовался указанным Галилеем парадоксом и превратил его в средство количественного сравнения бесконечных множеств. Он назвал два множества эквивалентными, если между элементами этих множеств можно установить взаимно однозначное соответствие.[13] Предположим, у нас имеется ведёрко, заполненное чёрными и цветными шариками. Каким образом можно сравнить количество чёрных и цветных шариков? Простейший способ состоит в извлечении шариков из ведёрка парами, состоящими из чёрного и цветного шариков. Если каждый шарик может быть объединён в пару с шариком другого цвета, то два множества эквивалентны. Если нет, то оставшиеся в ведёрке шарики показывают, каких шариков было больше.

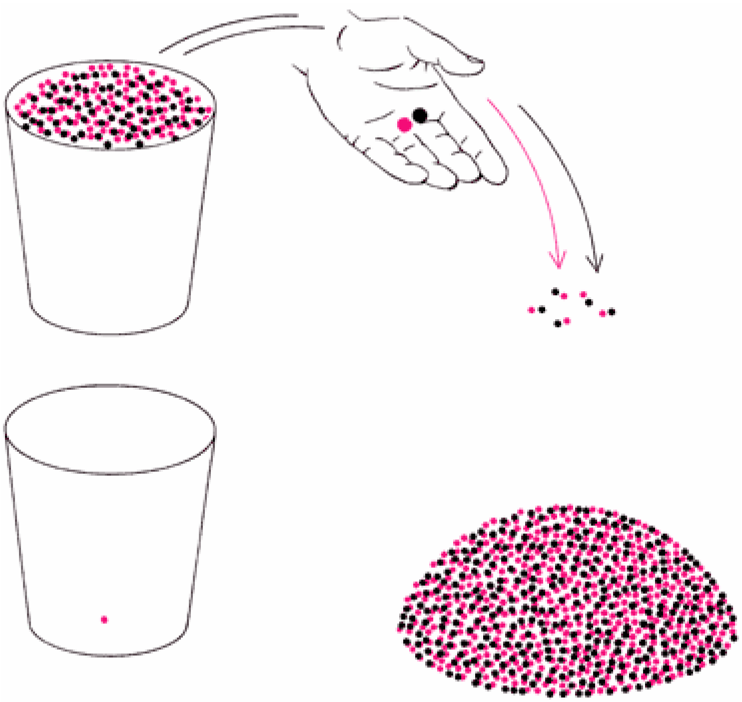


Рис.3. Два множества можно сравнивать по величине, сопоставляя элементы одного множества с элементами другого. Например, чтобы определить, каких шариков в ведёрке больше: цветных или чёрных, можно брать их из ведёрка парами, состоящими из цветного и чёрного шариков, до тех пор, пока там не останутся шарики одного цвета. Именно этот остаток и указывает, каких шариков было больше. Такой же принцип Кантор применил для количественного сравнения бесконечных множеств.[14]

Используя принцип взаимно однозначного соответствия, Кантор показал, что свойство, которое Галилей рассматривал как парадоксальное, фактически является естественным свойством бесконечных множеств. Множество чётных чисел эквивалентно множеству всех целых положительных чисел, чётных и нечётных, вместе взятых, поскольку объединение в пары

[12] **МОИ:** Эта статья перепечатана и прокомментирована в настоящем томе ниже. Ничего Кантор там не доказал, а просто постулировал то, что желал видеть.

[13] **МОИ:** Только сделал он это не в упомянутой статье 1874 года, а в статье 1878 года (которая тоже перепечатана в нашем Альманахе ниже). Под «взаимно однозначным соответствием» имелось в виду только <u>независимое</u> соответствие.

[14] **МОИ:** Но по этому принципу в бесконечных множествах всегда будет <u>одинаковое</u> количество элементов: элементы всё время есть и есть. Чтобы можно было начинать говорить о различии бесконечных множеств по количеству элементов, должно появиться <u>противоречие</u> (от предположения, что количество одинаковое). Вот этого противоречия-то и не будет (если сохранить в силе независимое соответствие и не переходить к зависимому).

элементов каждого из этих множеств может быть осуществлено без опущения каких-либо элементов рассматриваемых множеств.

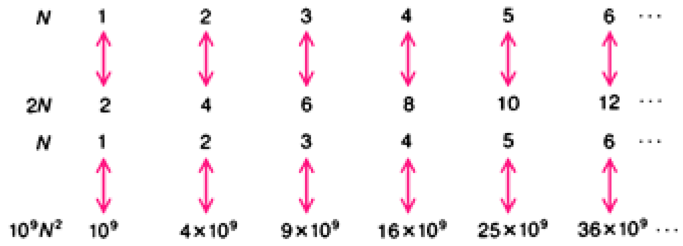


Рис.4. Целые числа можно одно за другим объединить в пары с чётными числами, не исчерпав какого-либо из множеств этих чисел. То есть эти два множества имеют одинаковое число элементов. Многие другие бесконечные множества тоже можно одно за другим сопоставить с целыми числами, т.е. фактически пересчитать. Такие множества называются счётными.

Кантор также предложил оригинальный способ объединения элементов множества всех рациональных чисел в пары с целыми числами [см. рис.5].

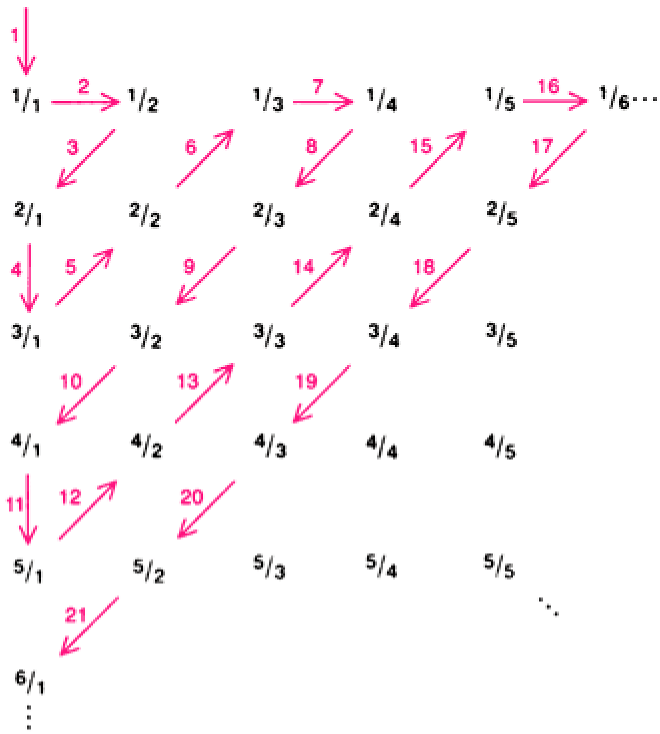


Рис.5. Бесконечное множество рациональных чисел (т.е. чисел, которые можно представить как частное двух целых чисел) могло бы показаться значительно бóльшим, чем множество целых чисел. Например, между двумя любыми соседними целыми числами, допустим 0 и 1, имеется бесконечно много рациональных чисел. Тем не менее в 1874 г. Кантор показал, что рациональные числа можно одно за другим объединить в пары с целыми числами. Всякое рациональное число можно разместить в квадратной таблице, как показано на рисунке. Тогда каждое из них может быть связано с целым числом путём проведения цветной линии. Таким образом, множество рациональных чисел является счётным.[15]

---

[15] **МОИ:** В этом нет ничего удивительного, так как ВСЕ бесконечные множества (при независимом соответствии!) имеют одинаковое количество элементов. Данным способом Кантор мог перенумеровать «рациональные числа» (т.е. пары натуральных чисел) потому, что в каждой паре ДВА элемента. Похожим способом он сможет это сделать, когда будут тройки элементов, четверки и т.д. – любое <u>конечное</u> число элементов в группе. А вот когда элементов в каждой группе станет бесконечное количество – тогда всё! – он уже не сможет ТАК перенумеровать, нужно будет использовать другой алгоритм установления соответствия. Но дело-то будет в том, что больше стало элементов в каждом «числе», а не больше самих «чисел». Однако Кантор (и вслед за ним Даубен) сделают (ошибочный!) вывод, что больше стало именно самих «чисел».

Всякое множество чисел, элементы которого можно расположить один за другим или фактически сосчитать, используя множество целых положительных чисел, Кантор назвал счётным множеством.

При данной плотности рациональных чисел на прямой и относительной «разреженности» целых чисел, может показаться крайне противоречащим интуиции то, что эти два множества оказываются количественно эквивалентными. Однако Кантор пошёл ещё дальше. Он доказал, что взаимно однозначного соответствия между множеством целых чисел и множеством всех точек на прямой, т.е. множеством действительных чисел, быть не может; одним словом, действительные числа образуют несчётное множество. Кантор дал довольно сложное доказательство этого утверждения в своей статье, опубликованной в 1874 г.[16] Я не буду останавливаться на нём, а изложу основную идею гораздо более простого, но более мощного способа доказательства, предложенного им в 1891 г.

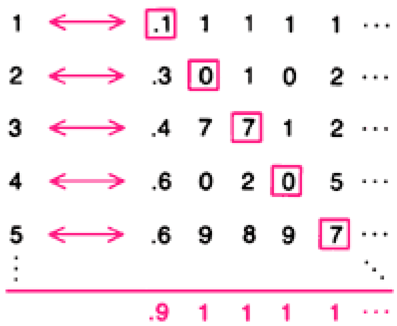


Рис.6. Множество действительных чисел, представленное континуумом точек на прямой, не является счётным. Если бы оно было счётным, то действительные числа, скажем между 0 и 1, можно было бы одно за другим объединить в пары с целыми числами.[17] Всякое действительное число в перечне можно представить бесконечным десятичным разложением (такие бесконечные десятичные дроби, как 0,5000..., представим в виде эквивалентной бесконечной дроби 0,4999...). Каков бы ни был перечень таких десятичных дробей, можно построить новую десятичную дробь,[18] которая определяет некоторое действительное число и не содержится в этом перечне. Для этого на первом месте после запятой пишем 9, если первая цифра десятичного разложения первого действительного числа в перечне равна 1; в противном случае пишем 1. Аналогично изменяем вторую десятичную цифру во втором действительном числе, третью десятичную цифру в третьем и т.д. Построенное десятичное разложение представляет некоторое действительное число, расположенное между 0 и 1, но оно должно отличаться по крайней мере одним десятичным знаком от каждого действительного числа, входящего в перечень. Следовательно, предположение, что действительные числа можно объединить в пары с целыми числами, приводит к противоречию, а потому должно быть отброшено.[19] Это доказательство основано на методе, называемом диагональным.

---

[16] **МОИ:** Эта статья, как уже говорилось, перепечатана у нас ниже. Ничего он там не доказал.

[17] **МОИ:** Вот, теперь элементов в каждом «числе» стало бесконечно много! Поэтому прежние способы установления «взаимно однозначного соответствия» уже не годятся. Прежде была ОДНА бесконечность (бесконечное число «чисел»), а теперь их стало ДВЕ (бесконечность «чисел» и бесконечность каждого отдельного «числа»). Это обстоятельство (что бесконечностей теперь две) имеет два последствия: **1)** для установления соответствия уже недостаточно линейного алгоритма (идущего к одной бесконечности), а нужен нелинейный алгоритм (идущий одновременно к двум бесконечностям); **2)** теперь можно проводить диагональный процесс (который был невозможен, пока бесконечность была только одна). Но нужно понимать и помнить, что эти изменения вызваны НЕ увеличением количества «чисел», а увеличением «длины» «числа»!

[18] **МОИ:** Нет, нельзя построить. Можно было бы построить тогда, если бы бесконечности «вниз» и «вправо» были бы одинаковыми. Но они заведомо НЕ одинаковы: если вправо N элементов, то вниз 10^N элементов. Следовательно, если мы довели диагональное «число» до N знаков, то (10^N – N) «чисел» остались не охваченными диагональным процессом, и диагональный элемент <u>содержится</u> среди перенумерованных. Так рассуждать, как рассуждает Кантор и вслед за ним Даубен, можно только имея в голове чрезвычайно туманное представление обо всем этом деле и притом еще установив запрет на уточнение понятий.

[19] **МОИ:** Катастрофическая логическая ошибка. Полная путаница понятий. Противоречиво на самом деле предположение, что $10^N = N$, необходимое для проведения диагонального процесса. Устраните это противоречие, и всё станет на свои места: действительные числа <u>перенумерованы</u> (!), а диагональный процесс НЕ строит такой элемент, которого не было бы среди перенумерованных. Подробнее о нумерации действительных чисел см. Приложение 2 в конце этой статьи.

Кантор начал своё доказательство с предположения, что существует взаимно однозначное соответствие между множеством действительных чисел и множеством целых чисел. Последующим рассуждением показывается, что это предположение приводит к противоречию, отсюда следует, что первоначальное предположение неверно и такое взаимно однозначное соответствие невозможно. Рассуждение можно упростить, рассматривая только множество действительных чисел, заключённых между 0 и 1. Если это множество больше множества целых чисел, то множество всех действительных чисел и подавно больше него.

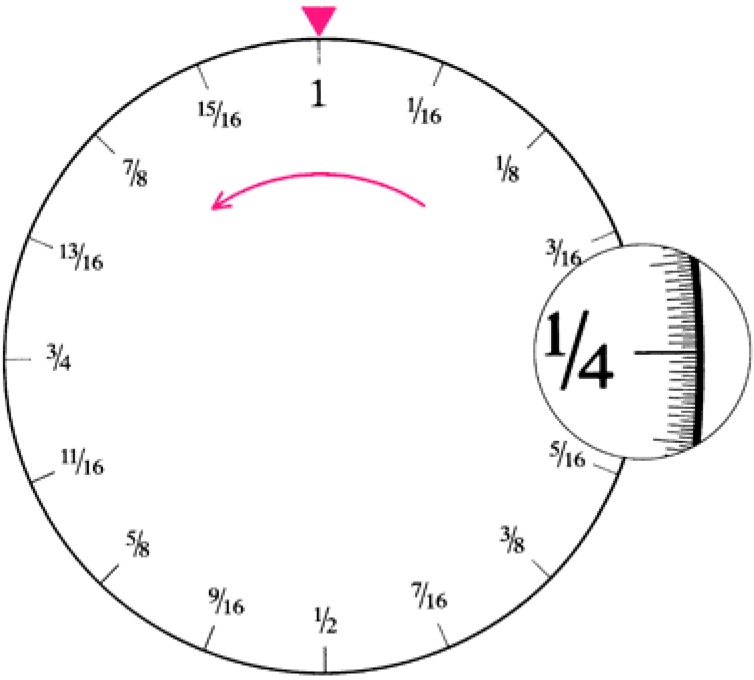


Рис.7. Вероятность случайного выбора точки, представляющей рациональное число, из континуума действительных чисел показывает, как множество рациональных чисел сравнивается по величине с множеством действительных чисел. Вероятность есть отношение числа рациональных точек к общему числу точек на некотором интервале. Здесь интервал между 0 и 1 представлен окружностью свободно вращающегося колеса (на этом колесе 0 и 1 отождествляются). Предполагается, что вероятность остановки колеса в любой точке одинакова. Точки, представляющие рациональные числа, бесконечно плотны в том смысле, что вдоль любой сколь угодно короткой дуги между двумя рациональными точками на окружности должно находиться бесконечное число рациональных точек. Несколько таких точек помечено. Тем не менее множество всех точек на окружности бесконечно больше множества рациональных точек: вероятность, что колесо остановится в рациональной точке, равна нулю.[20] Точнее эта вероятность меньше любой сколь угодно малой величины.

Итак, предположим, что действительные числа, заключенные между 0 и 1, могут быть одно за другим объединены в пары с целыми числами.[21] Установление такого соответствия эквивалентно составлению некоторого перечня действительных чисел, каждое из которых представляется как бесконечная десятичная дробь. Тогда можно[22] определить новое действительное число, не включённое в этот перечень. Берём первую цифру первого десятичного разложения в указанном перечне действительных чисел. Если эта цифра равна 1, то пишем 9 на первом месте

[20] **МОИ:** Разумеется, всё это уже пустая болтовня, потому что бóльшая мощность множества действительных чисел по сравнению с множествами рациональных и натуральных чисел не была доказана. На самом деле, чтобы вести подобные разговоры и делать подобные сравнения, нужно сначала уточнить, что мы, собственно, понимаем под числами. При том расплывчатом понятии числа, которым здесь пользуется Даубен (он вообще на самом деле говорит не о числах, а о некоторых записях, имеющих довольно слабое отношение к числам, почему я и ставила везде слово «число» в кавычки) – при этом расплывчатом понятии числа подобные разговоры вообще не имеют никакого смысла.

[21] **МОИ:** Они могут быть объединены в такие пары, но характер этого процесса объединения будет уже другим, чем в предыдущих примерах (с рациональными числами и т.п.), потому что бесконечностей теперь стало две, и процесс объединения не может уже быть линейным. Каждому вещественному числу будет уже соответствовать бесконечно большое натуральное число. См. Приложение 2 в конце этой статьи.

[22] **МОИ:** Мы уже разобрались, что нельзя. (Только в тумане неясных понятий кажется, что можно).

после запятой. Если первая цифра в этом перечне не равна 1, то на первом месте определяемого числа пишем 1. Построение нашего нового числа продолжается путём изменения второй цифры второго десятичного разложения в перечне, третьей цифры в третьем десятичном разложении и так далее.[23] Вновь построенное число должно отличаться по крайней мере одним десятичным знаком от каждого действительного числа, содержащегося в перечне, однако оно тем не менее представляет собой некоторое действительное число, расположенное между 0 и 1. Поэтому можно построить некоторое число, не содержащееся в перечне действительных чисел, и таким образом предположение, что все действительные числа можно пересчитать, приводит к противоречию.[24]

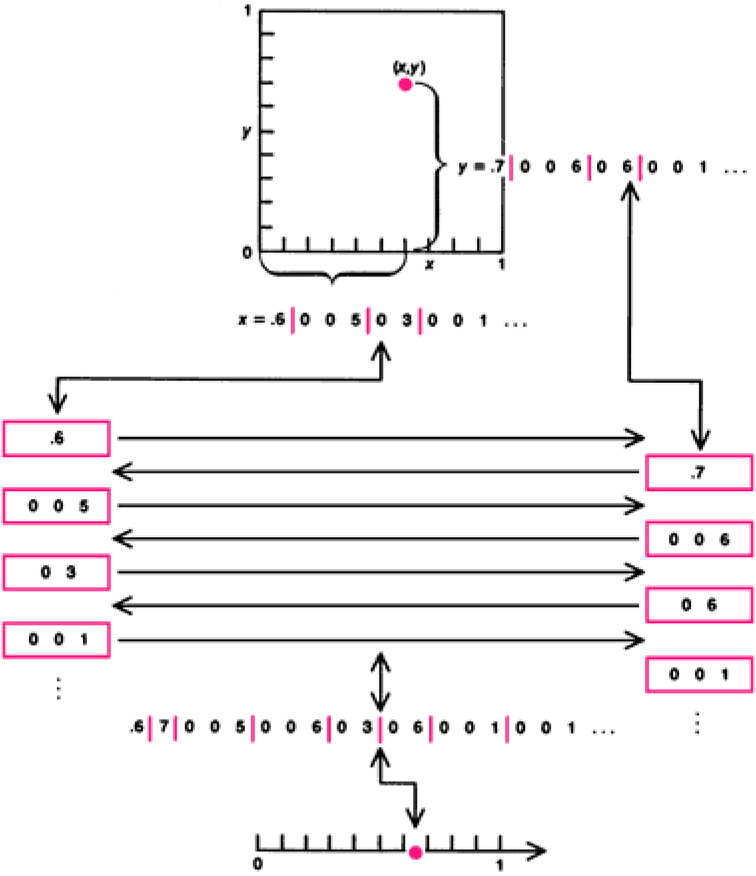


Рис.8. Между точками плоскости и точками прямой можно установить взаимно однозначное соответствие. Каждая точка плоскости представляется парой бесконечных десятичных дробей, и эти бесконечные дроби разбиваются на группы. Каждая цифра десятичного разложения, кроме нуля, начинает новую группу. Затем эти группы комбинируются и превращаются в одну бесконечную десятичную дробь, представляющую точку на плоскости. Вся процедура обратима. Аналогичное рассуждение показывает, что число точек любого конечномерного пространства эквивалентно числу точек на линии.

*

---

[23] **МОИ:** При этом, если мы ситуацию промоделируем на любом конечном N числе цифр десятичных разложений, то всегда окажется, что при диагональном процессе цифры вправо (которых N) всегда кончаются раньше, чем сами разложения (которых 10^N). Подлинная математика, уяснив это для конечного N, дальше будет смотреть, что произойдет, когда $N \to \infty$ (как она это делает в тысячах других случаев). А лженаука квазиматематика вместо этого предположит, что соотношение, имевшее место при конечных N, при бесконечном N вдруг станет совершенно другим.

[24] **МОИ:** Ну, вот так Кантор и Даубен приходят к своим абсурдным выводам. На самом деле построенное диагональным процессом «новое число» всегда имеется среди перенумерованных (потому что диагональный процесс охватил только N «чисел», а их всего 10^N). Противоречия с предположением о том, что действительные числа перенумерованы, на самом деле НЕТ. Но объективно существует некий другой фактор, который помогает Кантору и Даубену пребывать в их заблуждении. Этот другой фактор состоит в том, что действительные числа могут быть перенумерованы только бесконечно большими натуральными числами, и перенумерованы не линейным алгоритмом, а нелинейным, известным в ВТ под названием «Алгоритм А». Это то, что имеет место на самом деле (см. Приложение 2 в конце этой статьи).

В августе 1874 г. Кантор женился на Валли Гутман. Супруги провели конец лета в горах Гарца, где они встретились с Дедекиндом. Этот период оказался чрезвычайно плодотворным для Кантора. Несколько раньше в одном из своих писем Дедекинду Кантор писал: «Можно ли сопоставить поверхность (например, квадратную площадку, включая её границы) с отрезком прямой (включающим свои концы) таким образом, чтобы каждой точке поверхности соответствовала одна точка на этом отрезке, и наоборот?» Кантор полагал, что ответ должен быть отрицательным, но это требовало доказательства.

Однако в 1877 г. Кантор сообщает Дедекинду о своём поразительном результате: вопреки мнению, распространённому среди математиков, ему удалось доказать, что взаимно однозначное соответствие между точками прямой и точками плоскости возможно.[25] Доказательство состояло в представлении каждой точки квадрата парой десятичных дробей. Эти десятичные представления «перемешиваются» строго определенным образом, чтобы получить одно десятичное разложение, и эта десятичная дробь сопоставляется с точкой на отрезке прямой. Весь этот процесс обратим [см. рис.8]. Слова Кантора: «Я вижу это, но никак не могу этому поверить!» – говорят о том, насколько этот результат оказался неожиданным для него самого.[26]

Кантор сразу же подготовил рукопись с описанием своего нового открытия, и послал её в журнал Крелле. Работа эта послужила первым поводом для открытых столкновений между её автором и Кронекером. Будучи редактором журнала, Кронекер имел право отказать в публикации любой статьи, работа же Кантора настолько шокировала его, что он не преминул этим правом воспользоваться. Несмотря на то, что Кантор представил свою рукопись 12 июля, для подготовки её к публикации ничего не делалось, и она не появилась в журнале в 1877 г. Подозревая вмешательство Кронекера, Кантор пишет Дедекинду письмо, сетуя на неблагоприятное отношение к его рукописи. В письме он говорит также о своём желании забрать её из редакции. Однако Дедекинд, рассказав Кантору о собственном опыте в подобных делах, убедил его подождать, и оказался прав – статья наконец появилась в томе за 1878 г. Однако Кантор был настолько огорчён этим инцидентом, что отказался впредь публиковаться в журнале Крелле.

*

Полемика между Кантором и Кронекером усугублялась личной враждебностью, однако её причиной было различие во взглядах на обоснование математики. Подобные различия во взглядах и сейчас находят отражение в споре между сторонниками конструктивистской и формальной математики. Кронекер, сторонник конструктивизма, хорошо известен своим высказыванием, резюмирующим сущность его позиции: «Бог создал целые числа; всё остальное – дело рук человеческих». В этом духе он защищал построение всей математики из целых чисел и их конечных арифметических комбинаций. В начале 1870-х годов он стал отвергать любые предельные построения в традиционном анализе и сопротивлялся всем попыткам определять математические объекты через понятие предела. Так, даже иррациональные числа, которые принимались математиками в течение столетий, должны быть, по его мнению, «изгнаны» из математики, если нельзя найти какого-либо способа их построения, подобного тому, каким из целых чисел строились рациональные числа.

Кантор, написавший две большие статьи под руководством Кронекера в свои студенческие годы в Берлинском университете, хорошо знал эту крайнюю позицию Кронекера и в какой-то мере считал её оправданной. Она гарантировала максимальную достоверность и корректность математического доказательства и сдерживала распространение слишком вольных подходов в математике. Тем не менее Кантор считал, что принятие позиции Кронекера означало бы изгнание из математики многих значительных результатов; более того, она обременила бы новаторские исследования в математике стесняющими и в конечном счёте бесплодными методологическими предосторожностями.

Определение иррациональных чисел, данное Кантором в статье, опубликованной в 1874 г., было равносильно принятию существования завершённых бесконечных множеств. Кантор занял

---

[25] **МОИ:** При независимом соответствии ВСЕ бесконечные множества эквивалентны, поэтому данное «открытие» не представляет никакой ценности. Точки квадрата характеризуются ДВУМЯ координатами, поэтому ситуация здесь такая же, какая была в случае с рациональными числами, тоже характеризуемыми двумя элементами. Кантор не сможет найти линейный алгоритм сопоставления тогда, когда характеризующих элементов станет бесконечно много.

[26] **МОИ:** Эти слова говорят о том, что Кантор находился в возбужденном, маниакальном состоянии и не был способен смотреть на вещи спокойно и рационально.

позицию формальной математики в вопросе существования иррациональностей и утверждал, что единственным основанием их законности в математике является их формальная и внутренняя непротиворечивость. «При введении новых чисел, – писал он однажды, – от математика требуется только дать им определения, которые позволят... отличать их друг от друга. Как только число удовлетворяет этим условиям, оно может и должно рассматриваться как существующее и реальное в математике».

Эта точка зрения на иррациональные числа оказалась решающей для оправдания Кантором введения трансфинитных чисел. В статье, опубликованной в 1872 г., он определил множества исключительных точек, введя понятие предельной точки. Например, иррациональное число $\sqrt{2}$ представляет собой предельную точку последовательности 1; 1,4; 1,41; ... . В более общем случае некоторая точка является предельной, если в множестве имеется бесконечно много элементов, которые расположены в произвольно малой окрестности этой точки.

Для данного бесконечного множества P Кантор определил производное множество P^1 как множество всех предельных точек P. Аналогично, если P^1 также является бесконечным множеством, то его производное множество P^2 можно определить как множество всех предельных точек множества P^1. Кантор показал, что отношение включения определяет естественное упорядочение для множеств: оказывается, что всякий элемент множества P^2 является и элементом множества P^1, и, таким образом, P^2 является подмножеством P^1; аналогично P^3 является подмножеством P^2 и так далее.

Может оказаться, что для некоторого конечного целого числа n производное множество P^n представляет собой конечное множество. Если это условие выполняется, то бесконечное множество P, порождающее P^n, есть в точности множество исключительных точек, которое позволяет доказать достаточно общий вариант канторовской теоремы о единственности представления функций тригонометрическими рядами. С другой стороны, может также оказаться, что никакое множество в последовательности P^1, P^2, P^3, ... не будет конечным. Кантор считал, что в этом случае имеет смысл рассматривать множество точек, которые являются общими для всех производных множеств P^1, P^2, P^3, ..., P^n, ... Множество точек, общих всем этим производным множествам, он обозначил через P^∞; в 1880 г. он начал называть знак ∞ трансфинитным символом. Более того, если бы P^∞ оказалось бесконечным множеством точек, то тогда можно было бы образовать его производное множество $P^{\infty+1}$, которое могло бы в свою очередь привести к целой последовательности производных множеств $P^{\infty+2}$, ...

*

Кантор мог бы добавить, что индексы ∞, $\infty+1$, $\infty+2$, ... фактически образуют новый вид чисел, но сначала он не сделал этого. В 1872 г. он говорил об иррациональных числах только языком последовательностей рациональных чисел. Аналогичным образом он первоначально называл символы ∞, $\infty+1$, $\infty+2$, ... только средством для обозначения множеств. Но в 1883 г. он объявил их трансфинитными числами, самостоятельным и систематическим обобщением натуральных чисел.

Как указывал Кантор, непосредственным поводом для введения этих чисел было то, что они оказались необходимыми для дальнейшего развития теории множеств и изучения действительных чисел. Тем не менее, чтобы ответить критикам вроде Кронекера, Кантор отстаивал правомерность этих чисел в математике и со своей философской позиции: как только непротиворечивость трансфинитных чисел признана, их уже нельзя отвергать, как и другие принятые, но сразу же поставленные под сомнение числа вроде иррациональных. Формулируя теорию бесконечности, дающую возможность избежать известные математические парадоксы, Кантор верил, что он устранит единственно обоснованное возражение, которое могли выдвинуть математики против узаконивания понятия завершённой бесконечности.

Трансфинитные числа, введённые в конце концов Кантором, широко известны в обозначении, которое он принял для них позже: в виде буквы ℵ (алеф) – первой буквы еврейского алфавита. Этой буквой обозначается мощность, или число элементов бесконечного множества, так что отношения эквивалентности между бесконечными множествами, которые Кантор доказал в 70-х годах, часто выражают через трансфинитные кардинальные числа, алефы. Поэтому значительный исторический интерес представляет то, что первыми трансфинитными числами были не кардинальные числа, а ординальные.

Ординальное число определяется его порядком или положением в некотором перечне. Ординальное число, ассоциируемое с конечным множеством, соответствует кардинальному числу этого множества. Например, всякое множество, состоящее из пяти элементов (т.е. всякое множество, кардинальное число которого равно пяти), можно в некотором роде мыслить как непосредственно следующее за любым множеством из четырёх элементов. Другими словами, ординальное число этого множества тоже равно пяти; оно является пятым множеством в перечне множеств. Однако ординальное число бесконечного множества следует отличать от его кардинального числа. Кантор показал, что можно построить бесконечное число бесконечных множеств, имеющих различные ординальные числа, но одно и то же кардинальное число. Фактически Кантор позднее сумел превратить это свойство бесконечных множеств в критерий отличия их от конечных множеств: множество конечно, если его кардинальное и ординальное числа совпадают.

Кантор показал, что ординальное число последовательности конечных множеств возрастающей величины 1, 2, 3, ... получается путём повторного прибавления единицы. Не существует наибольшего ординального числа, ассоциированного с последовательностью конечных множеств, но, так же как возможно определить иррациональное число π в виде предела последовательности рациональных чисел, можно, как считал Кантор, определить новое, трансфинитное ординальное число ω как первое число, следующее за всей последовательностью чисел 1, 2, 3, ... Как только ω определено, становится возможным путём последовательного прибавления единицы порождать другие трансфинитные ординальные числа: $\omega+1$, $\omega+2$, $\omega+3$, ... Поскольку у этой последовательности не существует наибольшего элемента, то можно представить следующее ординальное число $\omega+\omega$ или 2ω в виде первого ординального числа, следующего за последовательностью $\omega+1$, $\omega+2$, $\omega+3$, ... Повторяя попеременно эти два принципа порождения, Кантор определил некую иерархию трансфинитных ординальных чисел [см. рис.9].

Каким образом можно провести различие, скажем, между ординальными числами ω и $\omega+1$. Различие определяется порядком элементов в множествах, которым соответствуют ω и $\omega+1$. Например, множество натуральных чисел в их известной последовательности (1, 2, 3, ...) имеет ординальное число ω, представляющее всю последовательность натуральных чисел в её обычном порядке. Однако множество всех натуральных чисел в перестроенной последовательности (2, 3, 4, ..., 1) или же множество всех натуральных чисел в последовательности (10, 30, 40, ..., 20) имеет ординальное число $\omega+1$. Другими словами, это различие зависит от порядка следования элементов в последовательности и от размещения бесконечно длинных пробелов, помеченных многоточием. Если в конце последовательности находится одно число, то ординальным числом новой последовательности будет $\omega+1$. Последовательность (2, 4, 6, ..., 1, 3, 5, ...) имеет два бесконечных пробела, и её ординальное число равно $\omega+\omega$ или 2ω. Отметим, что все эти множества имеют одно и то же число элементов, т.е. между самими этими множествами, а также между каждым из этих множеств и множеством целых положительных чисел можно установить взаимно однозначное соответствие. Поэтому их кардинальные числа одинаковы, хотя их ординальные числа различны.[27]

*

Определив трансфинитные ординальные числа, Кантор приступил к описанию их арифметических свойств. Между трансфинитными и обычными числами следует провести важное различие в отношении свойства коммутативности для сложения и умножения. Для двух обычных чисел A и B свойство коммутативности выражает тот факт, что $A+B$ равно $B+A$ и $A\times B$ равно $B\times A$. Однако, что касается трансфинитных чисел, свойство коммутативности уже не может быть гарантировано. Например, $\omega+2$, представляющее последовательность (1, 2, 3, ..., 1, 2), не равно $2+\omega$, представляющему последовательность (1, 2, 1, 2, 3, ...).

Хотя различие между ординальным и кардинальным числом для конечных множеств не является характерным, оно помогает объяснить, как применение понятия числа к бесконечным множествам может привести к путанице и парадоксам. Поскольку понятия ординального и кардинального числа для бесконечных множеств существенно различны, то при рассмотрении числа, ассоциированного с бесконечным множеством, всякое рассуждение, не учитывающее это различие, может привести к неясности. Таким образом, на бесконечные множества нельзя распространять кажущиеся очевидными свойства конечных множеств, как это делали Галилей и другие.

---

[27] **МОИ:** Я всё это не комментирую, потому что соглашаюсь с Кронекером, что всё это «не имеет реального значения».

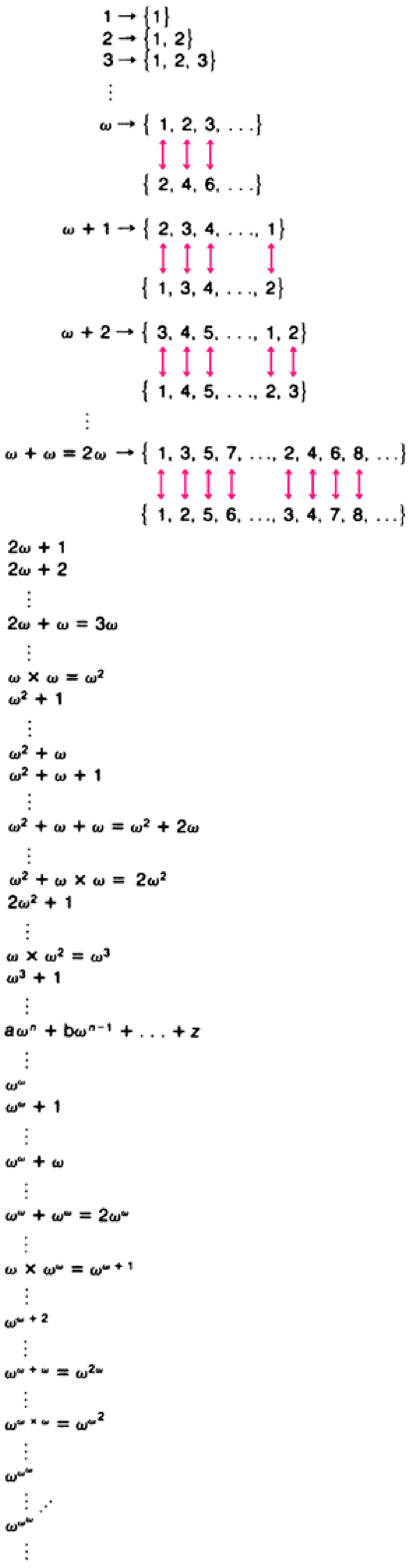


Рис.9. Трансфинитные ординальные числа определяются их порядком или положением в некотором перечне. Этот перечень порождается в соответствии с двумя принципами. Во-первых, каждое новое ординальное число получается из непосредственно предшествующего ординального числа добавлением одной единицы, в точности также как если бы мы «считали» за пределами трансфинитного ординального числа ω, т.е. числа, связанного с множеством целых чисел, расположенных в их естественном порядке. Во-вторых, если существует последовательность трансфинитных ординальных чисел, у которой нет наибольшего числа, то новое ординальное число определяется как следующее число, большее всех остальных чисел последовательности. Такие числа помещаются в перечне непосредственно после отметки пропуска. Например, 2ω представляет собой следующее трансфинитное ординальное число, большее всех чисел ω, ω+1, ω+2, ... На рисунке представлены два примера множеств, соответствующих ординальным числам ω, ω+1, ω+2, и 2ω. Однако всякое бесконечное множество, представляемое ординальным числом этого перечня, имеет одно и то же кардинальное число, а именно $\aleph_0$, другими словами, каждое множество содержит одно и то же число элементов.

Несмотря на значительные результаты, полученные Кантором в 1880-х годах, в теории множеств имелся серьёзный пробел. Вопрос о кардинальном числе (или мощности в первоначальной терминологии Кантора) континуума действительных чисел оставался нерешённым. Напомним, что в статье, опубликованной в 1883 г., Кантор определил последовательность трансфинитных ординальных чисел в соответствии с двумя принципами порождения. Чтобы ввести естественные подразделения в эту последовательность, он добавил третий принцип. Рассмотрим множество всех конечных целых чисел, которое Кантор назвал первым числовым классом. Его мощность или кардинальное число больше, чем мощность, соответствующая любому подмножеству этого множества. Аналогично, можно рассмотреть и множество всех трансфинитных ординальных чисел, соответствующих счётным бесконечным множествам или, другими словами, множествам, мощность которых равна мощности множества всех целых чисел. Кантор назвал это множество трансфинитных ординальных чисел вторым числовым классом. Оказывается, мощность второго числового класса больше мощности, соответствующей любому из трансфинитных чисел, входящих в это множество. Короче, второй числовой класс представляет собой несчётное множество. Кантор был убеждён, что мощность второго числового класса эквивалентна мощности континуума действительных чисел, хотя он так и не сумел доказать это.

Эта догадка известна как гипотеза континуума Кантора и никогда не была доказана. В 1963 г. П.Дж. Коэн из Станфордского университета, опираясь на работу Курта Гёделя и математиков из Института высших исследований, показал, что, хотя эта гипотеза не противоречит аксиомам общепринятой теории множеств, она вместе с тем и не зависит от них. Фактически роль гипотезы континуума в теории множеств такая же, как роль евклидовского постулата параллельности в геометрии. При допущении истинности или ложности гипотезы континуума можно построить различные версии теории множеств точно так же, как при допущении истинности или ложности аксиомы параллельности можно строить евклидову или неевклидовы геометрии (см. П.Дж. Коэн, Р. Херш «Неканторовская теория множеств», Scientific American, декабрь, 1967 г.)[28].

Кантору тяжело было сознавать безуспешность своих усилий доказать континуум-гипотезу, что явилось, по-видимому, одной из причин стресса. В начале 1884 г. он вроде бы нашёл доказательство, но несколько дней спустя убедился в его ошибочности. В течение всего этого периода он испытывал возрастающую оппозицию и нападки со стороны Кронекера, готовившего, по его утверждению, статью, в которой будет показано, что «результаты современной теории функций и теории множеств не имеют реального значения».

Вскоре после этого, в мае 1884 г., Кантор испытал серьёзное нервное расстройство. Осознание неудачи в решении проблемы континуума и нападки Кронекера могли способствовать этому срыву. Однако эти отрицательные факторы, конечно, не были причиной его болезни, которая прогрессировала очень быстро. В конце июня 1884 г. после «выздоровления» и наступления фазы депрессии Кантор жаловался на упадок сил и потерю интереса к занятию математикой. Он довольствовался лишь выполнением незначительных административных обязанностей в университете и не чувствовал себя способным на большее.

*

Хотя Кантор порой возвращается к математике, его всё более увлекают другие интересы. Начав изучать английскую историю и литературу, он становится участником спора, который вели в то время многие учёные, – спора относительно предположения, что автором шекспировских пьес был Френсис Бэкон. Кантор пытался, но безуспешно, преподавать философию вместо математики и начал переписываться с некоторыми теологами, проявившими интерес к философским выводам из его теории бесконечности. Эта переписка имела особое значение для Кантора, так как он был убеждён, что идея трансфинитных чисел была ниспослана ему богом. Он очень хотел, чтобы его идеи были изучены теологами с целью согласования его концепции бесконечного с церковным учением.

Важно отметить, что Кантор способствовал созданию профессионального объединения – Немецкого математического общества, назначение которого состояло в содействии развитию математики в Германии. Он считал, что его научная карьера пострадала от предубеждённого отношения к его трудам, и надеялся, что независимая организация позволит молодым математикам самостоятельно судить о новых, возможно, радикальных идеях и побудит их заняться этими идеями.

[28] Имеется перевод: Природа, 1969, № 4, с. 43–55. (*Прим. переводчика*)

Последним элементом теории бесконечных множеств, который оставался ещё «не доработанным», был вопрос о природе и статусе трансфинитных кардинальных чисел. Эволюция мыслей Кантора относительно этого предмета любопытна, поскольку трансфинитные кардинальные числа были той завершающей частью его теории, которой нужно было дать строгое определение и присвоить специальный символ. Сейчас трудно с полной ясностью представить ту неизвестность, в которой продвигался вперёд Кантор. До сих пор я описывал его работы, как если бы он уже пришёл к выводу, что мощность бесконечного множества можно определять как кардинальное число. Фактически, хотя Кантор понимал, что именно мощность множества указывает на его эквивалентность (или неэквивалентность) любому другому множеству, он первоначально избегал предположения, что мощность бесконечного множества можно интерпретировать как некоторое число.

Эти два понятия Кантор начал отождествлять в сентябре 1883 г.; однако всё ещё не было символа, позволяющего отличать одно трансфинитное число от другого. Так как он уже принял символ ω для обозначения наименьшего трансфинитного ординального числа, то ясно, что ординальные числа были значительно более важными, чем кардинальные, для раннего концептуального развития канторовской теории множеств. Решив ввести символ для обозначения первого трансфинитного кардинального числа, Кантор заимствовал его из символов, уже использовавшихся для обозначения трансфинитных чисел: первое трансфинитное кардинальное число было записано в виде ω^*.

Кантор не пользовался алефами в качестве символов до 1893 г. Примерно в это время итальянский математик Джулио Виванти готовил общее изложение теории множеств, и Кантор понимал, что необходимо принять стандартные обозначения. Для обозначения трансфинитных кардинальных чисел он выбрал алефы, считая, что известные греческие и римские алфавиты слишком широко использовались в математике. Выбранная буква א была доступна для набора в немецких типографиях. Этот выбор Кантор обосновывал ещё и тем, что еврейский алеф был одновременно символом числа 1. Поскольку сами трансфинитные кардинальные числа были бесконечными единицами, алеф можно было взять для обозначения нового понятия в математике. Кардинальное число первого числового класса, которое раньше Кантор обозначал через ω^*, он теперь обозначил через $\aleph_0$ (алеф-нуль); кардинальное число второго числового класса стало обозначаться символом $\aleph_1$ (алеф-один).

*

Последние значительные работы Кантора по теории множеств опубликованы в 1895 и 1897 гг. В докладе, прочтённом на первом заседании Немецкого математического общества в 1891 г., он доказал, что кардинальное число любого множества меньше кардинального числа множества всех его подмножеств. (Один из способов доказательства представлен на рис.10.)

Несколько лет спустя он получил такое следствие из этого результата: кардинальное число континуума равно кардинальному числу $2\aleph_0$. Он надеялся, что это следствие вскоре приведёт к решению проблемы континуума, поскольку её теперь можно было сформулировать в алгебраической форме: $2\aleph_0 = \aleph_1$.

Однако аргументы, использованные Кантором при доказательстве утверждения о кардинальном числе множества подмножеств, привели к существенно иным заключениям. Наиболее важное из них сделал Бертран Рассел в 1903 г.: он показал, что рассмотрение всех множеств, не включающих себя в качестве элементов, может привести к парадоксу в теории множеств. Этот вывод Рассела указывал на то, что канторовское определение множества нельзя считать удовлетворительным. Эта проблема стала одной из важнейших в математической логике XX столетия. Тем не менее ни один из канторовских результатов ещё не был опровергнут в трансфинитной арифметике.

Ещё до 1903 г. Кантор всё чаще испытывает приступы маниакальной депрессии, и нам неизвестно, познакомился он с указанной работой Рассела или нет. Болезнь вынудила Кантора просить в Университете в Галле разрешения на отпуск в течение осеннего семестра 1899 г. Его просьба была удовлетворена. В ноябре того же года он направил письмо министру культуры Германии о своём намерении полностью отказаться от профессуры. Поскольку его зарплата оставалась прежней, он готов был согласиться на скромную должность в библиотеке. Письмо заканчивалось требованием, чтобы министр сообщил свой ответ в ближайшие два дня. Если ему не предложат другую работу вместо преподавания, то, писал он, как человек, родившийся в России, он будет пытаться поступить на службу в русский дипломатический корпус.

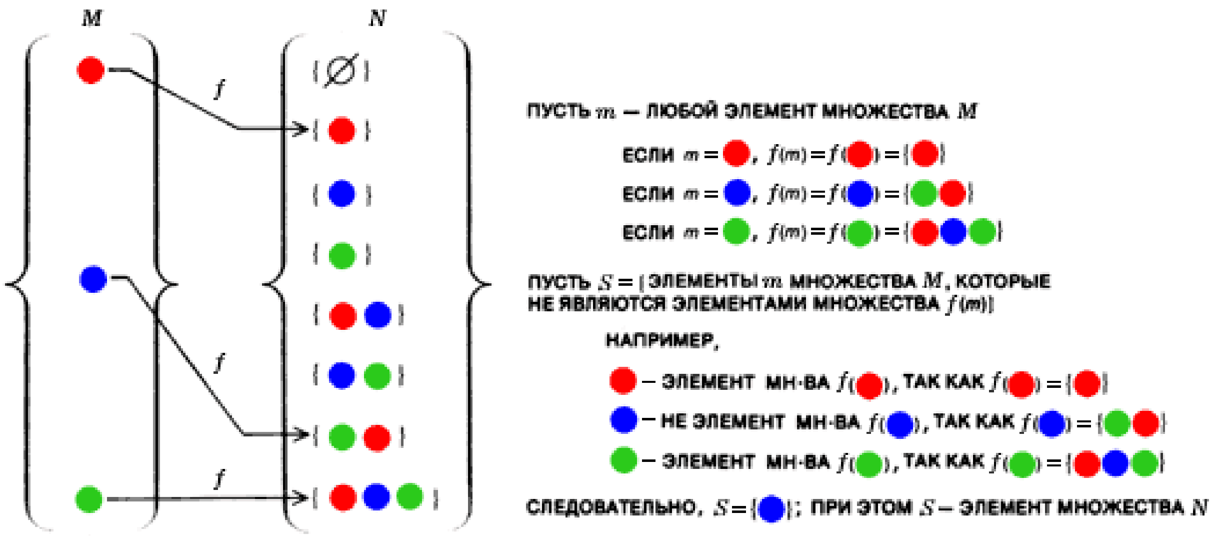


Рис.10. Бесконечная последовательность множеств, каждое из которых больше предшествующего ему в этой последовательности, может быть построена при рассмотрении всех подмножеств любого заданного множества. Канторовский диагональный метод[29] показывает, что, допустив взаимно однозначное соответствие *f* между множеством *M* и множеством *N* всех его подмножеств, мы можем построить подмножество *S*, не включённое в это однозначное соответствие, каковым бы ни было *f*. Чтобы понять это построение, рассмотрим конечное множество *M*, состоящее из красного, голубого и зелёного кружков. Это множество имеет восемь подмножеств (включая пустое множество Ø). Пусть *S* будет определено как множество всех элементов *m* из *M*, не являющихся членами подмножества *f*(*m*), которым соответствует *m*. Например, *S* содержит только голубой кружок. Ввиду того что *S* является подмножеством множества *M*, и так как по предположению *f* определяет взаимно однозначное соответствие, должен существовать некоторый элемент *a* из *M*, которому соответствует *S*, или, другими словами, для которого *f*(*a*) совпадает с *S*. Элемент *a* либо является элементом из *S*, либо нет. Если *a* – элемент *S*, то он должен быть и элементом множества *f*(*a*), так как *f*(*a*) равно *S*; с другой стороны, если *a* является элементом из *S*, то он не может быть элементом множества *f*(*a*) по определению *S*. Значит, *a* не может быть элементом из *S*. Однако, опять-таки по определению *S*, если *a* не является элементом из *S*, то *a* должен быть элементом из *f*(*a*), а так как *f*(*a*) равно *S*, то *a* должен быть и элементом из *S*. Поэтому, каково бы ни было *a*, предположение, что множество *M* можно поставить во взаимно однозначное соответствие с множеством всех его подмножеств, приводит к противоречию,[30] а потому это предположение следует отбросить. Также доказывается, что, даже если множество бесконечно, множество его подмножеств больше первоначального множества. Бесконечная последовательность всё больших бесконечных множеств может быть построена путём образования множества *N* всех подмножеств какого-либо бесконечного множества *M*, затем образования множества *P* всех подмножеств множества *N* и так далее. В этой последовательности нет наибольшего множества.

По-видимому, ответ на просьбу Кантора не последовал, а на службу к императору Николаю II он не поступил. Тем не менее этот случай является характерным в поведении Кантора. Так, например, ещё в 1884 г., после первого серьёзного приступа болезни он всерьёз рассматривал вопрос об отказе от математики ради философии. В конце 1899 г. он был госпитализирован из-за маниакальной депрессии, затем – в зимние семестры 1902 и 1903 гг. и позднее на всё более частые и длительные периоды. Умер Кантор от сердечной недостаточности 6 января 1918 г. в психиатрической лечебнице в Галле.

*

[29] **МОИ:** Вообще-то тут нет ни диагонали, ни диагонального процесса. Какие только приемы не обозначаются словами «диагональный метод»! В данном случае центральный прием – образование множества *S* тех *m* из *M*, которым... и т.д. Вопрос об этом множестве подробнее разобран в Приложении 1 в конце настоящей статьи.

[30] **МОИ:** Вот, здесь это противоречие реально! Но почему оно реально? Да потому, что здесь используется **<u>зависимое</u>** соответствие. Множество *N* строится из множества *M* и имеет 2^M членов, что, разумеется, больше чем M. Если мы таким же способом (зависимого соответствия) из множества натуральных чисел будем отбирать множество четных чисел, то их будет в два раза меньше, чем натуральных. Вот так Кантор и Даубен прыгают с одного понятия соответствия на другое (с зависимого на независимое и обратно) и при помощи такого мыслительного приема получают свои результаты.

Имеется в то же время определённая связь между болезнью Кантора и его научным творчеством. Некоторые документы говорят о том, что болезнь давала ему передышку от повседневных дел, которую он использовал для развития своих математических идей в уединении госпиталя или в спокойной обстановке дома. Возможно, болезнь также усиливала его веру, что идея трансфинитных чисел была внушена ему богом. После длительной госпитализации в 1908 г. он послал письмо одному из друзей в Гёттингене – математику Грейс Чисхольм Юнг, англичанке по происхождению. Как он писал, его маниакальная депрессия была побуждающим фактором:

> «Благодаря обстоятельствам судьбы, не только не сломившим меня, но фактически придавшим мне внутренней силы и сделавшим меня более счастливым и восприимчивым к радостям жизни, чем я был в последние годы, я оказался далеко от дома, можно сказать, далеко от мира... В этой длительной изоляции интерес к математике, в частности к теории трансфинитных чисел, не угасал во мне».

В другом письме Кантор выражает убеждённость в истинности своей теории в квазирелигиозных терминах:

> «Моя теория как скала; всякая стрела, направленная в эту скалу, тотчас же отскакивает от неё и устремляется к выпустившему её. Уверен я в этом потому, что изучил её со всех сторон за многие годы и рассмотрел все возражения, которые когда-либо делались против трансфинитных чисел, а также потому, что я исследовал её корни, так сказать, до первой подлинной причины всего сотворённого».

Последующие поколения могли бы отмести эту философию, взять под подозрение его многочисленные ссылки на Фому Аквинского и на отцов церкви, пересмотреть метафизические заявления и полностью упустить из вида глубоко религиозные корни веры Кантора в абсолютную истинность его теории. Однако указанные обстоятельства сыграли свою роль в его решении не отбрасывать трансфинитные числа. Сопротивление, кажется, даже утвердило его решимость. Стойкость и убеждённость Кантора позволили теории трансфинитных множеств пережить годы сомнений и нападок и в конце концов вырасти в грандиозную революционизирующую силу в математике XX столетия.[31]

Литература

1. Kurt Gödel. *What is Cantor's continuum problem*? In: *Philosophy of Mathematics: Selected Readings* (Edited by Paul Benacerraf and Hilary Putnam). Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1964.
2. Herbert Meschkowski. *Probleme des unendlichen: werk und leben Georg Cantors*. Vieweg, Braunschweig, 1967.
3. I. Grattan-Guinness. *Towards a biography of Georg Cantor*. In: *Annals of Science*, 1971, v. 27, No. 4, pp. 345–391.
4. Joseph Warren Dauben. *Georg Cantor: his mathematics and philosophy of the infinite*. Harvard University Press, 1979.
5. Ф.А. Медведев. *Развитие теории множеств в XIX веке*. М., Наука, 1965.
6. Н.Я. Виленкин. *Рассказы о множествах*. М., Наука, 1965.

Joseph W. Dauben[32] (Джозеф У. Даубен «Георг Кантор и рождение теории трансфинитных множеств») – профессор истории и истории естествознания в Колледже Герберта Г. Лемана при Нью-Йоркском университете. В 1966 г. получил степень бакалавра в Колледже Клермонта. Докторскую диссертацию защитил в 1972 г. в Гарвардском университете.[33] В 1973 и 1974 гг. в Американской академии в Риме изучал математику, а также искусство итальянского

---

[31] Следует отметить преувеличение автором роли теологических мотивов при создании и защите Кантором теории множеств. Теория множеств создавалась им на математической основе, причём более широкой, чем это раскрыто в публикуемой статье. Теологические мотивы стали появляться у Кантора в основном после того, как на построенную им теорию стали нападать философы и теологи; эти мотивы усиливались с развитием его болезни и отпадали в периоды относительного выздоровления. (*Прим. переводчика*)

[32] **МОИ:** Родился 1944.12.29 в Санта-Моника, Калифорния.

[33] **МОИ:** Темой его диссертации была ранняя история канторовской теории множеств.

Возрождения. В 1977 и 1978 гг. работал в Институте высших исследований. В 1980 г. – приглашенный профессор в Оберлинском колледже. В 1981 г. – приглашенный профессор в Гарварде.[34]

Приложение 1. Множество и его подмножества

Выше в подписи под рисунком 10 дается Канторо-Даубенское доказательство того факта, что множество подмножеств множества *M* имеет мощность большую, чем *M*. В принципе, если Кантор и Даубен находились бы в нашей системе понятий, то такое доказательство им вообще не требовалось бы. Множество *N* подмножеств по самому его определению может быть только зависимым от множества *M* – независимо его просто невозможно строить, оно тогда не определено. Поэтому между этими множествами может существовать только зависимое соответствие (т.е. не может существовать то соответствие, которое и является для Кантора главным его «коньком»). При зависимом соответствии множество *N* имеет 2^M элементов, если в исходном множестве M элементов. Ясно, что $2^M > M$, и «взаимно однозначного соответствия» между ними быть не может. Никакие другие доказательства тут не нужны.

Однако, если очень хочется, то можно и еще раз «доказать» то, что и так очевидно. То доказательство, которое дается Даубеном, пользуется приемом, типичным для кантористов: предполагается, что «соответствие установлено», из этого выводится противоречие, и предположение признается ошибочным. Но этот прием характерен для поверхностного и туманного мышления. Он не дает знания, ПОЧЕМУ всё это так получается, при нем нет ясной и четкой картины того, что на самом деле происходит. В данном случае отсутствие ясного понимания сути происходящего НЕ приводит Кантора и Даубена к ошибкам – они «доказывают» действительно реальную истину. Однако в других случаях такой же прием и такой же туман в понятиях приводит их к ошибкам.

Разберем теперь сущность происходящего так, чтобы имелась ясная картина. Я воспользуюсь теми же цветами, как у Даубена, но только вместо кружочков использую цифры: 1, 2, 3. Итак, пусть для начала соответствие между множествами *M* и *N* установлено так (как показывают стрелки):

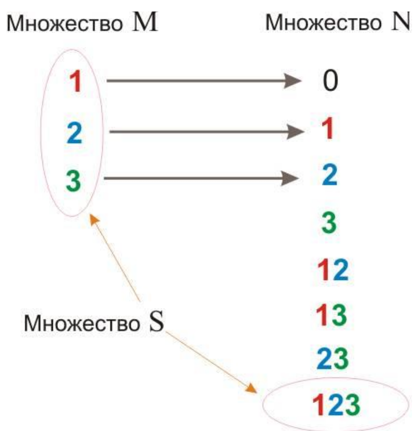


Рис. 11. Множество *S* охватывает всё множество *M*

Все элементы *m* соответствуют таким подмножествам, в которых их самих нет. Поэтому множество *S* совпадает с множеством *M* и, конечно, оно находится вне соответствия (на рисунке нет стрелки к нему).

Посмотрим, что будет происходить, если мы поменяем соответствие между *M* и *N* (начнем передвигать стрелки).

Вот, передвинем стрелку так, чтобы элемент 3 начал соответствовать подмножеству, состоящему из этого же элемента 3.

[34] **МОИ:** Это пояснение о Даубене отсутствует в интернетовской HTML публикации статьи, но имеется в бумажном журнале. Дальнейшие два приложения написаны мной для более подробной разборки вопросов, затронутых в моих комментариях к статье Даубена.

Сразу же меняется и множество *S*, однако оно опять размещается так, что не попадает под стрелку. Оно переместилось из разряда с тремя элементами в разряд с двумя элементами (естественно: один элемент из него ушел). Но в этом разряде двухэлементных подмножеств оно занимает то место, в котором нет троечки (естественно: иначе троечка тоже вошла бы в *S*, и мы вернулись бы к предыдущей картине).

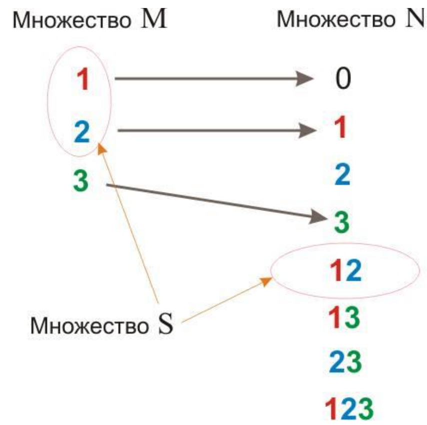


Рис. 12. Множество *S* охватывает два элемента из *M*

Передвинем и стрелку от элемента 2 к такому подмножеству, которое содержит его самого:

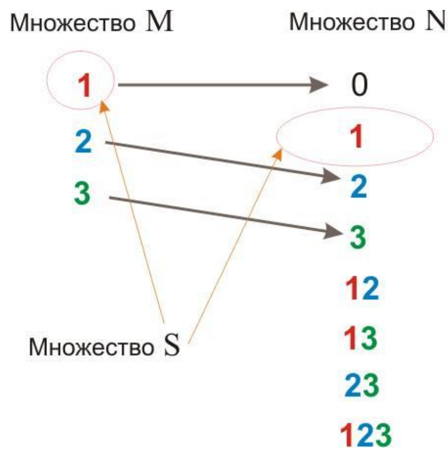


Рис. 13. Множество *S* охватывает один элемент из *M*

Множество *S* опять перескакивает на другое место (в разряд одноэлементных подмножеств), но опять так, что не попадает под стрелку (естественно: иначе мы вернули бы в *S* либо двойку, либо тройку).

Передвинем теперь и стрелку от элемента 1 к такому подмножеству, которое содержит его самого:

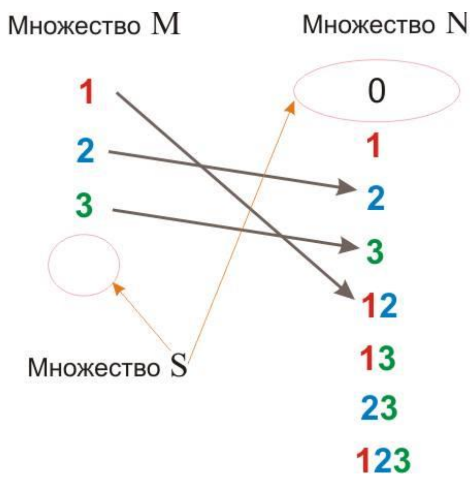


Рис. 14. Множество *S* пусто

Теперь множество S стало пустым, но оно опять выскочило из-под стрелок.

Таким образом, мы видим, как работает алгоритм установления соответствия между множествами M и N; мы видим, какие закономерности существуют в продуктах (результатах) этого алгоритма. Понимая, как он работает, мы видим и то, что множество S никогда не попадет под стрелку, т.е. никогда не будет соответствовать ни одному элементу из множества M. Это объективное свойство алгоритма установления соответствия между множествами M и N.

Вот, понимать этот механизм, эту работу алгоритма и его особенности и свойства – это и означает иметь подлинную, ясную и четкую картину происходящего. Ну, а доказательство Кантора–Даубена – это дело вторичное. Раз мы и так знаем, что множество S никогда не попадет под соответствие, то к нашему знанию ничего не добавит то, что из предположения о наличии такого соответствия выходит противоречие. (Это противоречие – лишь переиначенное то же самое обстоятельство, которое мы оговаривали в скобках, понимая работу алгоритма: «*...естественно: иначе троечка тоже вошла бы в S, и мы вернулись бы к предыдущей картине...*» и т.п.).

На самом деле Кантор и Даубен своим противоречием доказывают в первую очередь то, что множество S никогда не будет соответствовать никакому элементу m. Но я еще раз подчеркиваю, что тот механизм и те картины, которые мы разобрали в этом Приложении, дают более глубокое понимание сущности вещей, чем тот формальный вывод противоречия, которым пользуются Кантор и Даубен. (Здесь оба способа – наш и Кантора – давали одинаковый результат. Но когда результаты формального способа Кантора в других местах войдут в противоречие с результатами нашего более глубокого понимания, то пусть у читателя не будет сомнений в том, который способ дает результат правильный).

И лишь во вторую очередь из факта, что S не может соответствовать никакому m, следует, что и M и N не могут быть однозначно сопоставлены – т.е. следует та истина, которую мы и так знали из тех обстоятельств, что $2^M > M$, а соответствие между этими множествами всегда только зависимое.

Приложение 2. Соответствие действительных и натуральных чисел

На Рис. 6 и вокруг него Даубен вслед за Кантором упражнялся в сопоставлении одних «чисел» другим – когда можно их сопоставить, когда нельзя – и на основе результатов этих опытов делал заключения о том, какие множества больше, какие эквивалентны, какие меньше.

Рассмотрим и мы эти вопросы более ясным и точным взглядом, чем принято у кантористов.

Во-первых, отметим, что кантористы сопоставляют НЕ числа (они в общем-то и не знают, что такое число), а цепочки цифр (т.е. значков), по их мнению однозначно соответствующих числам и поэтому соответствующие числа представляющие.

Здесь мы не будем разбирать разницу между числом и цепочкой цифр, а примем «правила игры» кантористов: согласимся разбирать вопрос, считая цепочки цифр достаточными представителями чисел.

Однако уточним всё же один вопрос, чтобы не брести в обычном канторовском тумане: цепочки цифр не падают с неба в готовом виде – их пишут. Их пишут, присоединяя к цепочке всё новые цифры до тех пор, пока запись не окончена. Причем процесс записи может быть окончен после записи конечного количества цифр или же может быть окончен после записи бесконечного количества цифр. Последним случаем, признавая бесконечный процесс записи оконченным, мы признаем актуальную бесконечность: цепочка для нас существует одновременно вся целиком, несмотря на ее бесконечность.

Тем не менее, прежде чем стать актуально бесконечной, она всё равно записывалась. И не важно, каким именно способом в этом процессе записи добавлялись цифры – важен только результат: что цифра добавлена. Так, например, я могу писать одновременно только одну цепочку, занимаясь только ею и не отвлекаясь ни на какие другие занятия. Но могу писать одновременно две цепочки: добавить цифру к одной, потом добавить цифру ко второй, потом опять к первой и т.д. И могу писать одновременно n цепочек, переходя от одной к другой по кругу. И могу писать еще более хитрым способом: напишу одну цифру, потом сделаю копию написанного, получая две одинаковые цифры, потом допишу цифру к оригиналу и к копии, потом опять сделаю копии, получая уже четыре строчки, допишу к каждой цифру, опять всё скопирую, опять допишу ко всем копиям цифру и т.д.

Первый принцип здесь состоит в том, что мы считаем цепочку цифр такой, какой она в конце концов получилась, какие бы побочные манипуляции ни производились в процессе ее записи.

Канторист, не чувствуя подвоха, легко соглашается с описанным принципом. Но как только из этого принципа оказывается выведенным результат, полностью разрушающий его излюбленное учение, так тут же раздается отчаянный вопль: «Не-е-е-ет!!! Цепочки писать можно только по одной! Если писать сразу многие, то они уже не будут бесконечными!» Я сама слышала эти вопли профессоров математики, повторяемые годами с тупостью, которая могла бы войти в поговорку.

Пусть профессоры вопят себе, а мы будем всё таки держаться истины и считать, что цепочка определяется составом добавленных к ней цифр, а не побочными манипуляции вокруг них.

Второй принцип, которым мы здесь будем руководствоваться – это принцип индукции (или, если хотите, «математической индукции»): если какое-то отношение существует на шаге n некоторого процесса, и если мы видим, что это отношение всякий раз сохраняется при переходе к шагу $n + 1$, то мы считаем, что оно будет иметь место также и тогда, когда бесконечный процесс завершится, породив актуальную бесконечность.

Теперь нам еще надо только уточнить, что понимается под «установлением соответствия». Это можно представлять себе так, что множества уже существуют, а я (при установлении этого соответствия) как будто только палочкой касаюсь поочередно их элементов. Но можно себе представлять и так, что я эти множества еще только создаю, например, в одной строчке пишу натуральное число, во второй строчке четное число, потом следующее натуральное, следующее четное и т.д.:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
2	4	6	8	10	12	14	16	18	...

Соответствие установлено пошаговой синхронизацией обоих процессов. Оба эти представления («касание» уже готовых множеств и синхронное их создание) логически эквивалентны, но даже в случае «касания» всё равно возникает и создание новых множеств, как это, например, было с множеством S в Приложении 1.

Итак, теперь исследуем возможности установления взаимно однозначного соответствия между натуральными числами и действительными числами (находящимися между 0 и 1, как это делает, вслед за Кантором, Даубен вокруг рисунка 6). Для этого нам нужно синхронизовать алгоритмы порождения записей этих чисел.

Натуральные числа можно записывать по линейному алгоритму один за другим: 1, 2, 3 и т.д. Но действительные числа так записывать нельзя – не потому, что их больше, нет – потому что они содержат ДВЕ бесконечности: каждая запись такого числа бесконечна, и самих записей бесконечное количество. Поэтому действительные числа нужно записывать более хитроумным способом, двигаясь одновременно к двум бесконечностям. Сначала запишем

0,

Потом скопируем этот ноль в десяти экземплярах и допишем к каждому экземпляру разные десятичные цифры:

0,0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9

Теперь скопируем каждую строку опять в десяти экземплярах и допишем к каждому экземпляру свою десятичную цифру. (Этот алгоритм генерации и называется в ВТ «Алгоритмом А»). Дописав после запятой n цифр, мы имеем 10^n строк, и эти строки перебирают все возможные комбинации цифр в пределах n. Так мы двигаемся одновременно к двум бесконечностям:

«вправо» и «вниз», не пропуская ни одной комбинации цифр. Рост количества цифр *n* не ограничен, точно так же, как при записи одной единственной строчки – мы можем достигнуть любое наперед заданное *n*. (От затрат времени абстрагируемся).

Поэтому алгоритм А генерирует ВСЕ возможные действительные числа (между 0 и 1); эти числа становятся актуально бесконечными тогда, когда этот бесконечный процесс закончен – точно так же, как процесс записи одного индивидуального действительного числа порождает одну актуально бесконечную строку, если мы считаем его законченным.

Теперь, чтобы синхронизировать генерацию действительных чисел и натуральных чисел, мы должны натуральные числа генерировать не по прежнему линейному алгоритму, а тоже по алгоритму А. Возможно ли это? Конечно, возможно. Берем пустую строку (она соответствует строке «0,» у действительных чисел), размножаем ее в десяти экземплярах, добавляем к каждому экземпляру по цифре:

0
1
2
3
4
5
6
7
8
9

Потом размножаем каждую строку в десяти экземплярах и добавляем вторые цифры – и т.д. Теперь алгоритм А генерирует нам натуральные числа – но не линейно, как прежде, а другим, специфическим образом («скачками»). Тем не менее, по мере роста таблицы все натуральные числа в ней присутствуют (ведущие нули можно при желании затереть), ни одно число не пропущено, и может быть достигнуто любое наперед заданное число.

Дальше уже нет никаких проблем в синхронизации обоих алгоритмов генерации – каждый шаг одного процесса соответствует шагу другого процесса. После *n*-того шага 10^n натуральных чисел соответствуют 10^n приближениям к действительным числам. При переходе к *n*+1-му шагу это отношение соответствия сохраняется: теперь 10^{n+1} натуральных чисел соответствуют 10^{n+1} приближениям к действительным числам. На основе индукции мы заключаем, что и в пределе (в бесконечности) сохранится соответствие между натуральными числами и действительными числами.

Что можно сказать об этом соответствии?

Первое: Конечно, за исключением нуля, всем остальным действительным числам соответствуют бесконечно большие натуральные числа. (Естественно, иначе и быть не может: ведь действительных чисел – как и рациональных – бесконечно много в любом сколь угодно малом интервале).

Второе: Глядя на оба эти процесса генерации, нет никаких оснований считать, что процесс генерации натуральных чисел породит меньше элементов, чем процесс генерации действительных чисел.

Третье: Все эти игры с установлением «взаимно однозначного соответствия» в общем-то пустое и бессмысленное занятие. Но не мы его начали – это кантористы выдают его за невесть какое большое достижение. Наше дело было только показать, что по всем правилам, введенным самими кантористами (а нами только более ясно осознанными и оговоренными) соответствие между натуральными числами и действительными числами установить **можно**.

И это находится в полном согласии с тем фактом, что по диагональному процессу опровергающее действительное число построить **нельзя**.

* * *

Ниже я помещаю ряд материалов с сайта VE-POTI – три оригинальные статьи Кантора, прокомментированные Валдисом Эгле и четыре статьи его «Веданопедии» на тему канторизма. Эти тексты ссылаются на другие материалы сайта, частью существующие, а частью лишь обозначенные (если Валдис Эгле не успел их написать или закончить и выставить в Интернет). Я оставляю эти ссылки нетронутыми.

МОИ

Веданотека
Сайт: http://ve-poti.narod.ru/.

Текст «Кантор. Об алгебраических числах»

2013-01-23

Работа Георга Кантора «Об одном свойстве совокупности всех действительных алгебраических чисел» (Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen. – J. reine und angew. Math., 1874, Bd. 77, S. 258–262; русский перевод Ф.А. Медведева в книге: Кантор Георг. Труды по теории множеств. – М.: Наука, 1985, с. 18–22; ответственные редакторы А.Н. Колмогоров, А.П. Юшкевич) – эта работа Кантора является первой публикацией, в которой он «доказал несчетность континуума».

Предыстория публикации такова: Рихард Дедекинд прислал Кантору (видимо, как и многим другим математикам Германии) свою (видимо, только что изданную) книгу «Непрерывность и иррациональные числа»; Кантор 28 апреля 1872 года в кратком письме поблагодарил его, а спустя полтора года 29 ноября 1873 года обратился к нему: «*Позвольте предложить Вам вопрос, имеющий для меня некоторый теоретический интерес, на который я, однако, не могу ответить. Возможно, Вы сумеете это сделать и любезно напишете мне*»[35]. Это был вопрос о соответствии между множествами натуральных и действительных чисел. В том же письме Кантор пишет:

> «Не столь ли соблазнительно было бы заключить, что (n) нельзя поставить в однозначное соответствие с совокупностью (p/q) всех рациональных чисел p/q? И тем не менее нетрудно доказать, что (n) можно поставить в однозначное соответствие не только с этой совокупностью...»

Он в письме не дает этого доказательства, но считает его элементарным. Дедекинд записал в своем журнале[36]:

> «**29.11.1873 г.** (..) С обратным курьером я ответил, что ответа на первый вопрос я не знаю, но одновременно сформулировал и полностью доказал, что даже совокупность всех алгебраических чисел может быть поставлена в соответствие указанным образом с совокупностью (n) натуральных чисел (некоторое время спустя эта теорема и ее доказательство были почти буквально воспроизведены с применением специального термина «высота», в статье Кантора, появившейся в журнале Крелле,[37] т. 77, но с тем отличием – вопреки моему совету, – что рассмотрена лишь совокупность действительных алгебраических чисел). Однако высказанное мною мнение, что первый вопрос не заслуживает того, чтобы уделять ему много труда, поскольку он не представляет никакого практического интереса, было решительно опровергнуто данным Кантором доказательством существования трансцендентных чисел (J. reine und angew. Math., vol. 77)».

Собственно ответное письмо с доказательством Дедекинда «не обнаружено», но Кантор в следующем письме подтверждает, что доказательство было:

> «**Галле, 2 декабря 1873 г.** Я был очень счастлив, получив сегодня Ваш ответ на мое последнее письмо. Мой вопрос я поставил перед Вами потому, что он возник у меня уже несколько лет тому назад и я всё время интересовался, имеет ли встреченная мною трудность субъективную природу или же она заключена в самой проблеме. Поскольку Вы говорите мне, что и Вы не в состоянии ответить на него, то я могу предположить, что верна как раз вторая возможность. Впрочем, хотел бы добавить, что я никогда не занимался этим всерьез, поскольку не видел для себя практического интереса, и я вполне разделяю Ваше мнение, когда Вы говорите, что поэтому-то

---

[35] Переписка Кантора и Дедекинда приводится по названной книге «Кантор Георг. Труды по теории множеств» (М.: Наука, 1985), с. 327–333.

[36] По названной книге непонятно, какова была природа «журнала Дедекинда»: то ли это какой-то личный регистр по типу дневника или воспоминаний, то ли это какая-то публикация спустя годы...

[37] **Ф.А. Медведев:** Различие в указании издателя журнала «Journal für die reine...» у Кантора (..) и здесь у Дедекинда объясняется тем, что названный журнал был основан в 1826 г. немецким математиком Крелле и обычно цитировался по его фамилии нередко и после смерти Крелле в 1855 г.

данная проблема не заслуживает того, чтобы уделять ей много внимания. Тем не менее было бы хорошо решить ее: если бы, например, ответ был отрицательным, то тем самым мы получили бы новое доказательство теоремы Лиувилля, в которой утверждается существование трансцендентных чисел.

Ваше доказательство того факта, что (n) может быть поставлена в однозначное соответствие с полем алгебраических чисел, является почти тем же, при помощи которого я доказывал мое утверждение в последнем письме. Я полагаю $n_1^2 + n_2^2 + ... = N$ и затем упорядочиваю элементы».

Спустя пять дней Кантор пишет:

«**Галле, 7 декабря 1873 г.** В последние дни у меня оказалось время более тщательно изучить то предположение, о котором я говорил Вам. Только сегодня я покончил, как мне кажется, с этим делом».

Далее идет доказательство, но не то, которое видно ниже в статье Кантора, а другое, громоздкое. Через два дня новое письмо:

«**Галле, 9 декабря 1873 г.** Для доказанной недавно теоремы я нашел теперь более простое доказательство, в котором не требуется разложение последовательности (I) в (1), (2), (3). Исходя из последовательности (ω_1, ω_2, ..., ω_ν , ...,) я непосредственно показываю, что во всяком заданном интервале (α ... β) можно определить число η, не принадлежащее (I). Этого достаточно, чтобы вывести отсюда то заключение, что совокупность (x) не может быть поставлена в однозначное соответствие с совокупностью (n)».

Это уже то доказательство, которое будет в статье. Спустя 16 дней такое письмо Кантора:

«**Берлин, 25 декабря 1873 г.** Хотя я не намеревался пока публиковать что-либо по вопросу, недавно впервые обсужденному с Вами, мне пришлось неожиданно сделать это. Мои результаты я сообщил 22 декабря г-ну Вейерштрассу, но тогда не хватило времени поговорить об этом подробно. 23 декабря я был очень обрадован его визитом, что позволило мне сообщить ему доказательство. Он посоветовал опубликовать это, принимая во внимание, что речь идет об алгебраических числах. Тогда я написал небольшую статью под названием «Об одном свойстве совокупности всех действительных алгебраических чисел» и послал ее г-ну профессору Борхардту, чтобы он рассмотрел возможность опубликования ее в «J. reine und angew. Math.». При редактировании этой статьи, как Вы увидите, оказались очень полезными Ваши замечания и Ваш способ выражений. Именно об этом я и хотел поставить Вас в известность».

Так возникла та статья, которая приводится ниже и которая считается легендарной у кантористов.

Кантор Г. «Об одном свойстве совокупности всех действительных алгебраических чисел»

Под действительным алгебраическим числом вообще будет пониматься действительная числовая величина ω, удовлетворяющая отличному от тождества уравнению вида

$$a_0\omega^n + a_1\omega_{n-1} + ... + a_n = 0, \qquad (1)$$

где n, a_0, a_1, ... , a_n – целые числа; при этом числа n и a_0 можно брать положительными, коэффициенты a_0, a_1, ... , a_n – взаимно простыми, а уравнение (1) – неприводимым. Этими условиями достигается то, что по известным основным теоремам арифметики и алгебры уравнение (1), которому удовлетворяет некоторое алгебраическое число, оказывается вполне определенным; обратно, уравнению вида (1) соответствует, как известно, самое большее столько алгебраических чисел, какова его степень n. Рассматриваемые все вместе, действительные алгебраические числа образуют некоторую совокупность числовых величин, которая будет обозначаться через (ω). Как вытекает из простых соображений, эта совокупность обладает тем свойством, что во всякой окрестности любого мыслимого числа α расположено бесконечно много чисел из (ω). Поэтому, на первый взгляд, тем поразительнее может показаться замечание, что совокупности (ω) можно однозначно поставить в соответствие совокупность всех целых положительных чисел ν, которая будет обозначаться через (ν), и притом так, что всякому алгебраическому числу ω соответствует определенное целое положительное число ν и, наоборот, всякому целому положительному числу ν соответствует определенное число ω; а значит, выражая то же самое другими словами, совокупность (ω) можно мыслить в форме законченной бесконечной последовательности

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots, \qquad (2)$$

в которую входят все индивиды из (ω), причем каждый из них занимает определенное место в (2), задаваемое соответствующим индексом. Как только найден один закон, по которому можно представить такое соответствие, так его можно произвольно модифицировать; поэтому достаточно предложить в §1 такой метод, который, как мне кажется, доставит меньше всего хлопот.

Чтобы указать на одно применение этого свойства совокупности всех действительных алгебраических чисел, к §1 я добавлю §2, где устанавливаю, что если предложена любая последовательность действительных числовых величин вида (2), то во всяком заданном интервале (α ... β) можно определить числа η, которые не содержатся в (2). Комбинируя содержание этих двух параграфов, получаем новое доказательство установленной впервые Лиувиллем теоремы, что во всяком заданном интервале (α ... β) имеется бесконечно много трансцендентных, т.е. не алгебраических, действительных чисел.[38] Далее, теорема из §2 оказывается основанием того, почему совокупность всех действительных числовых величин, образующую так называемый континуум (например, совокупность всех действительных чисел, которые ≥ 0 и ≤ 1), нельзя однозначно отобразить на совокупность (ν). Таким образом, я нашел четкое различие между так называемым континуумом и совокупностью вида совокупности всех действительных алгебраических чисел.

§ 1

Если мы обратимся к уравнению (1), которому удовлетворяет алгебраическое число ω и которое по сделанным предположениям является вполне определенным, то сумму абсолютных величин его коэффициентов, увеличенную на число n–1, где n – степень числа ω, можно назвать высотой числа ω и обозначить через N; следовательно, применяя ставший обиходным способ обозначений, имеем

$$N = n-1 + |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_n|. \qquad (3)$$

Тем самым, высота N всякого действительного алгебраического числа ω является определенным целым положительным числом. Обратно, для всякого положительного целочисленного значения N существует лишь конечное число алгебраических действительных чисел высоты N; пусть их число будет φ(N); например, φ(1) = 1, φ(2) = 2, φ(3) = 4. Тогда числа совокупности (ω) можно упорядочить следующим образом: в качестве первого числа ω_1 берем число высоты N = 1; за ним будут следовать φ(2) = 2 алгебраических числа, имеющих высоту N = 2 и расположенных по величине, и их мы обозначим через ω_2, ω_3; за ними идут φ(3) = 4 числа, имеющих высоту N = 3 и расположенных по величине; вообще после того как таким способом перечислены все числа из (ω) до некоторой высоты $N = N_1$ и помещены на определенные места, то за ними следуют действительные алгебраические числа высоты $N = N_1+1$, причем они идут в порядке возрастания их величин. Так мы получаем совокупность (ω) всех действительных алгебраических чисел в виде

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots,$$

и, принимая во внимание это расположение, можно говорить о ν-м действительном алгебраическом числе, причем ни одно из чисел совокупности (ω) не потеряно.

§ 2

Если по какому-нибудь закону задана бесконечная последовательность отличных друг от друга числовых величин

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots, \qquad (4)$$

---

[38] **Ф.А. Медведев:** В 1844 г. французский математик Лиувилль нашел специфическую характеристику разложений алгебраических чисел в цепные дроби, что позволило ему обнаружить существование трансцендентных чисел. Эти результаты изложены им детальнее в 1851 г. Об истории трансфинитных чисел см. [Liouville J. Sur les classes très-étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible a des irrationnelles algébriques. – J. math, pures et appl., 1851, vol. 16, p. 133–142.].

то во всяком заданном интервале ($\alpha \ldots \beta$) можно определить число η (а значит, и бесконечно много таких чисел), которое не содержится в последовательности (4). Это и предстоит теперь доказать.

Мы начинаем с произвольно заданного интервала ($\alpha \ldots \beta$), и пусть $\alpha < \beta$. Два первых числа последовательности (4), которые расположены в этом интервале (за исключением концов), можно обозначить через α', β', и пусть $\alpha' < \beta'$; аналогично два первых числа нашей последовательности, расположенных внутри ($\alpha' \ldots \beta'$), обозначим через α'', β'', и пусть $\alpha'' < \beta''$; по тому же закону образуем следующий интервал ($\alpha''' \ldots \beta'''$) и т.д. Здесь, следовательно, α', α'', ... по самому определению являются определенными числами нашей последовательности (4), индексы которых всё время возрастают; то же самое справедливо для чисел β', β'', ... Примем, далее, числа α', α'', ... возрастающими по величине, а числа β', β'', ... убывающими по величине. Каждый из интервалов ($\alpha \ldots \beta$), ($\alpha' \ldots \beta'$), ($\alpha'' \ldots \beta''$), ... содержит в себе все следующие за ним. Теперь мыслимы только два случая.

Или число построенных таким образом интервалов конечно, и пусть последний из них будет ($\alpha^{(v)} \ldots \beta^{(v)}$). Так как внутри него может быть расположено самое большее одно число последовательности (4), то в этом интервале можно взять число, не содержащееся в последовательности (4), и тем самым для этого случая теорема доказана.

Или число построенных интервалов бесконечно. Тогда числа α, α', α'', ..., поскольку они возрастают по величине, не возрастая до бесконечности, имеют определенный предел α^{∞}; то же самое верно для чисел β, β', β'', ..., так как они убывают по величине, и пусть их предел β^{∞}. Если $\alpha^{\infty} = \beta^{\infty}$ (случай, имеющий место для совокупности (ω) всех действительных алгебраических чисел), то легко убедиться, обратившись к определению интервала, что число $\eta = \alpha^{\infty} = \beta^{\infty}$ не может содержаться в нашей последовательности.[39] Если же $\alpha^{\infty} < \beta^{\infty}$, то всякое число η внутри интервала ($\alpha^{\infty} \ldots \beta^{\infty}$) или на его границе удовлетворяет выставленному требованию не содержаться в последовательности (4).

Теоремы, доказанные в этой статье, можно обобщать в разных направлениях, из которых здесь упомянем лишь об одном:

«Если ω_1, ω_2, ..., ω_n, ... – конечная или бесконечная последовательность линейно независимых друг от друга чисел (так что невозможно равенство $a_1\omega_1$, $a_2\omega_2$, ..., $a_n\omega_n = 0$ с целочисленными коэффициентами, не все из которых равны нулю) и мы вообразим совокупность (Ω) всех тех чисел Ω, которые можно представить в виде рациональных функций с целочисленными коэффициентами от заданных чисел ω, то во всяком интервале ($\alpha \ldots \beta$) существует бесконечно много чисел, не содержащихся в (Ω)».

Действительно, при помощи умозаключения, аналогичного изложенному в §1, убеждаемся, что совокупность (Ω) можно представить в виде последовательности

$$\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_v, \ldots,$$

откуда, принимая во внимание вывод §2, следует справедливость этого предложения.

Совсем частный случай приведенной здесь теоремы (когда последовательность ω_1, ω_2, ... , ω_n, ... конечна, а степень рациональных функций, задающих совокупность (Ω), фиксирована) доказан господином Миннигероде (см.: Math. Ann., Bd. 4, S. 497)[40] путем сведения к принципам Галуа.

Примечание Эрнста Цермело[41]

В настоящей статье, открывающей серию теоретико-множественных работ, речь идет еще исключительно об элементарном понятии «счетных множеств». В ней показывается, что как

---

[39] Если бы число η содержалось в нашей последовательности, то мы имели бы $\eta = \omega_p$, где p – определенный индекс; однако это невозможно, ибо ω_p не содержится внутри интервала ($\alpha^{(p)} \ldots \beta^{(p)}$), тогда как число η по его определению расположено внутри этого интервала.

[40] **Ф.А. Медведев:** Миннигероде – приват-доцент по математике Гёттингенского университета, лекции которого Кантор слушал в 1866 г.; с 1874 г. – экстраординарный, а с 1885 г. – ординарный профессор университета в Грейфсвальде. [Minnigerode B. Bemerkung über irrationale Zahlen. – Math. Ann., 1871, Bd. 4, S. 497–498.]

[41] **В.Э. 2013-01-23:** Эрнст Цермело был составителем и редактором того издания трудов Кантора, с которого делался русский перевод. (Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts. Mit erlauterenden Anmerkungen sowie mit Erganzungen aus dem Briefwechsel Cantor–Dedekind / Hrsg. von E. Zermelo; Nebst einem Lebenslauf Cantors von A. Fraenkel. Berlin: Springer, 1932. Переизд.: Hildesheim, 1962; Berlin etc., 1980.)

совокупность рациональных, так и совокупность алгебраических чисел подпадают под это понятие, а совокупность действительных чисел конечного интервала не подпадает под него. Первое доказательство, которое странным образом только одно вошло в название работы, является относительно простым и естественно получается из понятия алгебраического числа, так только поставлен сам вопрос. Напротив, приведенное в §2 доказательство «несчетности» действительных чисел удалось Кантору, как он утверждает сам, с трудом и после нескольких тщетных попыток. Оно представляется нам сегодня несравненно более глубоким результатом данного исследования, а по его методу оно типично для специфически теоретико-множественного способа умозаключений. Только после доказательства того, что существуют и вполне определенные «несчетные» математические совокупности, понятие «счетности» получает смысл и значение, и тогда переход к общему понятию «мощности» является лишь следующим шагом. Терминология в этой основополагающей работе еще не установилась: вместо слова «множество» речь идет о «собрании» или «совокупности», да и слово «счетное» здесь еще отсутствует; все время говорится об «однозначном соответствии» элементов одного собрания элементам другого. Ввиду ясности канторовского изложения, особых пояснений здесь не требуется. Впрочем, не совсем ясно, почему Кантор ограничил свою теорему «действительными» алгебраическими числами, тогда как его доказательство в целом непосредственно применимо ко всем (действительным и комплексным) алгебраическим числам.[42]

Комментарий В.Э.

§1. О первом параграфе Кантора

Итак, из приведенных выше документов совершенно ясно, что содержащееся в §1 статьи Кантора положение (о «счетности» алгебраических чисел) на самом деле доказал Дедекинд (в письме Кантору от 8 декабря 1873 года), а Кантор в публикуемой статье преподнес это как свой собственный результат, даже не упомянув имя Дедекинда. Это был поступок явно непорядочный – по тогдашним меркам в такой же мере, как и по сегодняшним. К тому же Дедекинд сохранил все письма Кантора, а Кантор письма Дедекинда то ли уничтожил, то ли потерял – в том числе и письмо с доказательством Дедекинда.

Всё же вряд ли стоит обвинять Кантора в намеренном плагиате и в желании присвоить себе результат Дедекинда. Скорее можно сказать, что деятельность Кантора в этом вопросе отмечена печатью общей суетливости и непродуманности. 23 декабря Вейерштрасс «нанес визит» Кантору в его берлинском обиталище (в гостиницу или где он там жил в чужом городе) и посоветовал публиковать статью, а 25 декабря Кантор уже сообщает Дедекинду, что он «послал ее г-ну профессору Борхардту». Таким образом, у Кантора на сочинение, обдумывание, редактирование статьи было, самое большое, двое суток времени (а скорее: один день).

Видимо, Дедекинд тоже так думал, и поэтому не стал упрекать Кантора и поднимать этот вопрос, хотя записал в свой «журнал» однозначно, что это именно он «*сформулировал и*

[42] **В.Э. 2013-01-23:** По этому последнему вопросу Кантор писал Дедекинду из Берлина 27 декабря 1873 года: «То, что я придал ограниченный характер опубликованной статье, объясняется отчасти условиями, господствующими здесь, о которых я, возможно, когда-либо расскажу Вам. Но, с другой стороны, я полагаю, что сначала целесообразно применить мое рассуждение в частном случае (вроде случая действительных алгебраических чисел). Возможные обобщения, – а я сумел найти их несколько, – уже не могут составить большого труда; сделаю ли это я или кто другой, это несущественно». Дедекинд записал в своем журнале: «**25.12.1873.** Кантор пишет (из Берлина), что он подготовил (по рекомендации Вейерштрасса) небольшую статью под названием «*Об одном свойстве совокупности всех действительных алгебраических чисел». «При редактировании этой статьи, как Вы увидите, оказались очень полезными Ваши замечания и Ваш способ выражений*». С обратным курьером я отвечаю, посоветовав ему отбросить ограничение на поле алгебраических чисел быть действительными»; «**27.12.1873.** Кантор пишет (из Берлина): «*То, что я придал ограниченный характер опубликованной статье, объясняется отчасти условиями, господствующими здесь, о которых я, возможно, когда-либо расскажу Вам. Но, с другой стороны, я полагаю, что сначала целесообразно применить мое рассуждение в частном случае (вроде случая действительных алгебраических чисел)*». Я не получил разъяснения относительно «берлинских условий». В последующем мы уже не возвращались к этой статье (J. reine und angew. Math., vol. 77)». (Кантор Георг. Труды по теории множеств. – М.: Наука, 1985, с. 331 и 333).

полностью доказал, что даже совокупность всех алгебраических чисел может быть поставлена в соответствие указанным образом с совокупностью (n) натуральных чисел».

§2. О втором параграфе Кантора

Та же печать суетливости и непродуманности лежит и на втором параграфе Кантора. Читая его, создается впечатление, что Кантор не доказывает теорему, а уговаривает читателя поверить ему. Прочитаем еще раз ядро этого доказательства:

> Или число построенных интервалов бесконечно. Тогда числа α, α', α'', ..., поскольку они возрастают по величине, не возрастая до бесконечности, имеют определенный предел α^{∞}; то же самое верно для чисел β, β', β'', ..., так как они убывают по величине, и пусть их предел β^{∞}. Если $\alpha^{\infty} = \beta^{\infty}$ (случай, имеющий место для совокупности (ω) всех действительных алгебраических чисел), то легко убедиться, обратившись к определению интервала, что число $\eta = \alpha^{\infty} = \beta^{\infty}$ не может содержаться в нашей последовательности.[43] Если же $\alpha^{\infty} < \beta^{\infty}$, то всякое число η внутри интервала (α^{∞} ... β^{∞}) или на его границе удовлетворяет выставленному требованию не содержаться в последовательности (4).

Почему-то упоминаются алгебраические числа; сначала сказано, что вывод получен «*обратившись к определению интервала*», а потом в сноске (видимо, позже, уже во время чтения корректуры, иначе зачем выносить в сноску?) добавлено что-то про индексы...

Доказательство Кантора несостоятельно, но об этой несостоятельности мы поговорим чуть позже, а сейчас я обращаю внимание читателя на общую путанность мыслей Кантора. Эту путанность видел и, например, переводчик Кантора на русский язык Ф.А. Медведев. В своей книге «Развитие теории множеств в XIX веке» («Наука», Москва 1965) он приводит это доказательство Кантора как «чрезвычайно важное». Но он не цитирует Кантора (как оно было бы нормально), а вместо этого сам излагает всё заново и более стройно. Прочитаем и его:

> Содержание заметки сводится к следующему. Методом Дедекинда доказывается счетность множества всех действительных алгебраических чисел. Затем показывается, что если по какому-либо закону задан счетно-бесконечный ряд отличных друг от друга действительных чисел
>
> $$a_1, a_2, ..., a_n ..., \qquad (1)$$
>
> то в любом заданном интервале (α, β) можно указать такое число η, которое не принадлежит ряду (1). Доказательство этого факта, ввиду его особой важности в теории множеств, а также потому, что в нем используется метод вложенных отрезков, мы приведем полностью, следуя Кантору.
>
> Пусть задан какой-либо интервал (α, β) и $\alpha < \beta$. Если в нем совсем нет чисел из ряда (1) или содержится лишь одно такое число, то теорема доказана. Пусть поэтому α' и β' – два первых попавшихся нам числа ряда (1), содержащиеся внутри (α, β) и не совпадающие с его концами, и пусть $\alpha' < \beta'$. Если в интервале (α', β') нет чисел ряда (1) или же содержится лишь одно такое число, то теорема доказана. Если в него попали не одно, а более чисел из (1), то мы можем выбрать два числа α'', β'', $\alpha'' < \beta''$ и рассмотреть интервал (α'', β'') и т.д. Процесс построения интервалов ($\alpha^{(v)}$, $\beta^{(v)}$) может быть или конечен или бесконечен. Если число построенных таким образом интервалов конечно и последний из них есть ($\alpha^{(v)}$, $\beta^{(v)}$), то в нем может лежать самое большее одно число ряда (1), пусть a_k, так как иначе построение продолжалось бы. Но тогда теорема доказана, так как в ($\alpha^{(v)}$, $\beta^{(v)}$), $\alpha^{(v)} < \beta^{(v)}$, всегда можно указать число, отличное от a_k.
>
> Предположим поэтому, что число получаемых таким образом интервалов бесконечно. Тогда мы имеем две последовательности
>
> $$\alpha_1 < \alpha' < \alpha'' < ... ,$$
> $$\beta_1 < \beta' < \beta'' < ... .$$
>
> первая из которых монотонно возрастает и ограничена сверху (любым из чисел β), а вторая монотонно убывает и ограничена снизу (любым из чисел α). Пусть предел первой последовательности есть ξ_1, а предел второй ξ_2. Если $\xi_1 < \xi_2$, то теорема доказана, так как любое число интервала (ξ_1, ξ_2) не содержится в ряду (1). Если же $\xi_1 = \xi_2$, то число $\eta = \xi_1 = \xi_2$ не может содержаться в ряде (1), так как если бы оно в нем содержалось, то оно было бы занумеровано каким-либо определенным индексом p по мере включения чисел ряда (1) в интервалы ($\alpha^{(v)}$, $\beta^{(v)}$), а значит лежало бы вне интервала ($\alpha^{(p)}$, $\beta^{(p)}$), тогда как число η по самому его определению расположено внутри ($\alpha^{(p)}$, $\beta^{(p)}$). Следовательно, и в этом случае теорема доказана. Тем самым доказано, что множество действительных чисел интервала не может быть перенумеровано при помощи натуральных чисел.

---

[43] Если бы число η содержалось в нашей последовательности, то мы имели бы $\eta = \omega_p$, где p – определенный индекс; однако это невозможно, ибо ω_p не содержится внутри интервала ($\alpha^{(p)}$ ... $\beta^{(p)}$), тогда как число η по его определению расположено внутри этого интервала.

> В этом доказательстве мы видим применение того же самого диагонального метода, которым за год до того пользовался Дюбуа-Раймон при построении возрастающей быстрее любой из заданной последовательности всё более быстро возрастающих функций: для предложенной счетной последовательности объектов (чисел у Кантора, функций у Дюбуа-Раймона) строится объект (число или функция), не содержащийся в заданной последовательности.[44]

Очевидно, что у Медведева то же самое доказательство, что и у Кантора, только изложенное более стройно и ясно, и чуточку изменены обозначения. Медведев называет это сначала «методом вложенных отрезков», а в конце «диагональным методом» на том основании, что «*строится объект* (..)*, не содержащийся в заданной последовательности*».

У Дюбуа-Раймона (его рассуждения описаны в книге Медведева) действительно имеется диагональ, и по этой диагонали строящийся объект в каком-то элементе отличается от каждого объекта прежней последовательности. При этом Дюбуа-Раймон НЕ принимает «постулат Кантора» (что в бесконечности будет $a^n = n$); у него в бесконечности остается $n = n$, поэтому Дюбуа-Раймон действительно строит свой новый объект. Если же принимается «постулат Кантора», то и по диагонали не строится то, что ожидают кантористы. А здесь нет даже и диагонали, которая определяла бы отличие строящегося объекта от всех предыдущих.

Здесь вообще нет никакого построения.

На чем основывается мнение Кантора и Медведева, будто здесь что-то строится? На том, что есть последовательности $\alpha_1 < \alpha' < \alpha'' < \ldots$, $\beta_1 < \beta' < \beta'' < \ldots$, которые в бесконечном случае (а конечные случаи нас не интересуют подавно) будут иметь «пределы»: α^∞ и β^∞ у Кантора, ξ_1 и ξ_2 у Медведева. Но что такое «предел» для ЭТИХ последовательностей?

Когда у нас есть какая-нибудь функция, скажем, $y = f(x)$, которая при $x \to \infty$ имеет предел, положим, $y = 3$, то у нас задан закон, по которому будут меняться соответствующая последовательность приближений. По этому закону мы можем найти любой член последовательности сколь угодно далеко, и «в конце концов», когда «потенциальная бесконечность превращается в актуальную», число 3 станет «значением функции»; это и есть «предел».

А у последовательностей Кантора–Медведева никакого закона, их определяющего, нет. Эти последовательности состоят только из чисел исходной последовательности (1). Есть такие числа – есть последовательность $\alpha_1 < \alpha' < \alpha'' < \ldots$; нет таких чисел – нет дальше последовательности. Если у этой последовательности есть предел, то приближение к нему происходит только числами исходной последовательности (1), и сам этот предел тоже число последовательности (1).

На то она и бесконечность, чтобы быть неисчерпаемой: числа из (1) всё есть и есть!

А Кантор и Медведев приняли, что у их последовательностей вдруг откуда-то появится какой-то посторонний «предел», отличный от членов ряда. Они приняли то, что хотят доказать, и потом этим же и «доказывают» желаемое. Классическая логическая ошибка – «порочный круг».

§3. Случай с Подниексом

Когда закончилась дискуссия «Канториана»[45], я в конце 1980-х или в начале 1990-х взял в библиотеке книгу «Кантор Георг. Труды по теории множеств. – М.: Наука, 1985» (кажется, брал даже два раза). Тогда я видел приведенную выше статью Кантора, но не углублялся в нее, не переписал ее, не запомнил способ доказательства (больше конспектировал письма Кантора–Дедекинда и другие вещи). Книга была в моем распоряжении короткое время, и получить ее снова было довольно сложно – требовалась целая экспедиция в библиотеку (которая стала теперь платной и вообще почти не работающей...).

Поэтому, когда мне понадобилось писать об этом доказательстве Кантора, я воспользовался не библиотечной и труднодоступной для меня книгой трудов Кантора, а книжкой Карлиса Подниекса, которую он мне подарил в 1992 году и которую я мог в любой момент просто взять, протянув руку к книжной полке. Там тоже описывалось доказательство Кантора (именно этой теоремы), и мне и в голову не приходило, что это описание может быть неправильным. Так это описание попало сначала в книгу REVIS, а потом в статью Веданопедии «Диагональный метод».

Теперь наступили другие времена, не надо уже ходить в платные библиотеки, книги можно скачать с Интернета; я скачал ту же книгу «Кантор Георг. Труды по теории множеств. – М.:

---

[44] Медведев Ф.А. «Развитие теории множеств в XIX веке». «Наука», Москва 1965, с. 95–96.

[45] См. книги {CANTO} и {CANTO2}.

Наука, 1985» (в отличие от большинства интернетовских книг засканированную очень хорошо как *Djvu* файл!) и стал работать с ней.

Велико же было мое удивление, когда я обнаружил, что Кантор дает совершенно другое доказательство, нежели то, что давал Подниекс как якобы канторовское. Досада, конечно, была, что из-за Подниекса в мои сочинения попало неправильное описание доказательства Кантора, но что теперь поделаешь! Однако сейчас нам интереснее другое: **почему** Подниекс (или тот автор, у которого он списывал) заменили подлинное доказательство Кантора на другое?

Ответ напрашивается сам собой: Да потому, что они тоже **видели** несостоятельность канторовского доказательства! Они, конечно, были уверены, что теорема-то в общем правильна, но только Кантор не смог ее как следует доказать, потому и подменили доказательство на более убедительное – по их мнению.

Сейчас я приведу описание рассматриваемой нами теоремы еще и по Подниексу (К.М. Подниекс. «Вокруг теоремы Геделя». Рига, «Зинатне», 1992, с. 40–41):

> ...В ответном письме Р. Дедекинд показал, как можно перенумеровать натуральными числами все алгебраические числа. Но перенумеровать все действительные числа ему не удалось...
>
> Разумеется, это не случайно, поскольку в своем следующем письме Р. Дедекинду (7 декабря 1873 г.) Г. Кантор показывает, что взаимно однозначное соответствие между натуральными и действительными числами невозможно. В своем доказательстве Г. Кантор применил конструкцию, названную впоследствии диагональным методом. Он исходил из произвольной последовательности действительных чисел $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ и произвольного интервала (b, c), делил интервал на три части, брал ту из частей, которая не содержит a_1, затем делил на три эту часть и брал ту треть, которая не содержит a_2, и т.д. В результате получалась последовательность стягивающихся интервалов (b_i, c_i):
>
> $$b_1 \le b_2 \le b_3 \le ... \le c_3 \le c_2 \le c_1.$$
>
> Общая точка (предел) этих интервалов и представляет собой действительное число, не входящее в последовательность $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ Таким образом, никакая последовательность, пронумерованная натуральными числами, не может исчерпать все действительные числа.
>
> Это была еще одна революция – в представлениях о математической бесконечности. Оказывается, наряду с бесконечным множеством натуральных чисел существует «еще более бесконечное» множество действительных чисел, т.е. существуют бесконечности по крайней мере двух типов. Теорема Кантора дает также поразительно простое доказательство существования трансцендентных чисел (и одновременно доказательство того, что трансцендентных чисел «гораздо больше», чем алгебраических, которые можно перенумеровать с помощью натуральных чисел). Правда, конкретные трансцендентные числа построил еще в 1844 г. Ж. Луивилль, а в 1873 г. Ш. Эрмит доказал, что трансцендентным является число *e*.

Вот, это доказательство и дается мною в статье «Диагональный метод» – и там ошибочно приписывается самому Кантору. (Так как ко мне оно попало от Подниекса, то назовем его «доказательством Подниекса» – в противоположность доказательствам Кантора и Медведева).

В цитированном тексте Подниекс утверждает, что именно это доказательство Кантор и предъявил Дедекинду 7 декабря 1873 г. Но то, что он предъявил на самом деле, напечатано на страницах 329 и 330 упомянутых «Трудов Кантора». Это совсем другое, очень длинное доказательство (я не буду его здесь приводить), и никаких трех частей в интервалах там нет. На два дня позже Кантор сообщает Дедекинду, что нашел доказательство попроще (видимо то, которое потом напечатано в статье), но в письме он его не приводит. Так что Дедекинд до напечатанной статьи видел только первое, громоздкое доказательство.

«Доказательство Подниекса», конечно, возвышается на голову над оригинальным доказательством Кантора (не зря заменяли!). У Кантора (и Медведева) логическая схема рассуждения, если ее до предела оголить, такова:

1. Постулат 1: Существует такой предел $\xi_1 = \xi_2$ последовательностей $\alpha_1 < \alpha' < \alpha'' < ...$, $\beta_1 < \beta' < \beta'' < ...$, которого нет в (1).
2. Предположение о том, что в (1) содержатся все числа, противоречит Постулату 1.
3. Следовательно, в (1) содержатся не все числа.
4. Теорема доказана.

То есть, существование η просто постулируется, а все «доказательства» – всего лишь декорации вокруг этого постулата.

Иное дело у Подниекса – у него существование предела не просто постулируется, а предел конструируется – строится (по определенному алгоритму). Но у него постулируется другое: что будет $3^n = n$ при бесконечности. Поэтому его доказательство тоже мы не можем считать состоятельным.

§4. Действительные отличия континуума

Итак, теорема Кантора, данная в §2 его статьи (о том, что континуум нельзя перенумеровать) – несостоятельна.

Однако общий вывод, который он делает, полагая, что теорему доказал, очень скромен (он мною подчеркнут красным в преамбуле канторовской статьи): «*я нашел четкое различие между так называемым континуумом и совокупностью вида совокупности всех действительных алгебраических чисел*».

Здесь нет еще превосходящих мощностей, разных бесконечностей, «трансфинитных чисел» и всей прочей чепухи, которая в последующие годы вырастет из этого. Здесь просто утверждается, что между алгебраическими числами и «континуумом» имеется «четкое различие» (по «теоретико-множественным» характеристикам).

Ну, а это утверждение неоспоримо: конечно же, различие есть. И сейчас я покажу, в чем в действительности состоит это различие.

Почему Кантор мог установить взаимно однозначное соответствие между натуральными числами и рациональными числами, а Дедекинд – между натуральными и алгебраическими? Потому, что рациональные и алгебраические числа характеризуются конечным числом признаков.

Так рациональное число p/q характеризуется всего двумя признаками (p и q). Каждый из признаков может принимать значения до бесконечности, но их остается всего два. Поэтому можно найти такой алгоритм, который линейным образом (одно за другим) будет перебирать все рациональные числа («устанавливать взаимно однозначное соответствие» с натуральными числами).

У алгебраических чисел система признаков сложнее, но число признаков тоже остается конечным. Поэтому для них тоже можно найти алгоритм, линейным образом их перебирающий.

У действительных чисел в общем случае количество признаков становится бесконечным. Так, например, произвольное иррациональное число может быть охарактеризовано только бесконечной последовательностью цифр его десятичного, двоичного или другого разложения. Тем самым становится невозможным найти линейный алгоритм, их перебирающий (т.е. такой, который брал бы их одно за другим), – потому что алгоритму приходится «перескакивать» через бесконечность каждого отдельного иррационального числа, идти одновременно к двум бесконечностям: к бесконечности количества элементов и к бесконечности каждого отдельного элемента.

Таким образом, подлинное различие между «континуумом» и рациональными или алгебраическими числами состоит в бесконечности признаков у элементов континуума – в бесконечности самих элементов.

Из-за этой бесконечности элементов континуума появляются два следствия:

1) для них невозможно найти линейный алгоритм перебора; и
2) в них можно запускать бесконечный диагональный процесс.

Оба эти следствия вытекают из одной и той же причины (из бесконечности элементов континуума), поэтому они всегда идут парой: либо оба есть, либо обоих нет.

Но это отличие континуума (и вытекающие из него два следствия) не имеют никакого отношения к количеству элементов в континууме (к его «мощности») – они имеют отношение только к количеству элементов в элементах континуума (к тому, что те бесконечны).

Между элементами континуума и натуральными числами всё равно можно установить взаимно однозначное соответствие, но только, разумеется, не по линейному, а по нелинейному алгоритму (такому, который идет не к одной, а сразу к двум бесконечностям; Кантор и кантористы такие нелинейные алгоритмы вообще никогда не рассматривали).

Всё учение Кантора, выросшее в дальнейшем из «четкого различия» между континуумом и алгебраическими числами, о котором он говорит в данной статье, базируется на одной фундаментальной ошибке: на том, что он отнес к количеству элементов в континууме то, что на самом деле относится к количеству элементов в элементах континуума.

А все попытки «доказать», что в (самом) континууме больше элементов, чем в «счетном множестве», несостоятельны (как несостоятельны в этом документе были «доказательства»

Кантора, Медведева и Подниекса) и в ходе этих попыток совершаются всё новые и новые логические ошибки.

Достаточно это понять и осмыслить, чтобы все воздушные замки Кантора рухнули, и за их руинами открылась картина подлинной математической реальности.

Веданотека
Сайт: http://ve-poti.narod.ru/.

Текст «Кантор. К учению о многообразиях»

2013-02-12

Настоящий документ Веданопедии (Веданотеки – ее хранилища оригинальных текстов различных авторов) содержит две статьи Георга Кантора:

1) «К учению о многообразиях» (Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre. – J. reine und angew. Math., 1878, Bd. 84, S. 242–258. Перевод Ф.А. Медведева); это с. 22–35 в книге: Кантор Георг. Труды по теории множеств. – М.: Наука, 1985; ответственные редакторы А.Н. Колмогоров, А.П. Юшкевич, и в этой книге данная работа Кантора обозначается как I.3 – первый раздел («Труды по теории множеств»), третий труд.

2) «Об одном элементарном вопросе учения о многообразиях» (Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre. – Jahresber, Dt. Math. Ver., 1890/1891, Bd. 1, S. 75–78. Перевод Ф.А. Медведева); это с. 170–172 в той же книге, и данная работа там обозначается как I.9 (девятый труд первого раздела).

Статья «К учению о многообразиях» напечатана в 1878 году – спустя 4 года после статьи 1874 года «Об одном свойстве совокупности всех действительных алгебраических чисел» (у нас разобранной в http://ve-poti.narod.ru/B051.PDF); в промежутке между ними ничего не было, так что статья 1878 года является прямым продолжением статьи 1874 года.

Коротенькая статья «Об одном элементарном вопросе учения о многообразиях» напечатана еще на 12 лет позже, и в промежутке были обширные работы (занимающие 134 страницы в указанной книге Трудов Кантора) с построением основного здания канторизма. Но в данной коротенькой статье впервые применяется знаменитый впоследствии «канторовский диагональный метод» (см.: http://ve-poti.narod.ru/A201.PDF).

В настоящем документе Веданопедии эти две статьи Кантора объединены не только из-за краткости второй, но главным образом потому, что именно в их сравнении раскрываются дальнейшие логические ошибки Кантора после тех, о которых говорилось в документе B051. В том документе были указаны две ошибки:

1) Кантор не доказал, а постулировал, что континуум нельзя сопоставить со «счетным множеством»;

2) Он отнес к количеству элементов в континууме то, что на самом деле относится к количеству элементов в элементах континуума.

В приведенных же здесь статьях отличающиеся мощности континуума и счетного множества считаются уже доказанными, и начинаются логически незаконные манипуляции с «взаимно однозначным соответствием», интерпретируя его то одним, то другим способом, смотря по тому, как более выгодно для цели «доказательства» постулированного заранее различия мощностей множеств.

Первая работа Кантора (об алгебраических числах) прошла, видимо, практически незамеченной, и никто из современников не указал ему на несостоятельность его «доказательства». Потом канторизм встретил резкую оппозицию. «*Всё, что сделал в этой области Кантор, было не математикой, а мистикой*», заявил Кронекер; «*Грядущие поколения будут рассматривать теорию множеств как болезнь, от которой они излечились*», заявил Пуанкаре; интуиционисты и конструктивисты начали создавать новую «конструктивную математику», в которой не было бы канторовских «воздушных замков»... Но меня всё-таки удивляет, почему НИКТО из них вместо произнесения общих фраз не выполнил эту столь несложную работу: просто взять и разобрать основные положения Кантора и указать в них конкретные логические ошибки.

Валдис Эгле

12 февраля 2013 г.

Георг Кантор. «К учению о многообразиях»

Если два вполне определенных многообразия M и N можно однозначно и полно поэлементно сопоставить друг с другом (что всегда возможно и многими другими способами, если это сделано каким-либо одним), то далее удобно говорить, что эти многообразия имеют равную мощность или же что они эквивалентны. Под составной частью многообразия M мы понимаем всякое другое многообразие M', элементы которого одновременно являются элементами многообразия M. Если два многообразия M и N не имеют равной мощности, то или M с составной частью N, или N с составной частью M имеют равную мощность; в первом случае мы называем мощность M меньшей, а во втором большей, чем мощность N.

Когда рассматриваемые многообразия конечны, т.е. состоят из конечного числа элементов, то, как легко видеть, понятие мощности соответствует понятию численности, а следовательно, понятию целого положительного числа, так как у двух таких многообразий мощности равны именно тогда и только тогда, когда численность их элементов одинакова. Составная часть конечного многообразия всегда имеет меньшую мощность, чем само это многообразие; это отношение перестает быть полностью справедливым для бесконечных, т.е. состоящих из бесконечного числа элементов, многообразий. Только из одного того обстоятельства, что некоторое бесконечное многообразие M является составной частью другого многообразия N или что оно может быть поставлено в однозначное и полное соответствие с некоторой его составной частью, ни в коем случае нельзя заключить, что его мощность меньше мощности N; это заключение справедливо лишь тогда, когда известно, что мощность M не равна мощности N. Равным образом то обстоятельство, что N является составной частью M или может быть поставлено в однозначное и полное соответствие с некоторой такой частью, нельзя рассматривать как достаточное для того, чтобы мощность M была больше мощности N.

Напомним один простой пример. Пусть M – последовательность целых положительных чисел ν, а N – последовательность четных целых положительных чисел 2ν. Здесь N является составной частью M и тем не менее M и N имеют одинаковую мощность.

Как можно легко показать, последовательность целых положительных чисел дает наименьшую из всех мощностей, соответствующих бесконечным многообразиям. Тем не менее класс многообразий, имеющих эту наименьшую мощность, является чрезвычайно богатым и обширным. К этому классу принадлежат, например, все те многообразия, которые г-н Р. Дедекинд в своих прекрасных и ценных исследованиях по алгебраическим числам называет «конечными полями» (см.: Dirichlets Vorlesungen über Zahlentheorie. 2. Aufl. Braunschweig, 1871, S. 425 f.)[46], далее здесь можно привести те рассмотренные впервые мною многообразия, которые я назвал «точечными множествами ν-го вида» (см.: Math. Ann., Bd. 5, S. 129) [здесь I.1][47] К нему же, очевидно, принадлежит всякое многообразие, выступающее в виде простой бесконечной последовательности с общим членом a_ν; но и двойные и вообще n-кратные последовательности с общим членом $a_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n}$ (где $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ независимо друг от друга пробегают все целые положительные числа) содержатся в этом классе. В одном предшествующем случае даже было доказано, что совокупность (ω) всех действительных (и можно было бы добавить: всех комплексных) алгебраических чисел можно мыслить в форме последовательности с общим членом ω_ν, что означает не что иное, как то, что и многообразие (ω), и любая его бесконечная составная часть имеют мощность всего числового ряда.

Для многообразий этого класса справедливы следующие легко доказуемые теоремы:

---

[46] **Ф.А. Медведев:** Кантор ссылается на X дополнение ко второму изданию «Лекций по теории чисел» выдающегося немецкого математика Дирихле [Dirichlet P.G. Lejeune. *Vorlesungen über Zahlentheorie* / Hrsg. von R. Dedekind. 2. Aufl. Braunschweig: Vieweg, 1871], написанное Дедекиндом [Dedekind R. *Über die Composition der binären quadratischen Formen*: Supplement X zu «Vorlesungen über Zahlentheorie» von P. G. Lejeune Dirichlet. 2. Aufl. Braunschweig: Vieweg, 1871, S. 423–497]. Начиная с издания 1879 г. названных лекций, Дедекинд выделил часть этого дополнения (которую имел в виду Кантор), существенно расширив ее, в самостоятельное XI дополнение. В русском переводе [Дирихле П.Г.Л. *Лекции по теории чисел* / В обр. и с добавл. Р. Дедекинда. М.; Л.: ОНТИ, 1936] последнее отсутствует.

[47] Здесь и далее имеется в виду – в настоящем издании раздел I, статья 1. – *Примеч. пер.*

«Если *M* является многообразием мощности последовательности целых положительных чисел, то и каждая бесконечная составная часть *M* имеет такую же мощность, что и *M*».

«Если *M'*, *M''*, *M'''*, ... – конечная или просто бесконечная последовательность многообразий, каждое из которых имеет мощность последовательности целых положительных чисел, то и многообразие *M*, полученное из объединения *M'*, *M''*, *M'''*, ..., имеет ту же самую мощность».

В последующем мы изучим так называемые непрерывные *n*-кратные многообразия в отношении их мощности.

В исследованиях, которые провели Риман[48] и Гельмгольц[49], а за ними и другие[50], о гипотезах, лежащих в основаниях геометрии, их авторы исходили, как известно, из понятия *n*-кратно протяженного непрерывного многообразия и существенный признак его видели в том обстоятельстве, что его элементы так зависят от *n* не зависящих друг от друга действительных непрерывных переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, что каждому элементу этого многообразия соответствует допустимая система значений $x_1, x_2, ..., x_n$, и, наоборот, каждой допустимой системе значений $x_1, x_2, ..., x_n$, соответствует определенный элемент многообразия. Кроме того, как это вытекает из контекста указанных исследований, обычно принималось то <u>предположение</u>, что взятое за основу соответствие между элементами многообразия и системами значений $x_1, x_2, ..., x_n$, является <u>непрерывным</u>, так что каждому бесконечно малому изменению системы значений $x_1, x_2, ..., x_n$, соответствует бесконечно малое изменение отвечающего ей элемента и, наоборот, каждому бесконечно малому изменению элемента соответствует такое же изменение значений его координат. Можно ли считать это предположение достаточным или же его нужно дополнить более специальными условиями с тем, чтобы обеспечить непротиворечивость понятия *n*-кратного непрерывного многообразия, его надежность,[51] – это пока можно оставить в стороне. Здесь будет лишь показано, что если мы отбросим его, т.е. не будем накладывать никакого ограничения на соответствие между многообразием и его координатами, го признак, считавшийся названными авторами существенным (т.е. что *n*-кратно протяженное многообразие – это такое многообразие, элементы которого можно определить по *n* не зависящим друг от друга действительным непрерывным координатам), оказывается совершенно непригодным.

Как будет показано в нашем исследовании, элементы *n*-кратно протяженного непрерывного многообразия можно будет однозначно и полно определить даже при помощи одной-единственной действительной непрерывной координаты *t*. Отсюда тогда вытекает, что если о характере соответствия не делать никаких предположений, то число независимых непрерывных действительных координат, требующихся для однозначного и полного определения элементов *n*-кратно протяженного непрерывного многообразия, можно брать произвольным, а значит, оно не

---

[48] См.: *Riemanns gesammelte mathematische Werke*. Leipzig, 1876, S. 254 f. **Ф.А. Медведев:** Имеется в виду работа Римана [Риман Б. *О гипотезах, лежащих в основании геометрии*. – Соч. / Пер. под ред. с предисл. и обзор, ст. проф. В.Л. Гончарова. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1948, с. 279–293].

[49] См.: Helmholtz H. *Über die tatsächlichen Grundlagen der Geometrie*. – Verh. natur.-med. Vereins Heidelberg, 1868, Bd. 4, S. 197–202; *Über die Tatsachen, welche der Geometrie zugrunde liegen*. – Nachr. Wiss. Göttingen, Math.-phys. KL, 1868, N 9; *Populäre Vorträge*. Braunschweig, 1876, H. 3, S. 21 ff. **Ф.А. Медведев:** [Helmholtz H. *Über die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie*. – Verh. natur.-med. Vereins Heidelberg, 1868, Bd. 4, S. 197–202; Zusatz. – Ibid., 1869, Bd. 5, S. 31–32; Wiss. Abh. Leipzig, 1883, Bd. 2, S. 610–617], [Гельмгольц Г. *О фактах, лежащих в основаниях геометрии* / Пер. А.В. Васильева. – В кн.: *Об основаниях геометрии*: Сб. классических работ по геометрии и развитию ее идей / Ред. и вступ. ст. А.П. Нортона. VI. – Гостехтеориздат, 1956, с. 356–332], [Гельмгольц Г. *О происхождении и значении геометрических аксиом*. – В кн.: *Философские науки* / Под ред. проф. А.К. Тимирязева. Л.: Гос. изд-во, 1924, ч. 1. Физика, вып. 2, с. 79–107]. Исторический анализ двух последних работ Гельмгольца см. в [Torretti R. *Philosophy of geometry from Riemann to Poincare*. Dordrecht etc.: Reidel Publ. Co, 1978, c. 156–168].

[50] См.: Rosanes J. *Über die neuesten Untersuchungen in betreff unserer Anschauung vom Raume*. Breslau, 1871, S. 13; Liebmann O. *Zur Analysis der Wirklichkeit*. Strassburg, 1876, S, 58; Erdmann B. *Die Axiome der Geometrie*. Leipzig, 1877, S. 45. **Ф.А. Медведев:** [Rosanes J. *Über die neuesten Untersuchungen in betreff unserer Anschauung vom Raume: Ein Vortrag*. Breslau: Maruscke und Berend, 1871], [Liebmann O. *Zur Analysis der Wirklichkeit: Philosophische Untersuchungen*. Strassburg; Darmstadt: Grübner, 1876], [Erdmann B. *Die Axiome der Geometrie: Eine philosophische Untersuchung der Riemann–Helmholtz'schen Raumtheorie*. Leipzig, 1877]. Розанес – немецкий математик, профессор университета в Бреслау. Либман – немецкий философ, профессор университетов в Страссбурге и Йене. Эрдман – известный философ, профессор университетов в Киле, Бреслау, Галле, Бонне и Берлине.

[51] Ответ на этот вопрос, к которому я возвращусь в другой связи, мне кажется не представляющим никакой трудности. [Об этом см. работу I.4 и соответствующие примечания.]

может рассматриваться как неизменный признак заданного многообразия. Оказалось, что на поставленный мною вопрос о том, можно ли непрерывное многообразие *n* измерений однозначно и полно отобразить на непрерывное многообразие только одного измерения, так что каждому элементу одного из них соответствует один и только один элемент другого, приходится ответить утвердительно.

Итак, непрерывную поверхность можно однозначно и полно отобразить на непрерывную линию; то же справедливо для непрерывных тел и непрерывных образов любого числа измерений.

Поэтому, пользуясь введенным выше выражением, мы можем сказать, что мощность любого непрерывного *n*-кратно протяженного образа равна мощности однократно протяженного непрерывного многообразия, например ограниченного непрерывного отрезка прямой линии.

§0. Комментарий В.Э.

Итак, мы видели, как Кантор ввел понятие «однозначного и полного поэлементного сопоставления» (теперь называемого «взаимно однозначным соответствием» или короче «1–1 соответствием») и понятие «мощности» множества. Это произошло стремительно, как будто лишь напоминая что-то само собой разумеющееся или давно известное. Никакому подробному анализу не подвергались те ситуации, из которых эти понятия выделялись, не было никакого разбора обстоятельств, деталей, тонкостей...

А зря! Кантор избежал бы своих роковых ошибок, если бы сделал такой анализ.

Теперь мы сделаем то, что Кантор должен был сделать в 1870-е годы, прежде чем публиковать свои статьи, а другие математики должны были сделать, читая его сочинения, – но почему-то и они не сделали.

Возьмем сначала понятие «взаимно однозначного соответствия» и используем тот пример, который привел сам Кантор:

> Напомним один простой пример. Пусть *M* – последовательность целых положительных чисел ν, а *N* – последовательность четных целых положительных чисел 2ν. Здесь *N* является составной частью *M* и тем не менее *M* и *N* имеют одинаковую мощность.

В этом «простом примере» любой спокойный ум, не одержимый маниакальным состоянием, легко различит две ситуации:

Первая ситуация (в ВТ она называется «зависимым соответствием»). Возьмем в множество *M* любое конечное подмножество положительных целых чисел, например, первые *n* = 20 из них, и отберем из *M* четные числа в множество *N*. Их окажется десять – в два раза меньше, чем элементов в множестве *M*. Взаимно однозначное соответствие между множествами *M* и *N* в этом случае установить невозможно. Посмотрим, что произойдет при наращивании *n* до бесконечности. В конце концов множество *M* охватывает все натуральные числа, множество *N* все четные числа, но отношения между ними НЕ изменяются: по-прежнему 1–1 соответствие между ними установить невозможно.

При зависимом соответствии множество *N* рассматривается как зависящее от множества *M*: предполагается, что сперва существует *M*, а потом из него образуется *N*, и оно получается таким, каким может получиться по законам этого процесса создания. На понятии зависимого соответствия построен весь классический математический анализ с его правилом Лопиталя, и там существует огромное количество различающихся по «мощности» бесконечных множеств.

Вторая ситуация (в ВТ она называется «независимым соответствием»). Однако возможен и другой подход, когда множества *M* и *N* рассматриваются как НЕ зависящие одно от другого, оба заранее данные и бесконечные. В таком случае установление взаимно однозначного соответствия между ними возможно.

Легко видеть, что Кантор пользуется именно независимым соответствием и предполагает вторую ситуацию. Такой выбор, разумеется, возможен и допустим, но при этом Кантор и его последователи обязаны были понимать и отдавать себе отчет в том, что они осуществили именно такой выбор и что существует и вторая альтернатива. Выбрав однажды для сравнения «мощностей» именно независимое соответствие, они должны были тогда пользоваться именно этим понятием и в дальнейшем, когда сравнивают между собой множества по «мощности». Но вместо этого Кантор (и его последователи) весьма скоро перепрыгивают на зависимое соответствие и вообще прыгают с одного на другое туда и обратно как им заблагорассудится, и таким путем строится вся их «теория».

Вообще понятие независимого соответствия не имеет никакой практической ценности, поскольку ВСЕ бесконечные множества при независимом соответствии равномощны – между всеми ими можно установить взаимно однозначное соответствие. В мире существует только одна бесконечность – та бесконечность, которую создает бесконечно продолжающийся процесс. Процессы могут быть более быстрыми или более медленными по сравнению друг с другом, и от этого появляется различия зависимого соответствия в множествах. Если же на относительные скорости не обращать внимания и смотреть только на то, бесконечен процесс или не бесконечен, то все бесконечности – это уже независимое соответствие – становятся одинаковыми. Кантор полагает, что это не так, что он открыл бесконечности другого рода, но это «открытие» основано только на путанице в мыслях и в понятиях.

На самом деле у Кантора уверенность в существовании «превосходящих» бесконечностей предшествовала всякому исследованию и всяким доказательствам (и эта уверенность имела маниакальную природу, кроющуюся в его психике). Он и занялся-то этим «взаимно однозначным соответствием», которое никого другого в мире тогда не интересовало, с одной лишь целью: обнаружить эту «превосходящую бесконечность». И «кто ищет, тот всегда найдет»: он увидел ее в континууме по сравнению со «счетным множеством», и когда увидел, то его уже не интересовал никакой тщательный разбор подлинной ситуации, ее всесторонний анализ; он помчался вперед, создавая бесконечный ряд всё более и более превосходящих бесконечностей. Главным средством в построении этого бесконечного ряда всё больших бесконечностей был отказ от первоначально принятого независимого соответствия и применение в дальнейшем зависимого соответствия (но это средство сочеталось у него и с другими столь же алогичными приемами).

Разобравшись с зависимым и независимым соответствием, разберемся теперь подробнее и с еще одним аспектом этого дела. Как мы в понятии соответствия отделили зависимое от независимого соответствия, так отделим еще возможность пронумеровать элементы от возможности сопоставить элементы.

Пронумеровать элементы множества можно в том случае, если эти элементы создаются (или, будучи уже созданными, перебираются) линейным образом: один за другим.

Сопоставить же элементы можно и без их нумерации. Так, например, давайте сопоставим натуральные числа и действительные числа в пределах между 0 и 1 (пока не вдаваясь в тонкости сущности чисел, а считая таковыми их двоичные записи – двоичные, а не десятичные лишь потому, что при десятичном представлении уже вторая таблица перекрыла бы у нас почти две страницы, а третья – около 18 страниц; двоичное представление избрано лишь для экономии места и ничего не меняет по сравнению с десятичным).

Начнем сопоставление с двух элементов – натуральным числам 0 и 1 сопоставим рациональные дроби 0,0 и 0,1:

0	0,0
1	0,1

Потом четырем натуральным числам сопоставим четыре рациональные дроби:

00	0,00
01	0,01
10	0,10
11	0,11

Потом восьми натуральным числам восемь рациональных дробей:

000	0,000
001	0,001
010	0,010
011	0,011
100	0,100
101	0,101
110	0,110
111	0,111

и т.д.

Понятно, что этот процесс сопоставления может продолжаться бесконечно, и никогда не наступит такой момент, когда дальнейший процесс сопоставления станет невозможным. Понятно, что «вниз» оба столбика будут расти до бесконечности, перебирая все возможные комбинации цифр. Понятно также, что правый столбик будет расти вправо (цифры за запятой) тоже до бесконечности, и никогда не наступит такой момент, когда мы не можем уже присоединить ни одной новой цифры.

Так как правый столбик перебирает все возможные цифры за запятой и одновременно растет вправо до бесконечности, то в нем содержатся:

а) при потенциальной бесконечности – все рациональные приближения к иррациональным числам данной области;

б) а при актуальной бесконечности – все собственно иррациональные числа данной области.

Это сопоставление не дает нумерации действительных чисел данной области натуральными числами: мы можем сказать, что первым действительным числом будет 0,000..., но мы не можем сказать, какое будет второе действительное число.

Однако это сопоставление – и без всякой нумерации! – показывает, что КОЛИЧЕСТВО элементов во множестве натуральных чисел и в континууме области между 0 и 1 – что это количество элементов **одинаково**.

Разумеется, что здесь мы установили независимое соответствие между «счетным множеством» и «континуумом». Как я уже говорил, независимое соответствие между бесконечными множествами (для определения количества их элементов) можно установить всегда, поэтому само по себе это сопоставление особой ценности не имеет; оно имеет ценность только как опровержение канторовских мифов и для демонстрации их логических ошибок.

Ошибка кантористов в данном случае состоит в неспособности отличить нумерацию от сопоставления (с целью определения «мощности» множества). Кантористы считают, что раз нельзя перенумеровать, то это из-за того, что количество элементов больше. Но на самом деле количество элементов одинаково (в той мере, в какой вообще можно говорить о количестве элементов бесконечных множеств), а перенумеровать элементы нельзя по совсем другой причине: потому что количество знаков в каждой строчке правого столбика бесконечно, и эти строчки НЕ МОГУТ быть сгенерированы по линейному алгоритму – одна строчка за другой. Их приходится генерировать по нелинейному алгоритму – такому, который идет одновременно к двум бесконечностям: к бесконечности количества элементов «вниз» и к бесконечности самого элемента «вправо».

При дальнейшем анализе текстов самого Кантора (а также его последователей) всегда нужно иметь перед глазами эту картину и всегда четко отличать:

– зависимое соответствие от независимого; и

– нумерацию элементов от сопоставления их для определения их количества.

Теперь мы можем вернуться к тексту Кантора:

§1

Так как два непрерывных образа одинакового числа измерений можно однозначно и полностью отобразить друг на друга при помощи аналитических функций, то для поставленной нами цели (а именно: доказать возможность однозначного и полного отображения образов различного числа измерений) всё сводится, как легко видеть, к доказательству следующей теоремы:[52]

(А). «Если $x_1, x_2, ..., x_n$ – n независимых друг от друга действительных переменных величин, каждая из которых может принимать все значения, которые ≥ 0 и ≤ 1, а t – некоторая другая переменная с той же областью изменения ($0 \leq t \leq 1$), то величину t можно так поставить в соответствие системе n величин $x_1, x_2, ..., x_n$, что всякому определенному значению t будет соответствовать определенная система значений $x_1, x_2, ..., x_n$ и, наоборот, каждой определенной системе значений $x_1, x_2, ..., x_n$ будет соответствовать определенное значение t».

Тогда в качестве следствия этой теоремы получается другая теорема, которую мы и имели в виду:

---

[52] **В.Э. 2013-02-13:** Я не буду подробно комментировать эти теоремы Кантора, так как они не представляют для нас практически никакого интереса: и без них ясно, что, пользуясь понятием независимого соответствия, можно это соответствие установить между любыми бесконечными множествами. Следующим объектом нашего пристального внимания станет то место, где Кантор начнет утверждать, что это якобы невозможно.

(B). «Непрерывное n-мерное многообразие можно однозначно и полно отобразить на непрерывное многообразие одного измерения; два непрерывных многообразия, одно из которых n, а другое m измерений, где $n \lesseqgtr m$, имеют одинаковую мощность; элементы непрерывного n-мерного многообразия можно однозначно определить при помощи одной-единственной непрерывной действительной координаты t, но их можно также определить однозначно и полностью при помощи системы m непрерывных координат $t_1, t_2, \ldots, t_n$».

§2

К доказательству теоремы (A) мы приходим из известной теоремы, что всякое иррациональное число $e \gtreqqless 0$ можно вполне определенным образом представить в форме бесконечной цепной дроби

$$e = \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{\ddots}{+\cfrac{1}{\alpha_\nu + \ldots}}}} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots),$$

где α_ν, – целые положительные рациональные числа.

Каждому иррациональному числу $e \gtreqqless 0$ соответствует определенная бесконечная последовательность положительных целых чисел и, наоборот, всякая такая последовательность определяет некоторое иррациональное число $e \gtreqqless 0$.

Если теперь $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – n независимых друг от друга переменных величин, каждая из которых может принимать все иррациональные числовые значения интервала (0 ... 1), причем каждое из них берется только один раз, то полагаем

$$\begin{aligned} e_1 &= (\alpha_{1,1}, \ \alpha_{1,2}, \ldots, \alpha_{1,\nu}, \ldots), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_\mu &= (\alpha_{\mu,1}, \ \alpha_{\mu,2}, \ldots, \alpha_{\mu,\nu}, \ldots), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n &= (\alpha_{n,1}, \ \alpha_{n,2}, \ldots, \alpha_{n,\nu}, \ldots), \end{aligned}$$

Эти n иррациональных чисел однозначно определяют n+1-е иррациональное число $0 < d < 1$, а именно

$$d = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu, \ldots),$$

если между числами α и β ввести следующее соотношение:

$$\beta_{(\nu+1)n+\mu} = \alpha_{\mu,\nu} \begin{cases} \mu = 1, 2, \ldots, n, \\ \nu = 1, 2, \ldots \text{ до бесконечности.} \end{cases} \qquad (1)$$

Но и, обратно, если мы исходим из иррационального числа $0 < d < 1$, то оно определяет последовательность чисел β_ν, а через (1) и последовательность чисел $\alpha_{\mu,\nu}$, т.е. d однозначно определяет систему n иррациональных чисел $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Из этого соображения сразу же получается следующая теорема:

(C). «Если $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – независимые друг от друга переменные величины, каждая из которых может принимать все иррациональные значения из интервала (0 ... 1), и d – другая переменная величина, принимающая те же самые значения, то величину d и систему n величин $e_1, e_2, \ldots, e_n$ можно сопоставить друг с другом однозначно и полностью».

§3

После того как в предыдущем параграфе доказана теорема (C), нам нужно теперь доказать такую теорему:

(D). «Переменную величину e, которая может принимать все иррациональные значения, можно однозначно отобразить на переменную x, принимающую все действительные, т.е. рациональные и иррациональные, значения, которые ≥ 0 и ≤ 1, так что всякому иррациональному значению $0 < e < 1$ соответствует одно и только одно действительное значение $x \lesseqgtr 0$ и, обратно, каждому действительному значению x соответствует некоторое иррациональное значение e».

Действительно, как только теорема (D) доказана, так в соответствии с нею представляем себе $n + 1$ переменных величин, обозначенных в §2 через еи $e_1, e_2, ..., e_n$ и d, сопоставленными однозначно и полно с другими переменными $x_1, x_2, ..., x_n$ и t, где каждая из последних переменных принимает без ограничения всякое действительное значение, которое ≥ 0 и ≤ 1. Так как между переменной d и системой n переменных $e_1, e_2, ..., e_n$ из §2 однозначное и полное соответствие уже установлено, то тем самым получаем однозначное и полное соответствие между непрерывной переменной t и системой n непрерывных переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, а тем справедливость теоремы (A) оказывается установленной.

Поэтому в последующем нам нужно заняться лишь доказательством теоремы (D). С этой целью для краткости можно воспользоваться простой символикой, которую мы теперь опишем.

Под линейным многообразием действительных чисел будем понимать всякое вполне определенное многообразие отличных друг от друга, т.е. не равных, действительных чисел, так что одно и то же число входит в линейное многообразие в качестве элемента не более одного раза.

Все действительные переменные, которые будут рассматриваться в настоящем исследовании, таковы, что областью изменения каждой из них, т.е. многообразием значений, которые они могут принимать, является заданное линейное многообразие; поэтому далее эту молчаливо принимаемую предпосылку мы не будем выделять особо. О двух таких переменных a и b мы будем говорить, что они не имеют никакой связи, если никакое из значений a не может быть равным какому-либо значению b; т.е. когда придется говорить, что a и b не связаны, то это означает, что два многообразия значений, которые могут принимать переменные a и b, не имеют общих элементов.[53]

Если имеется конечная или бесконечная последовательность $a', a'', a''', ..., a^{(\nu)}, ...$ вполне определенных переменных или констант, которые попарно не имеют никакой связи, то можно определить переменную a тем, что область ее изменения получается из объединения областей изменения у $a', a'', a''', ..., a^{(\nu)}, ...$; обратно, заданную переменную a можно разными способами разложить на другие переменные $a', a'', ...$, которые попарно не имеют никакой связи. В обоих случаях отношение переменной a к переменным $a', a'', a''', ..., a^{(\nu)}, ...$ мы выражаем следующей формулой:

$$a \equiv \{a', a'', ..., a^{(\nu)}, ...\}.$$

Поэтому для справедливости этой формулы нужно: 1) чтобы всякое значение, которое может принимать какая-либо из переменных $a^{(\nu)}$, было вместе с тем значением переменной a; 2) чтобы всякое значение, которое может принимать a, принималось одной и только одной из величин $a^{(\nu)}$. Для пояснения этой формулы пусть, например, φ – переменная, которая может принимать все рациональные числовые значения ≥ 0 и ≤ 1, e – переменная, могущая принимать все иррациональные числовые значения из интервала (0 ... 1), и, наконец, x – переменная, могущая принимать все действительные, рациональные и иррациональные числовые значения, которые ≥ 0 и ≤ 1; тогда

$$x = \{ \varphi, e \}.$$

Если a и b – две такие переменные величины, что их можно однозначно и полно отобразить друг на друга, другими словами, если области их значений имеют одинаковую мощность, то мы будем называть a и b эквивалентными друг другу и выражать это одной из двух формул

$$a \sim b \text{ или } b \sim a.$$

В соответствии с этим определением эквивалентности двух переменных величин легко получаем, что $a \sim a$ и, далее, что если $a \sim b$ и $b \sim c$, то всегда $a \sim c$.

В различных местах данного исследования будет применяться нижеследующая теорема, доказательство которой из-за его простоты можно опустить:

(E). «Если $a', a'', ..., a^{(\nu)}, ...$ – конечная или бесконечная последовательность переменных или констант, которые попарно не имеют никакой связи, и $b', b'', ..., b^{(\nu)}, ...$ – другая последовательность, обладающая тем же свойством, причем каждой переменной $a^{(\nu)}$ первой

---

[53] Два многообразия M я N или не имеют никакой связи, а именно когда они не имеют никакого общего элемента, принадлежащего им, или же они связаны при помощи определенного третьего многообразия P, а именно при помощи многообразия их общих элементов [«пересечения» M и N].

последовательности соответствует определенная переменная $b^{(\nu)}$ другой и эти соответствующие переменные всегда эквивалентны друг другу, т.е. $a^{(\nu)} \sim b^{(\nu)}$, то всегда

$$a \sim b,$$

где

$$a \equiv \{a', a'', ..., a^{(\nu)}, ...\}$$

и

$$b \equiv \{b', b'', ..., b^{(\nu)}, ...\}.$$

§4

Наше исследование доведено теперь до того пункта, что нам осталось лишь доказать теорему (D) из §3. Для достижения этой цели мы исходим из того, что все рациональные числа, которые ≥ 0 и ≤ 1, можно записать в форме простой бесконечной последовательности

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_\nu, ...$$

с общим членом φ_ν. Наиболее просто это можно сделать так. Если p/q неприводимая форма некоторого рационального числа, которое ≥ 0 и ≤ 1, где, следовательно, p и q – целые неотрицательные числа с наибольшим общим делителем, равным 1, то полагаем $p + q = N$. Тогда всякому числу p/q соответствует определенное целочисленное положительное значение N и, наоборот, такому значению N всегда соответствует лишь конечное число чисел p/q. Если теперь числа p/q представить в форме такой последовательности, что числа, отвечающие меньшим значениям N, предшествуют тем, которые отвечают большим значениям N, а числа с одним и тем же значением N расположены по их величине – бóльшие после меньших, то всякое число p/q будет расположено во вполне определенном месте простой бесконечной последовательности, общий член которой можно обозначить через φ_ν. Но эту же теорему можно получить из доказанной мною в свое время[54] теоремы, по которой совокупность (ω) всех действительных алгебраических чисел можно представить в форме бесконечной последовательности

$$\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\nu, ...$$

с общим членом ω_ν. Действительно, это свойство совокупности (ω) переносится на совокупность всех рациональных чисел, которые ≥ 0 и ≤ 1, так как это многообразие является частью предыдущего.

Пусть теперь e – переменная, входящая в теорему (D), принимающая все действительные числовые значения из интервала (0 ... 1), за исключением чисел φ_ν. Берем, далее, в интервале (0 ... 1) какую-либо бесконечную последовательность иррациональных чисел ε_ν, удовлетворяющих лишь тому условию, что $\varepsilon_\nu < \varepsilon_{\nu+1}$ и $\lim \varepsilon_\nu = 1$, например $\varepsilon_\nu = 1 - \sqrt{2} / 2^\nu$.

Обозначим через f переменную, которая может принимать все действительные значения из интервала (0 ... 1), за исключением значений ε_ν, а через g – другую переменную, которая принимает все действительные значения из интервала (0 ... 1), за исключением ε_ν и φ_ν.

Мы утверждаем, что

$$e \sim f.$$

Действительно, в обозначениях §3

$$e \equiv \{g, \varepsilon_\nu\}, \qquad f \equiv \{g, \varphi_\nu\},$$

а так как $g \sim g$, $\varepsilon_\nu \sim \varphi_\nu$, то по теореме (E) заключаем, что

$$e \sim f.$$

Поэтому подлежащая доказательству теорема (D) сводится к такой теореме:

(F). «Переменная f, которая может принимать все значения из интервала (0 ... 1), за исключением значений заданной последовательности ε_ν, удовлетворяющей тем условиям, что $\varepsilon_\nu < \varepsilon_{\nu+1}$ и $\lim \varepsilon_\nu = 1$ при $\nu = \infty$, может быть однозначно и полностью сопоставлена переменной x, принимающей все значения ≥ 0 и ≤ 1; другими словами, $f \sim x$».

§5

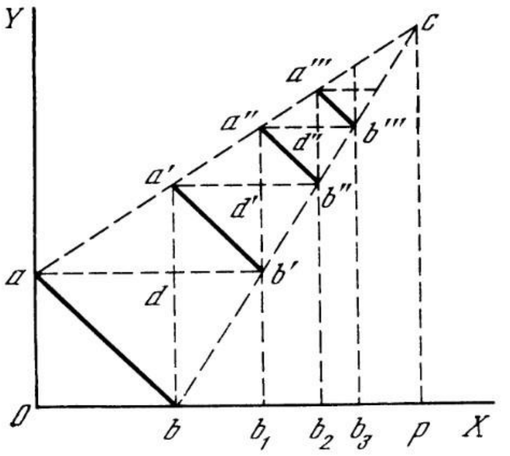
Доказательство теоремы (F) мы основываем на следующих теоремах.

(G). «Если y – переменная, принимающая все значения из интервала (0 ... 1), за исключением 0, а x – переменная, принимающая все без исключения значения из интервала (0 ... 1), то

---

[54] *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen*. – J. reine und angew. Math., Bd. 77, S. 258 f. [здесь I.2]. **В.Э.:** А в Веданопедии: http://ve-poti.narod.ru/B051.PDF.

$y \sim x$».



Доказательство этой теоремы (G) наиболее просто [?][55] получается из рассмотрения приведенной кривой, абсциссы которой начиная с 0 обозначены через x, а ординаты – через y. Эта кривая состоит из бесконечного числа параллельных друг другу, становящихся бесконечно малыми при бесконечном возрастании ν отрезков

$$ab,\ a'b',\ \ldots,\ a^{(\nu)}b^{(\nu)},\ \ldots$$

и изолированной точки c, к которой эти отрезки приближаются асимптотически. При этом концевые точки a, a', ..., $a^{(\nu)}$, ... считаются принадлежащими кривой, а концевые точки b, b', ..., напротив, рассматриваются как исключенные из нее.

Входящие в эту фигуру длины таковы:

$$0p = pc = 1,$$
$$0b = bp = 0a = ½,$$
$$a^{(\nu)}d^{(\nu)} = d^{(\nu)}b^{(\nu)} = b_{\nu-1}\,b_\nu = 1/2^{\nu+1}.$$

Легко убедиться, что когда абсцисса x принимает все значения от 0 до 1, ордината y получает все эти же значения, <u>за исключением</u> единственного значения 0.

После того как таким путем доказана теорема (G), мы при помощи формул преобразования сразу же получаем такое обобщение теоремы (G):

(H). «Переменная z, могущая принимать все значения из интервала (α ... β), $\alpha \gtreqless \beta$, за исключением концевого значения α, эквивалентна переменной u, принимающей все без исключения значения из того же самого интервала».

Отсюда мы приходим к следующей теореме:

(J). «Если w – переменная, принимающая все значения из интервала (α ... β), за исключением обоих концов α и β, а u – та же самая переменная, что и в теореме (H), то

$$w \sim u\ ».$$

Действительно, пусть γ – какое-либо значение между α и β. Введем четыре новых переменных w', w'', u' и z.

Пусть z – та же самая переменная, что и в (H); w' принимает все значения из интервала (α ... β), за исключением обоих концов α и β; w'' принимает все значения из интервала (γ ... β), за исключением концевого значения β; пусть, наконец, u'' – переменная, принимающая все значения из интервала (γ ... β), включая концевые значения.

Тогда

$$w \equiv \{\, w', w''\},\quad z \equiv \{\, w', u''\}.$$

Но по теореме (H) имеем

$$w'' \sim u''\ ;$$

отсюда заключаем, что

$$w \sim z.$$

Но по теореме (H) имеем и

$$z \sim u;$$

следовательно, получаем $w \sim u$, что и доказывает теорему (J).

Теперь теорему (F) можно доказать так.

Сохраняя за переменными f их значения, указанные в теореме (F), введем вспомогательные переменные

$$f',\ f'',\ \ldots,\ f^{(\nu)},\ \ldots$$

и

$$x'',\ x^{\mathrm{IV}},\ \ldots,\ x^{(2\nu)},\ \ldots,$$

где f' – переменная, принимающая все значения из интервала (0 ... ε_1), за исключением концевого значения ε_1; $f^{(\nu)}$ при $\nu > 1$ – переменная, принимающая все значения из интервала ($\varepsilon_{\nu-1}$ ... ε_ν), за исключением обоих концов $\varepsilon_{\nu-1}$ и ε_ν; $x^{(2\nu)}$ – переменная, принимающая все без исключения значения из интервала ($\varepsilon_{\nu-1}$ ... ε_ν).

[55] **В.Э.:** Вопросительный знак вставлен Медведевым.

Если мы присоединим к переменным $f', f'', \ldots, f^{(\nu)}, \ldots$ еще постоянное число 1, то получим, что все эти величины, взятые вместе, имеют ту же область изменения, что и f, т.е.

$$f \equiv \{ f', f'', \ldots, f^{(\nu)}, \ldots, 1\}$$

Точно так же убеждаемся, что

$$x \equiv \{ f', x'', f''', x^{\mathrm{IV}}, \ldots, f^{(2\nu-1)}, x^{(2\nu)}, \ldots, 1\}.$$

Но по теореме (J)

$$f^{(2\nu)} \sim x^{(2\nu)};$$

далее,

$$f^{(2\nu-1)} \sim f^{(2\nu-1)};\ 1 \sim 1.$$

Поэтому по теореме (E) из §3

$$f \sim x,$$

что и требовалось доказать.

§6

Теперь я хочу дать более краткое доказательство теоремы (D); одним только им я не ограничился потому, что вспомогательные теоремы (F), (G), (H), (J), использованные при усложненном доказательстве, интересны сами по себе.

Как и ранее, под x мы понимаем переменную, принимающую все действительные значения из интервала (0 ... 1), включая концевые значения, под e – переменную, получающую лишь иррациональные значения из интервала (0 ... 1); требуется доказать, что $x \sim e$.

Рациональные числа ≥ 0 и ≤ 1 мы мыслим, как и в §4, в форме последовательности с общим числом φ_ν, где ν пробегает последовательность чисел 1, 2, 3, ... Далее, берем произвольную бесконечную последовательность отличных друг от друга иррациональных чисел интервала (0 ... 1); пусть общим членом этой последовательности будет η_ν (например, $\eta_\nu = \sqrt{2} / 2^\nu$).

Под h понимается переменная, принимающая все значения из интервала (0 ... 1), за исключением φ_ν и η_ν.

Тогда в соответствии с введенной в §3 символикой

$$x \equiv \{h, \eta_\nu, \varphi_\nu\} \qquad (1)$$

и

$$e \equiv \{h, \eta_\nu\}$$

Последнюю формулу мы можем записать и так:

$$e \equiv \{h, \eta_{2\nu-1}, \eta_{2\nu}\}. \qquad (2)$$

Если теперь заметим, что

$$h \sim h,\ \eta_\nu \sim \eta_{2\nu-1},\ \varphi_\nu \sim \eta_{2\nu},$$

и применим к формулам (1) и (2) теорему (E) из §3, то получим

$$x \sim e,$$

что и требовалось доказать.

§7

Теперь возникает соображение применить для доказательства теоремы (A) вместо использованных нами цепных дробей форму представления чисел в виде десятичных дробей. Хотя могло бы показаться, что этот путь привел бы к цели быстрее, тем не менее на нем возникает некоторая трудность, на которую я хочу обратить здесь внимание; она явилась причиной того, что я в этом исследовании отказался от применения десятичных дробей.

Если, например, имеются две переменные x_1 и x_2 и мы положим

$$x_1 = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \ldots + \frac{\alpha_\nu}{10^\nu} + \ldots,$$

$$x_2 = \frac{\beta_1}{10} + \frac{\beta_2}{10^2} + \ldots + \frac{\beta_\nu}{10^\nu} + \ldots$$

с условием, что числа α_ν, β_ν являются целыми числами ≥ 0 и ≤ 9 и не принимают, начиная с некоторого ν, всё время значение 0 (за исключением того случая, когда x_1 или x_2 сами равны нулю), то эти представления переменных x_1 и x_2 будут однозначными всегда, т.е. x_1 и x_2 определяют бесконечные последовательности чисел α_ν и β_ν и наоборот. Если теперь из x_1 и x_2 мы образуем число

$$t = \frac{\gamma_1}{10} + \frac{\gamma_2}{10^2} + \ldots + \frac{\gamma_\nu}{10^\nu} + \ldots,$$

положив

$$\gamma_{2\nu-1} = \alpha_\nu, \qquad \gamma_{2\nu} = \beta_\nu, \qquad \nu = 1, 2, \ldots,$$

то получим тем самым однозначное [взаимно однозначное] соответствие между системой x_1, x_2 и переменной t, ибо к заданному значению t приводит лишь единственная система значений x_1, x_2. Однако переменная t принимает – и это является подчеркиваемым здесь обстоятельством – не все значения из интервала (0 ... 1); она ограничена в своей изменчивости, тогда как на x_1 и x_2 в этом интервале никаких ограничений не накладывается.

Все значения суммы ряда

$$\frac{\gamma_1}{10} + \frac{\gamma_2}{10^2} + \ldots + \frac{\gamma_\nu}{10^\nu} + \ldots,$$

у которых, начиная с некоторого $\nu > 1$, все $\gamma_{2\nu-1}$ или все $\gamma_{2\nu}$ имеют значение нуль, должны рассматриваться как исключенные из области переменной t, ибо они сводились бы к исключенным, а именно к конечным, десятичным представлениям.

§8

После того как в предшествующих параграфах задуманное исследование доведено до конца, в заключение можно сделать несколько общих замечаний. Теорема (A), а тем самым и теорема (B) могут быть обобщены до предложения, в соответствии с которым и непрерывные многообразия бесконечно большого числа измерений имеют ту же мощность, что и непрерывное многообразие одного измерения; однако это обобщение существенно связано с одним допущением, а именно что бесконечное число измерений само образует многообразие, имеющее мощность последовательности целых положительных чисел.

Здесь вместо (A) выступает такая теорема:

(A′). «Если $x_1, x_2, \ldots, x_\mu, \ldots$ – просто бесконечная последовательность независимых друг от друга переменных действительных величин, каждая из которых может принимать все значения, которые ≥ 0 и ≤ 1, а t – другая переменная с тою же областью изменения ($0 \leq t \leq 1$), то величину t можно однозначно и полностью поставить в соответствие системе бесконечно многих величин x_1, $x_2, \ldots, x_\mu, \ldots$».

При помощи теоремы (D) из §3 эта теорема сводится к следующей:

(C′). «Если $e_1, e_2, \ldots, e_\mu, \ldots$ – бесконечная последовательность независимых друг от друга переменных величин, каждая из которых может принимать все иррациональные числовые значения из интервала (0 ... 1), а d – другая иррациональная переменная с тою же областью изменения, то величину d можно однозначно и полностью поставить в соответствие системе бесконечно многих величин $e_1, e_2, \ldots, e_\mu, \ldots$»

Наиболее простое доказательство теоремы (C′) получается, если, применяя разложения в цепные дроби, положить, как в §2,

$$e_\mu = (\alpha_{\mu,1}, \alpha_{\mu,2}, \ldots, \alpha_{\mu,\nu}, \ldots), \qquad \mu = 1, 2, \ldots,$$

$$d = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\lambda, \ldots),$$

а между целыми положительными числами α и β установить связь

$$\alpha_{\mu,\nu} = \beta_\lambda,$$

где

$$\lambda = \mu + (\mu + \nu - 1)(\mu + \nu - 2) / 2.$$

Действительно, как легко показать, функция $\mu + \frac{1}{2}(\mu + \nu - 1)(\mu + \nu - 2)$ обладает тем замечательным свойством, что она представляет все целые положительные числа и причем каждое из них только один раз, когда у нее μ и ν независимо друг от друга пробегают всякое положительное целочисленное значение.[56]

---

[56] **Э. Цермело:** А именно: для всякого фиксированного значения суммы индексов $\sigma = \mu + \nu$ значениям

$$\mu = 1, 2, \ldots, \sigma - 1$$

и

$$\nu = \sigma - 1, \sigma - 2, \ldots, 1$$

соответствуют последовательные значения

Одновременно теоремой (A′), по-видимому, достигается тот предел, до которого возможно обобщение теоремы (A) и ее следствий.

Поскольку на этом пути для чрезвычайно богатой и обширной области многообразий получается то свойство, что эти многообразия можно однозначно и полно отобразить на ограниченную непрерывную прямую или часть ее (под частью линии понимается всякое многообразие точек, содержащихся в ней), то возникает вопрос о том, как ведут себя в отношении мощности различные части непрерывной прямой линии, т.е. различные мыслимые в ней бесконечные многообразия точек. Если мы освободим эту проблему от ее геометрического одеяния и, как это уже сделано в §3, будем понимать под линейным многообразием действительных чисел всякую мыслимую совокупность бесконечно многих отличных друг от друга чисел, то спрашивается: на сколько и на какие классы распадаются линейные многообразия, если отнести в один и тот же класс многообразия одинаковой мощности, а многообразия различной мощности – в различные классы? При помощи некоторого метода индукции, в изложение которого мы не будем входить здесь подробнее, получается теорема, что число классов линейных многообразий, получаемых в соответствии с этим принципом разбиения, является конечным и даже равным двум[57].[58]

Сообразно с этим линейные многообразия состояли бы из двух классов,[59] из которых первый включает в себя все многообразия, которые можно привести к виду *functio ips*. ν (где ν пробегает все целые положительные числа), тогда как второй охватывает все те многообразия, которые сводятся к виду *functio ips*. x (где x может принимать все действительные значения ≥ 0 и ≤ 1).[60] Поэтому соответственно этим двум классам у бесконечных линейных многообразий получились бы лишь две мощности.

Точное исследование этого вопроса мы откладываем до другого раза.

Примечание Эрнста Цермело

В этой второй работе по теории множеств,[61] вершиной которой является общее понятие «мощности», ставится и решается задача сравнения друг с другом «непрерывных многообразий» любого числа «измерений» в отношении их мощности. Здесь Кантору удалось получить тот (тогда еще парадоксальный) результат, что все такие многообразия любого конечного и даже (счетно) бесконечного числа измерений имеют одинаковую мощность, а именно что они все эквивалентны множеству всех действительных чисел (замкнутого) единичного отрезка, и отсюда

$$\lambda = \frac{(\sigma-1)(\sigma-2)}{2}+1,\quad \frac{(\sigma-1)(\sigma-2)}{2}+2,\ \ldots,\ \frac{\sigma(\sigma-1)}{2},$$

причем всякое число между $(\sigma-1)(\sigma-2)/2$ и $\sigma(\sigma-1)/2$ принимается функцией λ в точности один раз. Следовательно, всякому фиксированному значению $\mu+\nu$ всегда соответствует определенный частичный отрезок, ограниченный двумя следующими друг за другом треугольными числами, а потому всем парам значений μ, ν с $\mu+\nu \leq \sigma$ соответствует целый отрезок $\lambda \leq \sigma(\sigma-1)/2$.

[57] **Э. Цермело:** Здесь Кантор впервые высказывает предположение, что линейному континууму соответствует «вторая мощность» – канторовская «гипотеза континуума».

[58] **В.Э. 2013-02-13:** Если мы последовательно придерживаемся независимого соответствия, то существует только один класс бесконечных множеств. Если мы придерживаемся зависимого соответствия, то классов бесконечно много – сколько различий в неопределенностях типа ∞/∞ можно раскрыть по правилу Лопиталя, столько и классов бесконечностей. Если признаком класса считать не возможность сопоставления элементов по их количеству, а возможность или невозможность линейно пронумеровать их, то классов ДВА – такие, в которых линейная нумерация возможна из-за конечности числа характеристик, и такие, в которых она невозможна из-за бесконечности характеристик элементов.

[59] Что эти два класса действительно различны, вытекает из теоремы, установленной в работе, которая указала в §2 [здесь 1.2], согласно которой если предложена закономерная бесконечная последовательность $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots$, то во всяком заданном интервале ($\alpha \ldots \beta$) всегда можно найти числа, не входящие в заданную последовательность.

[60] **Ф.А. Медведев:** *functio ips.* – словообразование, введенное Кантором для характеристики того, что рассматриваемое множество можно поставить во взаимно однозначное соответствие непосредственно с множеством натуральных чисел или с множеством всех действительных чисел отрезка [0,1]. Оно дословно означает «функция самого». Это словообразование не привилось.

[61] **Ф.А. Медведев:** Здесь она является третьей. (**В.Э.:** Медведев по сравнению с подборкой Цермело присоединил впереди еще работу Кантора о тригонометрических рядах, поэтому у него нумерация сдвинулась на одну единицу).

он заключил наряду с прочим, что понятие «размерности» должно опираться прежде всего на непрерывное (и даже взаимно непрерывное) отображение многообразий друг на друга.

Доказательство того, что точки квадрата, например, можно поставить во взаимно однозначное соответствие с точками отрезка, автор основывает здесь на разложении (однозначном) в цепные дроби действительных иррациональных чисел и образовании (механическом) из двух таких разложений

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ...) \text{ и } (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots)$$

третьего разложения

$$(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3, ...).$$

Но из этого пока получается только эквивалентность иррациональных точечных множеств, содержащихся в квадрате и соответственно в отрезке. Чтобы распространить этот результат и на (замкнутые) точечные множества (включая рациональные точки), Кантор пользуется здесь несколько усложненной системой вспомогательных теорем, в каждой из которых нужна счетность рациональных точек, содержащихся в отрезке.

Георг Кантор.
«Об одном элементарном вопросе учения о многообразиях»

В статье под названием «Об одном свойстве совокупности всех действительных алгебраических чисел» (J. reine und angew. Math., 1874, Bd. 77, S. 258) [здесь 1.2] содержится первое доказательство теоремы, что существуют бесконечные многообразия, которые нельзя взаимно однозначно отобразить на совокупность всех конечных целых чисел 1, 2, 3, ..., ν, ... или, как я обычно выражаюсь, которые не имеют мощности последовательности чисел 1, 2, 3, ... Из доказанного там в §2 непосредственно следует, что, например, совокупность всех действительных чисел произвольного интервала (α ... β) нельзя представить в форме последовательности

$$\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\nu, \ldots$$ [62]

Можно, однако, получить значительно более простое доказательство этой теоремы, не зависящее от рассмотрения иррациональных чисел.

Действительно, если m и w – два каких-либо исключающих друг друга признака (*Charaktere*), то рассматриваем совокупность M элементов

$$E = (x_1, x_2, \ldots, x_\nu, ...),$$

зависящих от бесконечно многих координат $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, ..., где каждая из этих координат есть m или w. Пусть M – совокупность всех элементов E.

Элементами совокупности M являются, например, три следующие:

$$E^{\mathrm{I}} = (m, m, m, m, \ldots),$$
$$E^{\mathrm{II}} = (w, w, w, w, ...),$$
$$E^{\mathrm{III}} = (m, w, m, w, ...).$$

Теперь я утверждаю, что такое многообразие M не имеет мощности последовательности 1, 2, ..., ν, ...

Это вытекает из следующей теоремы:

---

[62] **В.Э. 2013-02-13:** Теперь, когда мы в §0 оговорили различие между нумерацией и сопоставлением и провели там сопоставление натуральных чисел с действительными числами области 0 ... 1, уясним еще раз ситуацию. В той работе, на которую Кантор здесь ссылается (статья B051), он НЕ доказал, что в интервале больше чисел, чем в «счетном множестве». Что же касается утверждения «нельзя представить в форме последовательности $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\nu, \ldots$», то опять же нужно уточнить, что оно, собственно, означает. Действительные числа интервала действительно нельзя сгенерировать (или перебрать) по линейному алгоритму, и в этом смысле и вправду «нельзя представить...». Но в §0 на каждом шаге сопоставления (в каждой из последовательных таблиц) каждому (рациональному) приближению к иррациональному числу сопоставлено одно натуральное число. Это число меняется от таблицы к таблице для приближений какого-то одного конкретного иррационального числа, например, для дробной части π. Но оно, это натуральное число, всё время есть, и никогда не наступит такой момент, когда для очередного приближения дробной части π вдруг не будет соответствующего натурального числа. Поэтому – если мы вообще допускаем актуальную бесконечность и пользуемся ею – то «в предельном случае» пределу всех приближений (т.е. самой дробной части π) будет тоже соответствовать натуральное число. Оно будет (актуально!) бесконечно большим, но оно БУДЕТ соответствовать ей. И в этом смысле интервал МОЖНО «представить в форме последовательности $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\nu, \ldots$».

«Если E_1, E_2, ..., E_ν, ... – какая-либо просто бесконечная последовательность элементов многообразия M, то всегда существует такой элемент E_0 многообразия M, который не совпадает ни с каким E_ν».

Пусть

$$E_1 = (a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,\nu}, \dots),$$
$$E_2 = (a_{2,1}, a_{2,2}, \dots, a_{2,\nu}, \dots),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$E_\mu = (a_{\mu,1}, a_{\mu,2}, \dots, a_{\mu,\nu}, \dots),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Здесь $a_{\mu,\nu}$ суть определенно m или w. Определим теперь последовательность b_1, b_2, …, b_ν, ... так, чтобы b_ν был тоже равен только m или w и отличен от $a_{\nu,\nu}$.

Итак, если $a_{\nu,\nu} = m$, то $b_\nu = w$, а если $a_{\nu,\nu} = w$, то $b_\nu = m$.

Если теперь мы рассмотрим элемент[63]

$$E_0 = (b_1, b_2, b_3, \dots)$$

многообразия M, то очевидно, что равенство

$$E_0 = E_\mu$$

не может иметь места ни для какого положительного целочисленного значения μ, так как в противном случае для соответствующего μ и для всех целочисленных значений ν было бы

$$b_\nu = a_{\mu,\nu},$$

а значит, в частности,

$$b_\mu = a_{\mu,\nu},$$

что исключается определением b_ν. Из этой теоремы непосредственно следует, что совокупность всех элементов многообразия M нельзя представить в форме последовательности E_1, E_2, ..., E_ν, ..., так как в противном случае мы столкнулись бы с противоречием,[64] что некая вещь E_0 как была бы, так и не была бы элементом многообразия M.

Это доказательство замечательно[65] не только вследствие его большой простоты, но главным образом потому, что содержащийся в нем принцип можно просто распространить на общую теорему, что мощности вполне определенных многообразий не имеют максимума или,

---

[63] **В.Э. 2013-02-14:** Вот рассмотрим этот элемент более пристально, чем это делает Кантор! Элементы $a_{\mu,\nu}$ принимают только два значения (m и w), поэтому, если ν меняется от 1 до некоторого n, то μ в то же время меняется от 1 до 2^n. Если длина E_0 растет до того же n (то есть, достигает длины остальных E_μ), то канторовский диагональный процесс охватывает n элементов E и не охватывает $2^n - n$ элементов. Легко видеть (по правилу Лопиталя), что доля охваченных диагональным процессом элементов среди всех элементов стремится к 0, когда n стремится к бесконечности. Поэтому вывод о том, что E_0 не может быть равен никакому E_μ сделать <u>НЕЛЬЗЯ</u>: E_0 равен одному из тех E_μ, которые не были охвачены диагональным процессом. Это настолько очевидная, настолько грубая ошибка Кантора, что единственный вопрос, который здесь возникает – это: как могли Цермело и все прочие кантористы ему поверить и этого не видеть? Это действительно загадка. Видимо, их взгляд как-то затуманивает то обстоятельство, что индексы ν и μ оба растут до бесконечности, а бесконечности эти принимаются равномощными – как при независимом соответствии. Только в таком случае можно предполагать, что диагональный процесс охватит все E_μ. Бесконечности ν и μ принимаются независимыми одна от другой и поэтому одинаковыми. Но они <u>зависимы</u> по самому их определению, они связаны соотношением $n / 2^n$.

[64] **В.Э. 2013-02-14:** Противоречие здесь возникает от предположения, что $2^n = n$ при бесконечности. Логически состоятельный вывод из этого противоречия может быть только один: диагональный процесс НЕ МОЖЕТ охватывать все E_μ.

[65] **В.Э. 2013-02-14:** Так что же здесь «доказал» Кантор? Он доказал, что ($2^n > n$) – вещь до предела тривиальную. Мощность множества с 2^n элементами всегда больше мощности множества с n элементами – при <u>зависимом</u> соответствии. Кантор просто перескочил с принятого им в начале независимого соответствия на соответствие зависимое. А по пути он еще (при своем «диагональном методе») принимал обе эти концепции соответствия <u>одновременно</u>: диагональный процесс охватывает все E_μ (независимое соответствие между ν и μ), но в то же время соответствие между n и 2^n установить нельзя (зависимое соответствие). Кантор проявляет просто ослепительные чудеса математического мышления! А Эрнст Цермело, Федор Медведев, Юрий Манин и тысячи других кантористов за ним все эти фокусы повторяют с потрясающей то ли наивностью, то ли слепотой. (Кантору эти фокусы простительны: он был болен и лечился в психиатрической больнице. А вот что нам думать об остальных? (Данная работа Кантора написана в 1890 году; первое лечение его в психиатрической больнице состоялось в 1884 году; в том же 1884 году он начал заниматься «теорией Шекспира–Бэкона»)).

что то же самое, каждому заданному многообразию L можно сопоставить другое многообразие M, имеющее бо́льшую мощность, нежели L.[66]

Пусть, например, L – линейный континуум, хотя бы совокупность всех действительных числовых величин z, которые ≥ 0 и ≤ 1.

Под M мы понимаем совокупность всех однозначных функций $f(x)$, принимающих лишь два значения 0 и 1, когда x пробегает все действительные значения, которые ≥ 0 и ≤ 1.[67]

Что M не имеет мощности, меньшей мощности континуума L, следует из того, что можно задать подмножества множества M, имеющие ту же мощность, что и L, например, подмножество, состоящее из всех функций, которые для отдельного значения x_0 переменного x имеют значение 1, а для остальных значений x имеют значение 0.

Но M и не имеет мощности, равной мощности континуума L, ибо в противном случае многообразие M можно было бы поставить во взаимно однозначное соответствие с переменным z и M можно было бы так представить в форме однозначной функции двух переменных x и z

$$\varphi(x, z),$$

что при задании частного значения z получался бы некоторый элемент $f(x) = \varphi(x, z)$ многообразия M и, наоборот, всякий элемент $f(x)$ многообразия M получался бы из $\varphi(x, z)$ заданием одного определенного значения z. Но это приводит к противоречию. Действительно, если под $g(x)$ мы будем понимать ту однозначную функцию от x, которая принимает лишь значения 0 или 1 и для каждого значения x отлична от $\varphi(x, x)$, то $g(x)$, с одной стороны, является неким элементом многообразия M, а с другой – не может быть получена из $\varphi(x, z)$ никаким заданием частного значения $z = z_0$, так как $\varphi(z_0, z_0)$ отлично от $g(z_0)$.[68]

Тем самым мощность многообразия M ни меньше, ни равна мощности континуума L; отсюда следует, что она больше, чем мощность у L (ср.: Журнал Крелле, т. 84, с. 242) [здесь I.3].

В «Основах общего учения о многообразиях» (Leipzig, 1883; Math. Ann., Bd. 21) [здесь I.5.5] я уже показал при помощи совершенно другого вспомогательного средства, что мощности не имеют максимума.[69] Там даже было доказано, что совокупность всех мощностей, если последние мыслить упорядоченными по их величине, образует «вполне упорядоченное множество», так что для каждой мощности по самой ее природе имеется непосредственно бо́льшая, а за всяким

---

[66] **В.Э. 2013-02-14:** Это естественный вывод, когда мы пользуемся зависимым соответствием. Для получения этого вывода не надо было предварительно принимать концепцию независимого соответствия.

[67] **В.Э. 2013-02-14:** Для уяснения того, о чем Кантор здесь говорит, покажем это на примере, когда z не континуум, а простенькое множество из трех величин $\{a, b, c\}$.

x	z	v	M
1	a	0	$f_1(a)=0$; $f_1(b)=0$; $f_1(c)=0$
2	b	1	$f_2(a)=0$; $f_2(b)=0$; $f_2(c)=1$
3	c		$f_3(a)=0$; $f_3(b)=1$; $f_3(c)=0$
4			$f_4(a)=0$; $f_4(b)=1$; $f_4(c)=1$
5			$f_5(a)=1$; $f_5(b)=0$; $f_5(c)=0$
6			$f_6(a)=1$; $f_6(b)=0$; $f_6(c)=1$
7			$f_7(a)=1$; $f_7(b)=1$; $f_7(c)=0$
8			$f_8(a)=1$; $f_8(b)=1$; $f_8(c)=1$

Множество M всех возможных функций от z при возможных значениях v будет иметь мощность v^z – при зависимом соответствии. В данном примере возможны $2^3 = 8$ функций; каждая функция принимает три значения в зависимости от z. Взаимно однозначное сопоставление элементов M и z невозможно, потому что это зависимое соответствие – M образовано из z.

[68] **В.Э. 2013-02-14:** В нашем примере функция $g(x)$ образуется из $f_1(a)=0$, $f_2(b)=0$, $f_3(c)=0$ (в таблице отмечены красным); $g(x)$ – это $f_x(a)=1$; $f_x(b)=1$; $f_x(c)=1$; очевидно, что $x = 8$, диагональный процесс сам по себе никакого противоречия не создает; противоречие появляется у Кантора лишь от того, что он предположил, будто диагональ (красные элементы) охватят все значения x. Мощность множества M больше, чем у множества z, но это элементарное следствие их взаимной зависимости; для того, чтобы этот факт установить, достаточно было просто посчитать v^z и сравнить с z; не надо было для этого вводить сначала независимое соответствие, уравнивая по мощности все бесконечные множества, потом переходить обратно к зависимому соответствию, проводить диагональный процесс, который не проводится до конца, получать противоречие, неправильно его интерпретировать и делать из него абсурдные выводы...

[69] **В.Э. 2013-02-14:** «Мощности не имеют максимума», когда мы пользуемся понятием зависимого соответствия; все бесконечные мощности одинаковы, если мы пользуемся независимым соответствием. Вся канторовская «шкала алефов» получена ценой того, что он отказался от (первоначально принятого им) независимого соответствия и перешел обратно к зависимому.

бесконечно возрастающим множеством мощностей тоже следует непосредственно бóльшая мощность.[70]

«Мощности» представляют собой единственное и необходимое обобщение конечных «кардинальных чисел»; они суть не что иное, как актуально бесконечно большие кардинальные числа, и им отвечают те же реальность и определенность, какие присущи конечным кардинальным числам. Разве что закономерные соотношения между ними, соответствующая им «теория чисел», являются несколько иными, нежели в области конечного.

Дальнейшая обработка этого поля – дело будущего.

Примечание Эрнста Цермело

В этой работе впервые дается классическое доказательство того факта, что $2^{\mathfrak{m}} > \mathfrak{m}$ (в записи для кардинальных чисел), при помощи «канторовского диагонального метода». Чтобы применить его вместо $\mathfrak{m} = \aleph_0 = \mathfrak{a}$ к мощности континуума $\mathfrak{c}$, нужно еще доказать, что континуум можно взаимно однозначно отобразить на множество формально различных двоичных дробей, поскольку всякое двоично рациональное число $p/2^n$ имеет не одно, а два двоичных разложения (только с нулями или только с единицами в конце). Но так как сами эти числа, представимые двумя способами, образуют счетное множество, а континуум содержит счетные подмножества, то в той же сокращенной записи получаем

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{a} + \mathfrak{c}_1 = \mathfrak{a} + \mathfrak{a} + \mathfrak{c}_1 = \mathfrak{a} + \mathfrak{c} = 2^{\mathfrak{a}} > \mathfrak{a}.$$

Ср. следующую за этой работу I.10, §4.

[70] **Э. Цермело:** То, что совокупность всех мощностей образует вполне упорядоченную систему (даже если не «множество»), в указанном месте вовсе не «доказано», так как у Кантора еще отсутствует доказательство, что всякое множество можно вполне упорядочить и что поэтому всякая мощность является алефом.

Веданопедия
Сайт: http://ve-poti.narod.ru/.

Статья «Теория множеств»

2013-02-07

Теория множеств – собирательное название, употребляемое в современной математике для обозначения некоторой неоднородной группы способов мышления и представлений, различающихся внутри этой группы по своему происхождению, природе и ценности.

В том поле, что традиционно называется «теорией множеств», ВТ выделяет две кардинально различающиеся части, и обозначает их двумя различными терминами: Квантуализм и Канторизм.

Квантуализм

Человеческое мышление с самых своих истоков оперирует различными множествами (см. статью «Множество»); уже люди каменного века выделяли многочисленные множества, например, такие как «мужчины», «женщины», «мамонты», «птицы» и т.д. С развитием мышления множества, которыми оперировал мозг, становились разнообразнее; всё чаще оперировали абстрактными множествами, т.е. множествами потенциальных продуктов мозговых программ. Но множества продолжали оставаться самым фундаментальным объектом в человеческом витосе. Можно сказать, лишь чуточку поэтизируя ситуацию, что человеческий мозг представляет собой «процессор множеств».

Поэтому сам факт осознания фундаментальной роли множеств, факт выделения самого́ общего понятия «множество» и рассмотрения всех объектов мышления как множеств является вполне естественным, а такой подход – несомненно правильным.

Для обозначения этого подхода в русскоязычной литературе используется термин «теоретико-множественный» (подход и т.д.). Для вытеснения этого уродливого термина в ВТ в 1990-х годах был принят заменяющий термин «квантуальный» (от латинского слова, меняющегося по грамматическим родам так: «*quantus, quanta, quantum*» – и означающего «столько, сколько можно»; подразумевается, что само множество на латыни будет обозначаться этим словом). А сам подход, всё рассматривающий как множества, называется Квантуализмом.

Канторизм

Но в традиционной математической литературе всецело полезный и подлежащий одобрению квантуализм безнадежно смешан со лженаучным, построенным на логических ошибках, учением Георга Кантора о якобы существующих различных типах бесконечностей. Это учение, чтобы отграничить его от квантуализма, в ВТ названо «канторизмом».

В традиционной литературе все вопросы рассматриваются и везде говорится так, будто квантуализм и канторизм неразрывно связаны, будто это естественные части единого целого, называемого «теорией множеств». Это затрудняет формулировки отношения к теории множеств и, возможно, иногда порождает путаницу и недоразумения.

Нужно всегда помнить, что в т.н. «теории множеств» имеются две части, совершенно разные по качеству, значимости и полезности, – квантуализм и канторизм.

Первый из них – ценная вещь, которая широко и плодотворно используется. Когда кто-то говорит, что «теория множеств широко применяется...», то он на самом деле утверждает, что применяется квантуализм.

Вторая вещь представляет собой лженауку, нигде не применяется и применяться принципиально не может, кроме как для построения новых таких же лженаук. Никто не строит мостов и не запускает ракет, рассчитывая параметры моста и траекторию ракеты «трансфинитными числами».

Приложение № 1. Введение в книгу Ф.А. Медведева

2013-02-07

В настоящем Приложении приводится «Введение» в книгу Федора Андреевича Медведева «Развитие теории множеств в XIX веке» (Издательство «Наука», Москва 1965, ответственный редактор доктор физико-математических наук А.П. Юшкевич). Это типичный пример безнадежного смешения квантуализма и канторизма.

* * *

Введение

В истории математики было немного таких моментов, которые по своей общематематической и философской значимости сравнимы с революционным переворотом, совершенным созданием теории множеств. Он равнозначен факту осознания математики как дедуктивной науки в древней Греции, созданию в XVII–XVIII вв. классического математического анализа и построению неевклидовых геометрий в XIX столетии.

Основным понятием теории множеств является, несомненно, понятие актуальной бесконечности.[71] Фактически это понятие в той или иной форме, явно или неявно, ученые использовали с тех пор, как математика стала дедуктивной наукой. Но только в теории множеств оно стало объектом самостоятельного научного рассмотрения. И, как отметил видный специалист по теории множеств А.А. Френкель,

> «завоевание актуальной бесконечности методами теории множеств можно рассматривать как расширение нашего научного горизонта, не меньшее по значению, чем коперниковская система в астрономии и теория относительности или даже квантовая теория в физике»[72].[73]

Во всяком случае можно сказать, что практически почти всё развитие математики первой половины XX столетия происходит под прямым или косвенным влиянием теории множеств.

---

[71] **В.Э. 2013-02-07:** Основным понятием теории множеств является всё-таки понятие множества. Бесконечные множества представляют собой потенциальные продукты бесконечно работающих (способных работать бесконечно) мозговых программ. Как продукты программ, к тому же всего лишь потенциальные, а не реальные, эти множества являются лишь потенциально бесконечными. В физическом мире актуальной бесконечности этих множеств нет, она не существует. Но человеческий витос путем бокоанализа программы, порождающей данное множество, легко создает номиналию данного (бесконечного) множества, в результате чего в платоновском мире появляется реалия актуально бесконечного множества. Это фактический процесс, происходящий в мозге того человека, который «начинает рассматривать множество как актуально бесконечное». «Признать» или «не признать» актуальную бесконечность – это на самом деле означает: допускать или не допускать в своем мышлении (т.е. в работе мозгового компьютера) этот процесс бокоанализа. Разумеется, нет никаких причин, заставляющих в данном случае отказываться от применения бокоанализа (широко применяемого мозгом в других, самых обычных повседневных ситуациях). Поэтому нет никаких причин «не признавать» актуальную бесконечность (существующую не в физическом мире, а в платоновском мире идей). Но при этом нужно понимать и помнить, КАК актуальная бесконечность возникает, откуда она появляется, и мыслить о ней нужно четко и логично, не совершая при этом логических ошибок (свойственных Кантору и кантористам). Когда Медведев выдвигает актуальную бесконечность в качестве основного понятия теории множеств, он на самом деле подразумевает, что она будет обладать теми свойствами, которые ей приписывает Кантор. Но на самом деле она такими свойствами НЕ обладает; эти «свойства» «получены» путем совершения логических ошибок. Но эти ошибки вовсе не состоят в принятии самого понятия актуальной бесконечности (как это стараются изобразить кантористы). Актуальная бесконечность – законна, а ошибки кантористов – это просто ошибки, не имеющие никакого отношения к бесконечности как актуальной бесконечности.

[72] A.A. Fraenkel. *Abstract set theory*. Amsterdam, 1953, p. 331.

[73] **В.Э. 2013-02-08:** А это уже ерунда, высказанная в предположении, что канторизм основывается не на логических ошибках, а представляет собой действительное научное знание.

> «Теория множеств и ее ближайшие приложения не только образовали новый предмет математического исследования; значение теории множеств оказалось неизмеримо большим: она дала универсальный новый метод, быстро захвативший всю математику»[74].

И хотя в настоящее время существует много методов и ряд новых отраслей математики, выходящих за пределы теоретико-множественных идей, тем не менее значение теории множеств остается очень большим.

Не говоря уже о таких математических дисциплинах, как теория функций действительного переменного, общая топология, функциональный анализ, непосредственно выраставших из теории множеств и на ее основе,[75] можно указать и такие, как теория вероятностей и алгебра, которые во многом сложились еще до создания теории множеств, но под влиянием последней претерпели существенное изменение.

> «Невозможен никакой компромисс в вопросе о взаимоотношении теории вероятностей с другими разделами математики. Теория вероятностей – это просто одна из ветвей теории меры, отличающаяся особым вниманием к некоторым специальным понятиям этой теории и своей особой областью приложений»[76].

Столь же определенно говорится и об алгебре: «*В основе общей алгебры лежат понятия и методы теории множеств*»[77].

Число таких высказываний высококвалифицированных специалистов можно значительно увеличить, но и приведенных достаточно для характеристики роли теории множеств в современной математике.

В связи со сказанным определенную настороженность вызывает то обстоятельство, что теория множеств XIX столетия нередко представляют творением одного человека. Так, в предисловии к собранию сочинений Г. Кантора Э. Цермело писал:

> «В истории науки случается очень редко, чтобы целая научная дисциплина основополагающего значения была обязана творчеству единого лица. Это произошло с построенной Георгом Кантором теорией множеств – новой математической дисциплиной, основы которой были созданы на протяжении приблизительно 25 лет в ряде сочинений одного и того же исследователя; ...все более поздние исследования в этой области воспринимаются лишь как дополнительное развитие его основных мыслей»[78].

Действительно ли, однако, дело обстоит так, что столь обширная и столь важная научная дисциплина является единоличным творением Кантора[79]? Из истории математики известно, насколько трудно иногда однозначно связать даже отдельные понятия или теоремы с именами тех или иных математиков. Как правило, подход к значительному математическому понятию является неоднозначным, разные математики подходят к нему по-разному, исходя иногда из самых разнообразных, на первый взгляд не связанных между собою, задач. *A priori* поэтому приведенные слова Цермело выглядят как явное преувеличение. В самом деле, как мы увидим впоследствии, они действительно не совсем соответствуют фактическому положению вещей. У Кантора были и предшественники и современники почти во всех вопросах разрабатываемой им теории. По разным причинам им не удалось получить таких серьезных результатов,[80] каких добился Кантор, но всё же очень многое в теории множеств было сделано или до Кантора, или независимо от него.

Этим не умаляются заслуги Кантора в создании теории множеств. Его заслуги бесспорны, и об этом не раз придется говорить впоследствии. Отрицается просто возможность исторически

---

[74] П.С. Александров. Предисловие к книге Ж. де Рама «Дифференцируемые многообразия». М., ИЛ, 1956, стр. 5.

[75] **В.Э. 2013-02-07:** На основе квантуализма, разумеется, а не канторизма.

[76] Д.Л. Дуб. *Вероятностные процессы*. М., ИЛ, 1956, стр. 7.

[77] А.Г. Курош. *Лекции по общей алгебре*. М., Физматгиз, 1962, стр. 9.

[78] G. Cantor. Gesammelte Abhandlungen. Berlin, 1932, S. III. Далее ссылка на эту работу приводится в виде: G. Cantor. Ges. Abh.

[79] **В.Э. 2013-02-07:** Канторизм, конечно, был создан исключительно Георгом Кантором, и именно это имеет в виду Цермело. Но квантуализм применялся широко и до Кантора – что теперь и будет доказывать Медведев. Так что на самом деле тут никакого противоречия нет.

[80] **В.Э. 2013-02-07:** То есть, они не построили такие воздушные замки, как Кантор.

незакономерного построения новой научной дисциплины без подготовленной для этого почвы и без участия большой группы ученых в ее разработке.

На протяжении XIX столетия в самых разнообразных отраслях математики вырастали теоретико-множественные идеи, и эти идеи более или менее сознательно начали разрабатывать многие ученые. И тот же Дедекинд, если бы он уделил столько внимания самостоятельной разработке новой теории, добился бы, вероятно, не меньших результатов, нежели Кантор. Исторически так не случилось. Именно Кантор сумел разглядеть в возникающих в различных отраслях математики новых объектах – бесконечных множествах разных типов – самостоятельный, интересный и важный предмет исследования. Почувствовав значение возникающей математической дисциплины, он забросил свои исследования по теории чисел и теории функций, целиком посвятив себя разработке проблем, связанных с учением о множествах.

Истории теории множеств посвящено довольно много серьезных работ. Из них в первую очередь следует указать книгу В.Л. Некрасова «Строение и мера линейных точечных областей»[81], добрая половина которой (главы I и III) посвящена истории теории точечных множеств; затем цикл статей Ф. Журдэна под общим названием «Развитие теории трансфинитных чисел»[82], книгу Ж. Кавайе «Замечания о формировании абстрактной теории множеств»[83]. Богатейший историко-математический материал содержится в ряде работ А. Шёнфлиса, подытоженных в книге «Развитие теории множеств и ее применений»[84]. Очень много самых разнообразных исторических данных содержится в немецкой и французской энциклопедиях математических наук. Имеется также ряд статей, в которых рассмотрены отдельные вопросы истории теории множеств, и несколько статей, посвященных Георгу Кантору.

Тем не менее, история теории множеств далеко не исчерпана, да вряд ли будет исчерпана в ближайшее время. С последующим развитием науки этот поворотный момент выглядит по-новому. Так, например, становление математики как дедуктивной науки в древней Греции давно является объектом исследований историков математики. И тем не менее к этому вопросу возвращаются всё вновь и вновь, раскрывая новые важные стороны, не замеченные прежними исследователями. Можно думать, что и с вопросом становления теории множеств дело будет обстоять аналогичным образом.

В указанной литературе по истории теории множеств возникновение последней представляется как итог исследований по основаниям математики, главным образом исследований по обоснованию классического анализа и теории функций. Действительно, эти исследования явились важным источником теоретико-множественных идей и методов. Но не только они одни. На наш взгляд, в возникновении теории множеств в той или иной мере «повинны» все основные направления математики XIX столетия. Это относится и к теории чисел, и к проективной геометрии,[85] и к алгебре и, как уже говорилось, к анализу и теории функций. И подобно тому, как после формирования теория множеств надолго стала основой для последующего развития математики в целом, так и ее создание явилось в некотором смысле итогом развития почти всей математики XIX столетия.

При нынешнем состоянии исследований по истории математики XIX столетия не представляется возможным доказать этот тезис во всем его объеме. Ниже сделана лишь одна из попыток в этом направлении.

В математике уже давно ощущалась недостаточность тех логических средств, которыми располагала традиционная формальная логика. Ее внутреннее развитие до XIX столетия происходило настолько незаметно, что с известным правом И. Кант мог сказать:

> «Замечательно, что логика до сих пор не могла также сделать ни одного шага вперед (после Аристотеля. – *Ф.М.*) и, по-видимому, имеет совершенно замкнутый, законченный характер»[86].

---

[81] Томск, 1907.

[82] Ph.E.B. Jourdain. *The development of the theory of transfinite numbers*. – Arch. Math. und Phys., 1906, 10, 254–281; 1909, 14, 289–311; 1910, 16, 21–43; 1914, 22, 1–21.

[83] J. Cavarilès. *Remarques sur la formation de la théorie abstraite des ensembles*, I, II, Paris, 1938.

[84] A. Schoenflies. *Entwickelung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen*. Leipzig und Berlin, 1913.

[85] На теорию чисел и проективную геометрию как важные источники теоретико-множественных представлений вкратце указал П.С. Александров в одной из лекций, прочитанных в июле 1962 г. на курсах усовершенствования учителей.

[86] Предисловие ко второму изданию «Критики чистого разума». Перевод Н. Лосского. Пг., 1915, стр. 9.

Однако его вывод о законченности характера[87] формальной логики был исправлен, и в связи с этим в 1812 г. Гегель писал:

> «Но если со времен Аристотеля логика не подверглась никаким изменениям, ...то мы отсюда должны сделать скорее тот вывод, что она тем больше нуждается в полной переработке, ибо двухтысячелетняя непрерывная работа духа должна была доставить более высокое сознание в своем мышлении...»[88].

Эта двухтысячелетняя «работа духа», работа человеческой мысли, происходила в самых разнообразных областях сознательной деятельности человека и, быть может, наиболее интенсивно именно в области математики, вопреки мнению Гегеля о бедности логическим содержанием математических суждений и о непригодности использования в логике средств математики.[89]

В частности, в математике был разработан очень полезный язык формул, в который хорошо укладывались многие составные части математического мышления, и ход рассуждений в ряде случаев представлялся в виде формального преобразования некоторых исходных формул по определенным правилам. В первой половине XIX столетия, главным образом в алгебре, было уже отчетливо осознано то обстоятельство, что один и тот же формальный язык применим не только к конкретным объектам определенного рода[90] (например, к действительным числам), но к довольно широкому классу математических объектов различных родов (комплексным числам, векторам, кватернионам и т.д.). Наиболее характерной в этом отношении была, может быть, «Алгебра» Дж. Пикока.[91] В первой ее части буквенное исчисление изложено при условии интерпретации букв только как действительных чисел. Во второй же части буквы и алгебраические действия над ними рассматриваются как чисто формальные символы и их преобразования по определенным правилам.

---

[87] **В.Э.:** Может быть, всё-таки «о законченном характере»?

[88] Гегель. *Наука логики*. М., Соцэкгиз, 1937, стр. 30.

[89] Гегель. *Наука логики*. М., Соцэкгиз, 1937, стр. 31–32.

[90] **В.Э. 2013-02-08:** Это крайне неточное выражение, показывающее, что Медведев плохо понимает сущность тех вещей, о которых он говорит. Что такое «язык применим»? В действительности дела здесь обстоят так. Человек способен выполнять арифметические действия над числами. Это означает, что в его мозге есть программа выполнения таких действий. Эта программа не врожденна и не дана ему раз и навсегда, а (по заготовкам, приобретенным, как правило, в школе) генерируется непосредственно перед каждым конкретным вычислением. Допустим, человеку нужно вычислить: $6{,}2 \cdot \pi^2 + 9{,}43 \cdot \pi + 7{,}86$. Назовем программу, по которой он это вычисляет, программой *A* (а алгоритм, на котором она построена, соответственно алгоритмом *A*). Но эта программа (по этому алгоритму) может вычислить не только значение выражения именно при этих числах, но также и при других числах (при другом материале). Алгебра начинается тогда, когда абстрактный, потенциальный материал программы обозначают буквами, например, материал программы *A* традиционно обозначают так: $ax^2 + bx + c$. Это выражение, в отличие от предыдущего, представляет собой ОБЩЕЕ описание материалов программы *A*. Если хотят найти, при каких значениях x программа *A* даст результат 3, то описание пополняют так: $ax^2 + bx + c = 3$. Мы со школы знаем, что 3 «можно перенести на другую сторону уравнения» и вычесть из c, и знаем также о других операциях, которые можно проделывать над уравнениями. Но чтобы выполнить эти операции, нам опять нужна программа. Однако это не та же программа *A*, а другая программа *B*, оперирующая уже не числами, а символами уравнения. Если же в первом выражении мы хотим оперировать не действительными числами, а комплексными, то вместо программы *A* нам нужна будет несколько другая программа *A′* (так как действия над комплексными числами определены несколько иначе). Однако мы можем убедиться, что программа *B* остается пригодной и тогда, когда уравнение описывает не программу *A*, а программу *A′*. Процесс установления этого убеждения есть процесс определенного математического исследования, а результат – определенное математическое знание. На самом деле здесь исследуются некоторые программы мозга и взаимосвязи между их материалами и продуктами. Вот это в действительности скрывается за туманными словами Медведева: «*один и тот же формальный язык применим не только к конкретным объектам определенного рода*...».

[91] G. Peacock. *Arithmetical algebra*. Cambridge, 1842; *Symbolical algebra*. Cambridge, 1843.

> «Вместе с развитием алгебры не могла не поразить аналогия между правилами формальной логики и правилами алгебры, применяемыми в том и в другом случаях к неконкретизируемым далее объектам (предложениям или числам)»[92].

И с середины XIX столетия, когда эта аналогия была осознана, начала создаваться математическая логика, разработка которой связана с именами Буля, Де Моргана, Джевонса, Пирса, Фреге, Пеано, Шрёдера и ряда других математиков. Логические связи между суждениями и понятиями были выражены в математических формулах, а получение логических следствий предстало как формальное преобразование исходных формул по фиксированным правилам. Такое применение математического формализма позволило существенно раздвинуть рамки традиционной формальной логики.

Однако исследования по математической логике на первых порах производились вне связи с основными направлениями чисто математических исследований. Многие математики о них, как правило, просто не знали или же не осознавали их значение. Между тем потребность в применении логики и расширении ее средств была столь настоятельной, что математики вынуждены были прийти к логике еще с одной стороны. В разработанном ими учении о множествах они создали аппарат, оказавшийся содержательной теорией значительной части математической логики.

Этот второй подход математиков к логике был в некотором смысле противоположным тому, каким они шли к математической логике. Если к последней приводил путь использования в логике языка формул, то к теории множеств математики шли, скорее отказываясь от этого языка.

Одно из основных отличий математики XVIII в. от математики XIX в. заключается в следующем:

> «...Будучи по существу методом, а в своих высших частях (дифференциальные уравнения) часто и собранием разрозненных методов решения задач, поставленных естествознанием, математика XVIII века естественно имела калькулятивный, вычислительный и формальный (алгоритмический) характер»[93].

Этот характер математики считался самими математиками как раз тем свойством, которое отличает ее от других наук. Там, где приходилось встречаться с недостаточностью традиционных вычислительных алгоритмов, где требовалось применить более общие способы рассуждений, там не желали видеть математической проблемы.

Показательна в этом отношении характеристика Эйлера топологической задачи о кенигсбергских мостах. Он сразу же осознал, что она не может быть решена обычными методами геометрии, алгебры или комбинаторики, решил ее,[94] но, сообщая свое решение Эдеру, писал:

> «Это решение, по-видимому, имеет мало отношения к математике, и мне непонятно, почему следует скорее от математика ожидать этого решения, нежели от какого-нибудь другого человека, ибо это решение подкрепляется одним только рассуждением, и нет необходимости привлекать для нахождения этого решения какие-либо законы, свойственные математике»[95].

Но, как отметил еще Галуа,

> «начиная с Эйлера, вычисления становятся всё более и более необходимыми и вместе с тем всё более и более трудными, по мере того, как их начинают применять ко всё более и более возвышенным разделам науки. В начале нашего века алгоритмы достигли такой степени сложности, что если бы современные математики не придавали своим исследованиям ту стройность, при которой можно быстро, с одного взгляда охватить значительное число операций, всякое движение вперед стало бы невозможным»[96].

---

[92] N. Bourbaki. *Éléments d'histoire des mathématiques*. Paris, 1960, p. 15. (Здесь цитируется в нашем переводе; русский перев. см. Н. Бурбаки. *Очерки по истории математики*. М., ИЛ, 1963, стр. 14).

[93] П.С. Александров. *Русская математика XIX и XX вв. и ее влияние на мировую науку*. Ученые записки МГУ, 1947, 1, вып. 91, стр. 4.

[94] Л. Эйлер. *Письма к ученым*. М.–Л. Изд-во АН СССР, 1963, стр. 153.

[95] Там же, стр. 339.

[96] Цит. по кн.: А. Дальма. *Эварист Галуа – революционер и математик*. М., Физматгиз, 1960, стр. 144–145.

И эта невозможность успешного продвижения вперед в решении всё усложняющихся математических задач путем использования прежних методов отчетливо осознается наиболее выдающимися математиками XIX столетия. Начинают разрабатываться такие общие понятия, как группа, поле, кольцо, структура в алгебре, функция и предел в анализе. И, наконец, создается совокупность чрезвычайно общих понятий теории множеств. Вычисления в значительной мере заменяются рассуждениями.

Математика в своем последовательном развитии поднималась с одной ступени на другую по лестнице возрастающей абстрактности мышления. Но сколь бы ни была высокой степень абстрактности математических понятий, она не достигала уровня абстрактности, свойственного классической аристотелевской логике.

Положение коренным образом изменилось с созданием абстрактной теории множеств. Понятия последней достигли такой степени общности, что они или сравнялись по общности с понятием классической логики, или даже вышли за пределы абстрактности традиционных логических понятий. Теория множеств в значительной своей части стала математической логикой, выраженной на другом, содержательном языке.[97]

Тесное переплетение математической логики и теории множеств произошло уже в XX столетии. Рассмотрение этого вопроса выходит за рамки настоящего исследования. Однако и в XIX в. связи теории множеств и математической логики достаточно ощутимы, и нам не раз придется отмечать их.

Вследствие того, что математика в теории множеств доросла до логики, возникла ожесточенная идеологическая борьба вокруг нового раздела математики. Логические исследования теснее, чем какие-либо другие, связаны с общефилософским мировоззрением ученого, поэтому расхождения во взглядах на предмет математики в целом и на предмет теории множеств в частности приняли более обнаженную форму. Однако всё это отчетливо выразилось опять-таки в XX столетии; в XIX же можно обнаружить лишь зарождение тенденций этой идеологической борьбы. Тогда происходило лишь становление новой научной дисциплины, с трудом пробивавшей себе дорогу среди тесно переплетенных ветвей мощного дерева математических наук, и далеко не все видели перспективы этого становления.

Вырастая во многом из потребностей более строгого обоснования различного рода рассуждений, широко применявшихся в математике, теория множеств после ее создания (а иногда в процессе этого создания) стала, в свою очередь, применяться для обоснования различных разделов математики. Но не успела теория множеств сформироваться в качестве самостоятельной научной дисциплины, едва начали осознавать необходимость ее в вопросах обоснования математики, как разные исследователи, начиная с самого Кантора, обнаружили внутри этой теории ряд серьезных парадоксов. Теория множеств, предназначавшаяся было для более строгого обоснования математики в целом, сама оказалась лишенной основ.

> «Надо согласиться, что состояние, в котором мы находимся сейчас в отношении парадоксов, на продолжительное время невыносимо. Подумайте: в математике – этом образце достоверности и истинности – образование понятий и ход умозаключений, как их всякий изучает, преподает и применяет, приводят к нелепости. Где же искать надежность и истинность, если даже само математическое мышление дает осечку?»[98]

С тех пор, как был исторгнут этот крик души крупнейшего математика первой половины XX столетия, прошло почти сорок лет. Однако положение с парадоксами теории множеств ничуть не изменилось, несмотря на предпринятые усилия по их устранению, По-прежнему они довлеют над сознанием математиков, их переписывают из книги в книгу, из статьи в статью, но пока не сделано каких-либо существенных шагов к освобождению от них математического мышления.

---

[97] **В.Э. 2013-02-08:** И логика, и теория множеств (и вся математика в целом) изучает мозговые программы (не все, но определенного рода), точнее: взаимосвязи между их материалами и продуктами, закономерности в этих материалах и продуктах. Поэтому граница между «логикой» и «теорией множеств» крайне условна, на самом деле ее нет. Их разделение – это только историческая традиция, а эта традиция основывается на слабом понимании сущности дела.

[98] D. Hilbert. *Über das Unendliche*. – Math. Ann., 1925, 95, 181–190. Русский перевод в кн.: Д. Гильберт. *Основания геометрии*. М. – Л., ОГИЗ ГИТТЛ, 1948, стр. 349.

Приведенные слова Гильберта относятся не только к парадоксам теории множеств, но и к ряду широко употребляющихся в ней способов рассуждений, вроде математических доказательств с использованием аксиомы Цермело, закона исключенного третьего, совокупности всех трансфинитных чисел второго числового класса, диагонального метода.

Фактически такого типа рассуждения, как правило, сложились в математике задолго до того, как теория множеств начала создаваться в качестве самостоятельной научной дисциплины. Ими широко пользовались в самых разнообразных разделах математики, не формулируя их в явном виде, и никто не возражал против их употребления. Но тогда, когда в теории множеств им был придан тот характер общности, каким вообще обладает эта теория, когда вследствие этой общности они приняли отчетливо выраженную форму, тотчас же возникли многочисленные возражения. Мнения математиков разделились. Одни категорически выступали против таких типов рассуждений, другие высказывались за безусловное их признание, третьи колебались в ту или иную сторону.

Особенно наглядно это проявилось в отношении аксиомы Цермело. Формулировка ее чрезвычайно проста: если имеется некоторое семейство непустых множеств, то можно рассматривать множество, элементами которого будут выбранные по одному элементы множеств заданного семейства. Вместе с тем, основываясь на ней, можно получить математические результаты довольно странного характера. Как показали С. Банах и А. Тарский, сферу радиуса *R* можно разбить на конечное число таких неперекрывающихся частей, что, перемещая последние как твердые тела и прикладывая их друг к другу соответствующим образом, можно получить новую сферу радиуса 2*R*, причем не теряется ни одной точки первой сферы и не вводится новых точек[99].[100]

В явном виде эта аксиома была сформулирована только в 1904 г.[101] Фактически же ею широко пользовались на протяжении всего XIX столетия.[102] Даже возражения против использования этой аксиомы были высказаны еще до ее явной формулировки.[103] После опубликования работы Цермело возникла довольно серьезная полемика между Ж. Адамаром, Э. Борелем, Р. Бэром и А. Лебегом,[104] в частности о правомочности аксиомы выбора. С тех пор вопрос этот неоднократно обсуждался, но до сегодняшнего дня единого мнения не существует.

Несмотря на возражения многих математиков против использования рассуждений, связанных с аксиомой Цермело, она и до сих пор находит себе широчайшее применение в практике математических исследований.

> «Вопрос о логических основах этой аксиомы и о законности ее использования принадлежит к числу самых трудных и спорных вопросов обоснования теории множеств. Мы не могли бы, однако, обойтись без аксиомы выбора»[105].[106]

---

[99] Н.Н. Лузин. Собр. соч., т. II. М., Изд-во АН СССР, 1958, стр. 518.

[100] **В.Э. 2013-02-02:** Э-э-э, боже мой! Я уже 40 лет про это слышу... Покажите мне, как вы это делаете, а я покажу вам, где у вас логическая ошибка. Меня не проведешь!

[101] E. Zermelo. *Beweis, daß jede Menge wohlgeardnet werden kann*. – Math. Ann., 1904, 59, 514–516.

[102] Об использовании аксиомы Цермело в анализе и теории множеств см.: В.К. Серпинский. *Аксиома Zermelo и ее роль в теории множеств и в анализе*. – Матем. сб., 1924, 31, стр. 94–128. Многочисленные примеры применения этой аксиомы в теории чисел и в алгебре будут указаны далее.

[103] G. Peano. *Démonstration de l'intégrabilité des équations différentiel les ordinaires*. – Math. Ann., 1890, 37, 210.

[104] *Cinq lettres sur la théorie des ensembles*. – В кн.: E. Borel. *Leçons sur la théorie des fonctions*. Note IV. 2e éd. Paris, 1914, p. 150.

[105] А.Г. Курош. *Лекции по общей алгебре*. М., Физматгиз, 1962, стр. 11.

[106] **В.Э. 2013-02-08:** Сама постановка вопроса нечеткая, неплодотворная и порождает проблемы. Не надо вообще никаких аксиом: ни аксиомы выбора, ни других аксиом. Просто отдайте, наконец, себе отчет в том, ЧТО, собственно, вы изучаете, а именно: что под видом «множеств» вы изучаете продукты мозговых программ, и смотрите на этот предмет именно как на программы – учитывая, КАК они могут взаимодействовать. Просто перестаньте жить в своем вечном тумане и составьте наконец ясную картину о ситуации! «Аксиома выбора» – «формулировка ее чрезвычайно проста: если имеется некоторое семейство C_i непустых множеств, то можно рассматривать множество *D*, элементами которого будут выбранные по одному элементы множеств заданного семейства...» Множество *D* создается программой (*D*), и множества C_i создаются программами (C_i); вот, определите точно, КАК эти программы взаимодействуют в том конкретном случае, когда вы делаете свой «выбор»! Тогда не будет никаких неясностей. А провозглашение общей «аксиомы» – это тупиковый путь, порожденный только вашим незнанием природы изучаемого

Таким образом, несмотря на наличие в теории множеств серьезнейших противоречий, несмотря на наличие в ней сомнительных методов рассуждений (без которых нет той теории множеств, которая требуется для математических приложений), эта теория и на сегодняшний день остается фундаментом, на котором строится значительная часть современной математики. Положение здесь в некотором смысле сходно с положением в анализе в XVIII столетии. Тогда большинство математиков также видело логическую противоречивость исходных принципов анализа. Многие из них безуспешно пытались преодолеть эти трудности, но из-за этого не отказывались от использования аналитических средств в других науках, да и сам анализ развивался весьма успешно.

Тот факт, что предметом настоящей работы выбрана история теории множеств в XIX в., не означает, что до этого периода в математике не было теоретико-множественных идей. Они, как мы уже упоминали, существовали в математике со времени становления ее как дедуктивной науки. Понятие бесконечности – одно из основных понятий науки вообще, и многие ученые, в том числе и математики, не раз в истории человеческой мысли обращались к нему. XIX век характеризуется в математике тем, что из различных типов бесконечностей, рассматриваемых мыслителями прошлых эпох, был выделен тип актуально бесконечных множеств, состоящих из объектов самой разнообразной природы. И это выделение произошло в силу объективного развития самой математики. Были и раньше попытки рассмотрения актуальных бесконечных множеств, особенно в эпоху средневековья. Многие из этих попыток достаточно интересны.[107] Но всё же в них не было той органической связи с развитием математики, которая сложилась в XIX в. Именно в этот период появилась возможность выделения учения о множествах в самостоятельную научную дисциплину,[108] быстро оказавшую влияние на всё последующее развитие математики.

предмета. Конечно, в общем случае «аксиома выбора» НЕ верна: если программа D отработает прежде, чем программы C_i успели создать выбираемые элементы, то множество D построено НЕ будет.

[107] См., например, E. Stamm. *Tractatus de Continuo von Thomas Bradwardin*. – Isis, 1936, 31, 13–33; А.П. Юшкевич. *История математики в средние века*. М., Физматгиз, 1961, стр. 390 – 392; J. Pogrebyssky. *Sur la préhistoire de la théorie des ensembles*. – В кн.: A. Koyré. *Mélanges*. Paris, 1964.

[108] **В.Э. 2013-02-08:** Если из теперешней «теории множеств» выбросить (лженаучный и несостоятельный) канторизм и оставить один лишь (плодотворный и полезный) квантуализм, то вообще-то оставшаяся часть «теории множеств» вряд ли потянет на статус «самостоятельной научной дисциплины», несмотря на всю полезность квантуализма. Без «трансфинитных чисел», «шкалы алефов», «проблемы континуума» и прочего инвентаря нынешней «теории множеств» там останется только довольно тривиальный аппарат множеств, подмножеств, их пересечений, дополнений и т.д. Но зато место изгнанного канторизма в «теории множеств» способны занять соответствующие разделы ВТ: учение о множествах как продуктах мозговых программ, об алгоритмах, порождающих множества, о взаимодействиях этих алгоритмов и т.д. Это, конечно, будет уже совсем другая теория множеств – но зато подлинная и соответствующая реальности.

Веданопедия
Сайт: http://ve-poti.narod.ru/.

Статья «Диагональный метод»

2012-01-22

Диагональный метод – несостоятельный прием доказательства, изобретенный Георгом Кантором 7 декабря 1873 года.

Диагональный метод заключается в следующем:

1) принимается, что $a^n = n$ при бесконечном n (где a и n натуральные числа; $a \geq 2$);

2) из этого выводится некоторое противоречие;

3) однако это противоречие объясняется НЕ тем, что невозможно $a^n = n$ при указанных условиях;

4) а вместо этого делается вывод о какой-то посторонней вещи, не имеющей отношения к подлинной причине противоречия.

В широко известной литературе встречаются три разновидности Диагонального метода, обозначенные ниже как «Стягивающиеся интервалы», «Диагональный процесс» и «Диагональный элемент». Возможно, в менее известной литературе можно встретить еще и другие варианты диагонального метода.

Стягивающиеся интервалы

Именно этим вариантом Георг Кантор в письме к Рихарду Дедекинду от 7 декабря 1873 года впервые «доказал» несчетность множества действительных чисел.[109] До этого в письме от 29 ноября он установил счетность множества рациональных чисел, Дедекинд в ответном письме показал счетность множества алгебраических чисел, и, вот, теперь 7 декабря происходит «историческое событие»: впервые миру открывается существование «несчетного множества».

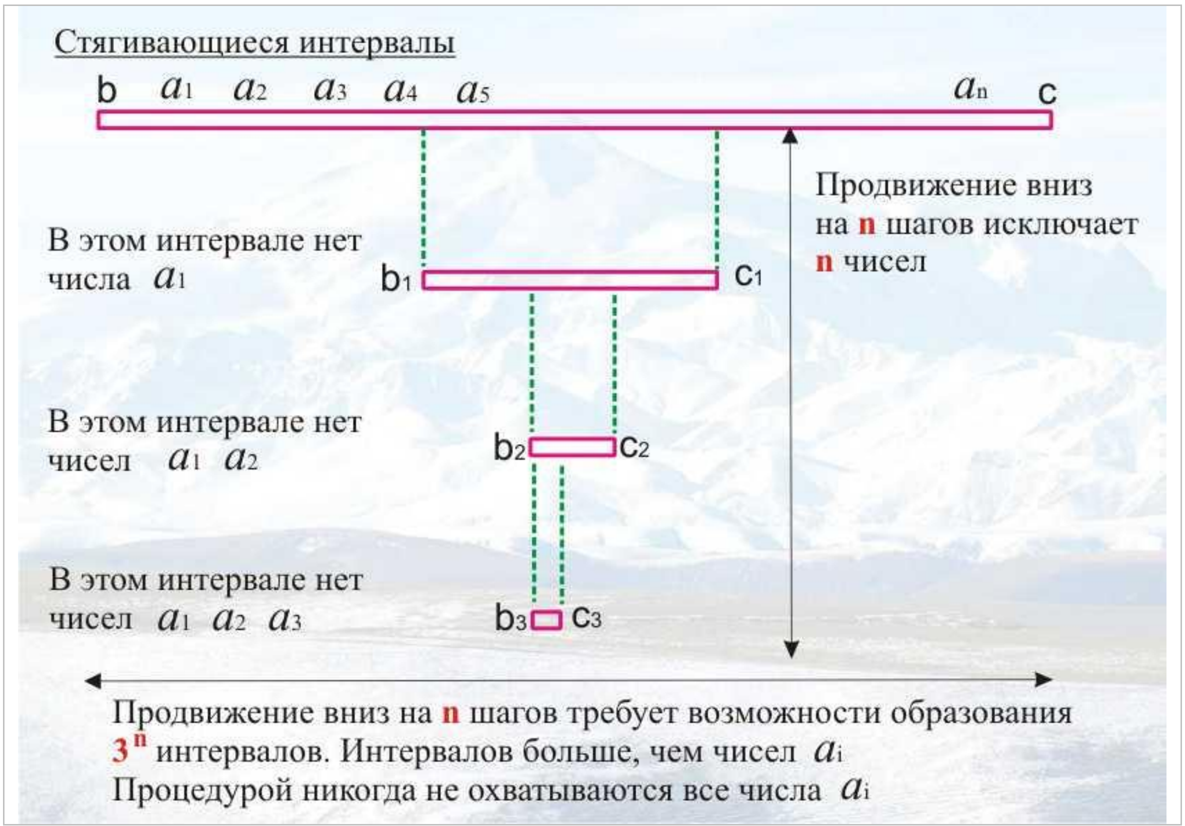
Кантор взял произвольный интервал действительных чисел (b, c), предположил, что числа в нем перенумерованы в последовательности a_1, a_2, ..., a_n, ..., потом разделил интервал на три части, далее взял ту часть, в которой нет числа a_1 (на три, а не на две части делилось, видимо, для того, чтобы наверняка существовал интервал без этого числа даже в том случае, если это число пограничное между двумя другими интервалами), потом эту часть опять разделил на три части, взял интервал, в котором нет числа a_2, и т.д.: – перебирая все пронумерованные числа, образовал последовательность стягивающихся интервалов (b_i, c_i): $b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq ... \leq c_3 \leq c_2 \leq c_1$. Общая точка (предел) этих интервалов (по мнению Кантора, с которым согласился Дедекинд и вслед за ними многие другие) тогда и представляет собой действительное число, не входящее в пронумерованную последовательность a_1, a_2, ..., a_n, ..., и, таким образом, действительные числа перенумеровать нельзя.

Этот способ доказательства в литературе тоже причисляется к «Диагональному методу», хотя никакой диагонали тут в общем-то не видно.

Чтобы понять сущность этого «доказательства», необходимо сначала промоделировать его на конечных последовательностях, а потом посмотреть, что будет происходить, когда $n \to \infty$. Предположим, что пронумерованная последовательность состоит всего из 9-ти чисел: a_1, a_2, ..., a_9. Тогда на первом шаге процедуры Кантора он разделяет эту последовательность на 3 части (в каждой оказывается, допустим, 3 числа), берет одну часть, в которой нет числа a_1 (допустим, вторую); на втором шаге он разделяет эту часть опять на 3 части (в каждой теперь оказывается только 1 число), берет ту часть, в которой нет числа a_2 (допустим, первую часть, содержащую число a_4); на третьем шаге... Кантор хочет разделить эту часть на три части, но ему уже нечего делить! Процедура останавливается: Кантор перебрал только два числа из девяти, а возможности образования стягивающихся интервалов уже исчерпаны! Это и понятно: ведь в пронумерованной последовательности имеется n чисел, а для проведения процедуры Кантора требуется возможность образования 3^n интервалов.

[109] **В.Э. 2013-01-24:** См. уточнение в §3 Комментария В.Э. к статье «Кантор. Алгебраические числа».

При $n = 9$ (девять элементов в пронумерованной последовательности) Кантор смог охватить своей процедурой лишь 2 элемента или примерно 22 %. Когда n возрастает, доля охваченных элементов всё уменьшается. Так при $n = 27$ он охватит примерно 11 %; при $n = 81$ лишь неполных 5 % и т.д. (Некоторые коррекции вносят случаи, когда деление интервала производится не на равные части, но общий принцип и в таком случае сохраняется). В предельном случае доля охваченных процедурой Кантора элементов среди всех элементов стремится к нулю. (По правилу Лопиталя предел неопределенности $n/3^n$ при $n \to \infty$ есть 0).



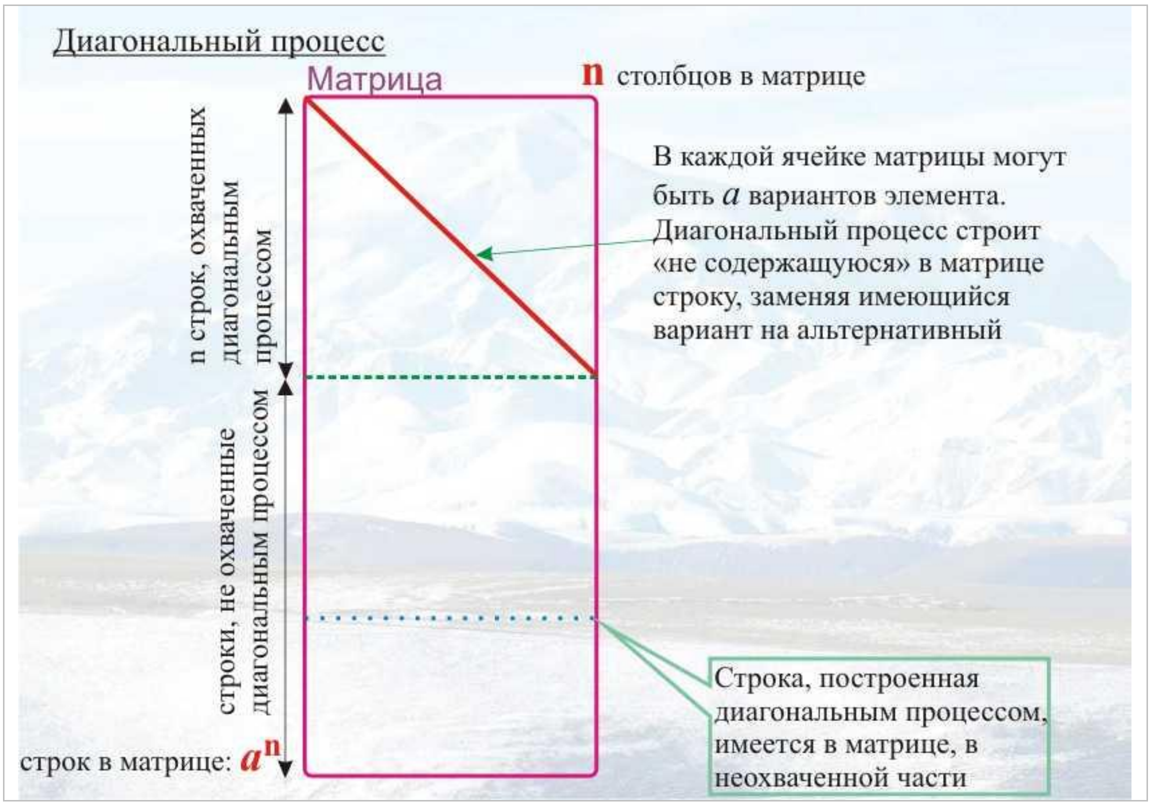
Процедура Кантора может быть проведена до конца только в том случае, если предположить, что при бесконечном n будет иметь место $3^n = n$ (что Кантор на самом деле и предполагает, приняв первоначально, что «все бесконечности одинаковы» по его «1–1 соответствию»). Это его предположение приводит к противоречию: обнаруживается предельный интервал (число), которого нет среди n, находящихся в последовательности a_1, ... a_n. Оно и понятно, потому что на самом деле всегда $3^n > n$. Но вместо простого, логичного и очевидного вывода, что нельзя предполагать, будто $3^n = n$, делается совершенно фантастический и абсурдный вывод о якобы существующей «несчетности» действительных чисел.

Оригинальное доказательство Кантора со стягивающимися интервалами в наше время упоминается редко, а «несчетность действительных чисел» обычно «доказывается» при помощи Диагонального процесса (тоже изобретенного Кантором, но в другой связи).

Диагональный процесс

Диагональный процесс – это процедура, которая проводится в матрице, имеющей ширину n столбцов, а дину a^n строк. Матрица состоит из элементов, имеющих a разновидностей. В начале рассуждения предполагается, что строки матрицы перенумерованы. Далее элементы матрицы перебираются по диагонали: сначала первый элемент первой строки, потом второй элемент второй строки и т.д. Выбранный элемент заменяется на какой-нибудь другой из допустимых a возможностей и далее утверждается, что таким образом построена строка, которой якобы нет в матрице (примеры см. в статьях «Теорема сегмента» и «Теорема отображений»).

При этом опять принимается $a^n = n$. Естественно, так как на самом деле $a^n > n$, то диагональный процесс никогда не охватывает всю матрицу; построенная в диагональном процессе строка ИМЕЕТСЯ в матрице, но только в той её части, которая не была охвачена диагональным процессом. Но кантористы считают, что получили строку, отличную от всех перенумерованных, и вместо естественного вывода о невозможности $a^n = n$ делают фантастический вывод о невозможности перенумеровать строки матрицы.



Диагональный элемент

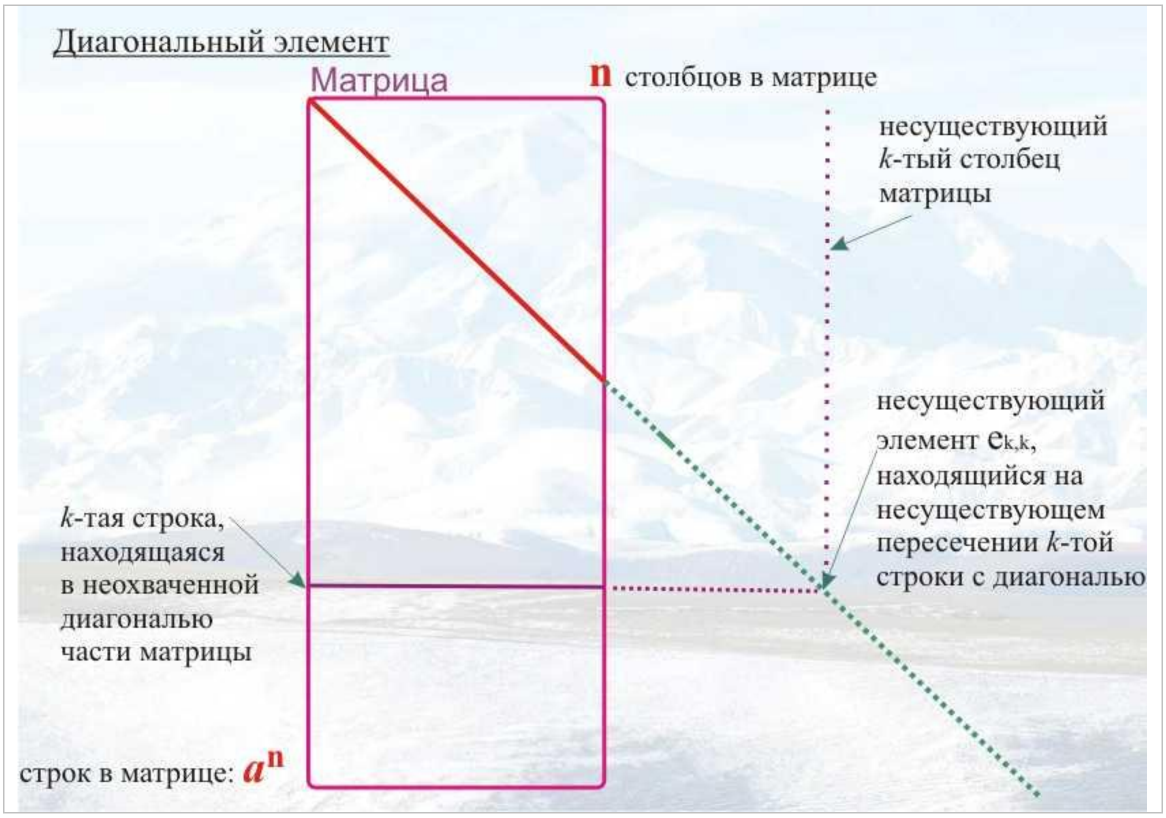
Третья разновидность диагонального метода в некотором роде противоположна предыдущей (Диагональному процессу). Там по диагонали строилась строка, содержащаяся в неохваченной диагональю части матрицы (и утверждалось, что её нет в матрице). Здесь же в такой же матрице берется уже готовая строка из неохваченной диагональю части матрицы (строка k) и далее рассматривается элемент $e_{k,k}$, находящийся на пересечении строки k с диагональю. Так как строка k на самом деле с диагональю не пересекается (и, следовательно, элемент $e_{k,k}$ не существует), то этот элемент $e_{k,k}$ оказывается обладающим парадоксальными или противоречивыми свойствами.

Но опять же из этих противоречий не делается очевидный вывод о том, что неверно предположение, будто $a^n = n$, (и, стало быть, что невозможно пересечение строки k с диагональю и существование элемента $e_{k,k}$), а делаются глобальные выводы совсем в другой области.

На отыскивании элемента $e_{k,k}$ построены рассуждения в Теореме Гёделя, и в этом случае данный элемент представляет собой утверждение о недоказуемости самого этого утверждения в рассматриваемой аксиоматической системе, а глобальный вывод заключается в принципиальной неполноте любой формализованной аксиоматической системы (а в более общей интерпретации: человеческого логического мышления вообще).

На отыскивании элемента $e_{k,k}$ построены также рассуждения в Теореме Тьюринга, и в её случае этот элемент представляет собой «машину Тьюринга» с противоречивыми свойствами, а глобальный вывод состоит в заключении о невозможности машины Тьюринга, решающей «проблему остановки» другой машины Тьюринга.

(В обоих случаях утверждения этих теорем, возможно, и верны, т.е., может быть, действительно всякая формализованная аксиоматическая система не обладает полнотой, и действительно невозможна машина Тьюринга, решающая проблему остановки других машин Тьюринга, но только способ, каким это «доказывается» при помощи Диагонального метода, ни в коем случае нельзя признать удовлетворительным, и эти проблемы требуют другого разбора и другой интерпретации).



Постулат Кантора

Общим для всех трех вариантов Диагонального метода является то, что во всех случаях в исходной точке рассуждений принимается, что при бесконечном n будет иметь место равенство $a^n = n$ и что элементы обоих множеств (a^n и n) можно свободно сопоставлять, поскольку ведь «они оба бесконечны», и разницу в их величине можно не принимать во внимание.

Это стартовое для всех рассуждений (по Диагональному методу) предположение в ВТ называется Постулатом Кантора. Постулат Кантора прямо вытекает из введенного Кантором же понятия взаимно однозначного соответствия (для бесконечных множеств).

Постулат Кантора даже «более постулат», чем многие другие постулаты (например, чем постулаты Эйнштейна в его СТО или чем постулаты ВТ), т.е. по форме и сущности более напоминает постулаты Евклида. Так, например, Третий постулат Евклида звучит: «Требуется, чтобы из всякого центра и всяким раствором можно было описать круг». Точно такую же необходимость в возможности выполнить некоторое действие провозглашает и Постулат Кантора: «Требуется, чтобы каждой строке матрицы можно было сопоставить её столбец» (или, в форме, пригодной также и для Стягивающихся интервалов: «Требуется, чтобы каждому элементу a^n можно было сопоставить элемент n»).

Без выполнения такого требования (т.е. без принятия Постулата Кантора) все рассуждения по Диагональному методу просто не могут быть даже начаты. Ведь если принять альтернативный постулат (что и при бесконечном n останется $a^n > n$) и принимать это обстоятельство во внимание, то все рассуждения Диагонального метода становятся очевидно бессмысленными.

Неодинаковые бесконечности

Таким образом, сущность всего происходящего вокруг Диагонального метода состоит в следующем.

1) Принимается Постулат Кантора, объявляющий, что «в бесконечности» будет иметь место $a^n = n$. Такой постулат противоречит духу всей предыдущей, доканторовской математики, в которой по правилу Лопиталя предел соотношения n / a^n при $n \to \infty$ есть 0 и, следовательно, никакого соответствия между a^n и n установить нельзя. В доканторовской

математике бесконечности не одинаковы, а Постулат Кантора первоначально объявляет их одинаковыми.

2) Однако потом при помощи Диагонального метода (если в силу принятия Постулата Кантора считать его рассуждения состоятельными) оказывается, что бесконечности всё-таки не одинаковы – и начинается построение хитроумного здания из этих всё-таки-не-одинаковых бесконечностей – но не того здания неодинаковых бесконечностей, которое имелось в докантоˆровской математике при правиле Лопиталя, а совсем другого, причудливого и (в отличие от здания докантоˆровских неодинаковых бесконечностей) уже не соответствующего никакой реальности.

В таком случае мы спрашиваем: зачем вообще нужно было принимать Постулат Кантора об одинаковости бесконечностей, если бесконечности всё равно оказываются неодинаковыми? Зачем всё это построение на основе произвольного и явно лишнего (по «Лезвию Оккама») постулата?

Ведь таких произвольных постулатов можно принимать сколько угодно и какие угодно. Можно постулировать, например, что 2/3 русалок белые, а 1/3 голубые, и на этой основе (добавив еще несколько постулатов такого же качества) строить «Теорию русалок». Эта «теория» будет иметь такую же ценность, как и «Канторовская теория множеств» (и с таким же правом считаться – или не считаться – частью математики).

Но задача науки состоит в Минимизации постулатов.

Диагональный метод и ВТ

Несостоятельность Диагонального метода и построенного на его основе Канторизма в общем-то видна и без ВТ (т.е. без привлечения аргументов из области теории интеллекта, представляющего собой продукт информатических систем). Для того, чтобы убедиться в этой несостоятельности, достаточно просто владеть докантоˆровской математикой (в первую очередь правилом Лопиталя) и ставить проблемы четко и ясно. (Канторизм вообще может существовать только при сохранении тумана в рассуждениях).

Однако ВТ дает сильную опору подлинной науке в противостоянии Канторизму. Ведь если интеллект представляет собой работу программ (как это утверждает Второй постулат ВТ), то в интеллекте (и, следовательно, в математике) может существовать только то, что возможно в «мире программ». И состоятельность Диагонального метода в этом мире невозможна.

Веданопедия
Сайт: http://ve-poti.narod.ru/.

Статья «Множество»

Множество – это совокупность любых объектов.

В исходном положении понятие множества в ВТ не отличается от того, которое используется в математике и в других областях, позаимствовавших понятие множества у математики.

Однако дальше начинаются уточнения.

Реалия множества и номиналия множества

Необходимо различать множества, существующие в Физическом, Ментальном и Платоновском мирах.

Если мы рассматриваем «множество всех уток, плавающих в этом пруду», то это множество, естественно, существует в Физическом мире. Однако, когда субъект это множество действительно именно рассматривает, то в его мозге появляется объект, соответствующий этому первоначальному множеству (его номиналия). Этот объект существует уже не в Физическом, а в Ментальном мире. И там, в Ментальном мире, именно эта номиналия и фигурирует в качестве «множества всех уток, плавающих в этом пруду». Именно над ней проводятся все мыслительные операции (а не над самими утками в пруду!), т.е. именно с номиналией работает мозговой компьютер субъекта. Именно номиналия, а не реалия, поставляется в качестве материала для мозговой программы.

Поэтому, если рассуждать о множествах более точно, чем это делается обычно, то необходимо различать реалию множества и номиналию множества. Кроме того, у одной реалии в Ментальном мире субъекта могут существовать несколько номиналий. А реалии множества могут находиться не только в Физическом, но и в Платоновском мире (например, «множество, состоящее из чисел 1, 3, 7»).

Экстенсиональное и интенсиональное определение множества

Далее, нужно различать ситуации, когда субъекту известны все элементы множества (тогда говорим, что для него оно «задано экстенсионально»), и ситуации, когда субъект не знает точного состава элементов множества, но знает признак, по которому можно определить, принадлежит ли объект к данному множеству, или нет (в этом случае говорим, что для субъекта множество «задано интенсионально»), например, «множество ЖМ всех женщин, родившихся в Москве после 00:00 часов 9 мая 1945 года».

При экстенсиональном определении множества номиналия множества в Ментальном мире субъекта будет включать в себя также номиналии всех элементов этого множества.

При интенсиональном определении множества номиналия множества в Ментальном мире субъекта будет содержать в себе не номиналии его элементов, а **программу**, позволяющую определить, принадлежит ли объект данному множеству, или нет. Эта программа, разумеется, имеет свой алгоритм, и именно от этого алгоритма зависит точный состав элементов данного множества.

Пример с множеством ЖМ (Женщин Москвы)

Так, например, для множества ЖМ от алгоритма этой программы (назовем ее $П_{ЖМ}$) будут зависеть решение таких вопросов, как 1) 00:00 часов по какому времени: по московскому, или, может быть, по Гринвичу? 2) где точные границы Москвы для 1945 года, для 1963 года и т.д.? 3) кого считать родившимся: если ребенок не задышал после рождения, то он родился или не родился? 4) что считать женщиной в случае гермафродитизма? 5) и т.д.

В этом случае множество задано программой $П_{ЖМ}$ (или ее алгоритмом, что то же самое); это множество на самом деле является продуктом этой программы: оно «тот объект, который эта программа построит, если отработает» (и действительно по своему алгоритму отберет всех женщин, удовлетворяющих его условиям).

Если программа $П_{ЖМ}$ действительно отработала, перебрала все случаи родов в Москве и в окрестностях с 9 мая 1945 года, и определила точный состав множества ЖМ (после чего оно стало уже задано экстенсионально), то эта программа создала конкретный свой продукт (в Ментальном мире субъекта), и множество ЖМ теперь представляет собой конкретное множество (заданное уже экстенсионально).

Но если эта программа не отработала до конца (а, может быть, лишь эпизодически применяется к тому или иному объекту для определения его принадлежности к ЖМ), то множество ЖМ существует лишь как потенциальный продукт программы $П_{ЖМ}$, как абстрактное множество (и существует, разумеется, в Платоновском мире). С другой стороны, в Физическом мире, конечно, существуют те женщины, которые программа $П_{ЖМ}$ могла бы отобрать, если бы отработала до конца (хотя эти объекты и не известны владельцу программы $П_{ЖМ}$).

Абстрактное и конкретное множество

Таким образом, перед нами теперь уже два объекта, претендующих быть «множеством ЖМ», и мы должны эти объекты различать, если хотим, чтобы наше мышление было точным.

Сохраним название «абстрактное множество ЖМ» для потенциального продукта программы $П_{ЖМ}$, существующего в Платоновском мире идей, а название «конкретное множество ЖМ» для той совокупности конкретных женщин, которое субъекту не известно, но стало бы известным, если программа $П_{ЖМ}$ отработала бы до конца.

Каскады абстрактных множеств

В данном примере материалом для программы $П_{ЖМ}$ служили объекты Физического мира (если быть до конца точными, то, конечно же, не сами объекты, а их номиналии) – программа анализировала случаи родов, рассматривала новорожденных женского пола и т.д. Но в общем случае материалами для программ, определяющих множества, могут служить и потенциальные продукты других программ (т.е., объекты не Физического, а Платоновского мира). Одна программа *A* не отработала, но потенциально имеет продукт $П_A$; другая программа *B* берет этот продукт $П_A$ в качестве своего материала, однако тоже не отработала, но имеет потенциальный продукт $П_B$; третья программа *C* берет этот продукт $П_B$ в качестве своих исходных данных, однако опять не работает, но зато имеет потенциальный продукт $П_C$ ... И так далее до любого этажа.

Продукты $П_A$, $П_B$, $П_C$, ... сами (т.е. их реалии) существуют в Платоновском мире, но они могут быть включены в обработку (в частности, использованы как входные данные для других программ) благодаря тому, что в Ментальном мире существуют их номиналии (которые на самом деле и обрабатываются компьютером субъекта). А создаются эти номиналии путем бокоанализа программ *A*, *B*, *C*, ...

Таким способом создаются всё более и более «абстрактные» множества. Математические (и не только математические) множества любой степени абстрактности создаются именно ТАКИМ образом, и в действительности имеют ЭТУ природу.

Точность рассуждений о множествах

Рассуждения о множествах могут быть до конца точными только тогда, когда эта истинная природа множеств учитывается в этих рассуждениях. В традиционной математике отсутствует понимание этой настоящей природы множеств, и рассуждения проводятся на туманном, расплывчатом уровне. Не различаются реалии и номиналии множеств; не различаются конкретные и абстрактные множества; не рассматриваются программы, задающие множества интенсионально, точные алгоритмы и работа этих программ. (В качестве яркого примера можно привести более чем столетние рассуждения математиков вокруг Парадокса Рассела).

В общем можно сказать, что в традиционной математике рассуждения о множествах проводятся чрезвычайно непрофессионально. Результатом такого непрофессионализма, общей туманности и расплывчатости рассуждений, являются такие абсурдные учения, как Канторизм.

Неопределенное множество

Выше были названы два способа определения множества для субъекта: экстенсиональное и интенсиональное. В первом случае строится номиналия множества, содержащая номиналии всех его элементов; во втором случае строится номиналия множества, содержащая программу, по которой можно определить принадлежность (или непринадлежность) объекта к множеству.

Однако в реальной работе мозговых компьютеров различных субъектов часто встречаются ситуации, когда сперва строится номиналия (множества), не содержащая ни номиналии элементов, ни программы определения принадлежности к множеству. Такая номиналия задает реалию, называемую в ВТ Неопределенным множеством.

Построение Неопределенного множества витосом субъекта отнюдь не всегда является бессмысленным занятием. В дальнейшем Неопределенному множеству (и его элементам) могут приписываться те или иные свойства (например, аксиомами). Сама суть аксиоматического метода состоит в том, что первоначально декларируется существование неопределенных множеств, которым потом аксиомами приписываются какие-то свойства.

Веданопедия
Сайт: http://ve-poti.narod.ru/.

Статья «Парадокс Рассела»

Парадокс Рассела – парадокс (противоречие) в теории множеств, носящий имя английского философа и логика Бертрана Артура Уильяма Рассела (Bertrand Arthur William Russell).

История парадокса

В мае или июне 1901 года этот парадокс увидел 29-летний молодой английский аристократ Рассел, который через 30 лет унаследует титул третьего графа Рассела и место в Палате лордов британского парламента. В 1902 году (22 июня) Рассел написал письмо 54-летнему Фридриху Людвигу Готтлобу Фреге (Friedrich Ludwig Gottlob Frege), автору «Исчисления понятий» (*Begriffsschrift*, 1879) и основателю математического формализма. С этого письма «Парадокс Рассела» вошел в обиход мировой науки, так как они оба опубликовали посвященные парадоксу приложения к своим находящимся уже в печати работам (вышедшим в 1903 году).

В 1908 году 37-летний Эрнст Фридрих Фердинанд Цермело (Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo), публикуя свои новые работы по теории множеств, писал, что «антимония Рассела» была «до 1903 года» (т.е. до публикации Рассела) открыта им самостоятельно и обсуждалась им в Геттингене с разными лицами «и с профессором Гильбертом в том числе». Но непонятно, когда именно это было: до или после обнаружения парадокса Расселом в 1901 году.

Формулировка парадокса

В своем знаменитом письме Рассел указывал Готтлобу Фреге, на парадокс двумя разными способами (в понятиях исчисления предикатов по Фреге и в понятиях множеств). Он писал:

> There is just one point where I have encountered a difficulty. You state (p. 17) that a function too, can act as the indeterminate element. This I formerly believed, but now this view seems doubtful to me because of the following contradiction. Let **w** be the predicate: to be a predicate that cannot be predicated of itself. Can **w** be predicated of itself? From each answer its opposite follows. Therefore we must conclude that **w** is not a predicate. Likewise there is no class (as a totality) of those classes which, each taken as a totality, do not belong to themselves. From this I conclude that under certain circumstances a definable collection [Menge] does not form a totality.

В наши дни Парадокс Рассела обычно формулируется так:

Пусть *R* – множество всех множеств, которые не содержат себя в качестве своего элемента. Содержит ли *R* само себя в качестве элемента? Если да, то, по определению множества *R*, оно не должно быть элементом *R*. Если нет – то, по определению множества *R*, оно должно быть элементом *R*.

Парадокс Рассела произвел большое впечатление на математиков и логиков. Его появление характеризуют такими словами как «конец наивной теории множеств Кантора»; для преодоления парадокса была создана «аксиоматическая теория множеств» Цермело-Френкеля (ZFC).

Объяснение парадокса в ВТ

Парадокс Рассела представляет собой проблему только в том случае, если он рассматривается внутренними средствами логической системы, не прибегая к анализу процесса мышления как работы информатической системы. Если же прибегнуть к такому анализу, то дело обстоит так.

«Парадоксальное» множество *R* – это типичное абстрактное множество, заданное интенсионально (см. статью «Множество»), т.е. определенное программой P_R, работа которой заключается в проверке, содержит ли проверяемый объект (множество) себя в качестве элемента, или нет.

Так как программа P_R строит множество *R* (т.е. помещает в него те объекты, которые не содержат себя в качестве элемента), то в исходном состоянии *R* себя не содержит (программа P_R над ним еще не отработала и не поместила его туда). Поэтому программа P_R, отработав над *R* первый раз, включит его в *R*.

Дальнейшее зависит от точного алгоритма программы P_R. Если он таков, что больше программа P_R принадлежность не проверяет, то *R* так и останется включенным в свой состав.

Если же алгоритм таков, что он после этого снова перепроверяет принадлежность (а именно такой алгоритм соответствует реальному человеческому мышлению), то повторная проверка программой P_R обнаружит, что *R* теперь содержит себя в качестве элемента. Следовательно, программа P_R исключит *R* из его состава. Но перепроверяя это свое действие, она снова обнаружит, что *R* не содержит себя в качестве элемента, и включит его в *R*... И так без конца: будет включать и исключать.

Иными словами: программа P_R просто зациклится.

В этом суть всех «парадоксов» логики: в элементарном зацикливании мозговых программ. (Ср. Парадокс лжеца).

Зацикливание программ следует избегать при программировании, однако само явление зацикливания программ в программистском мире представляет собой явление настолько обыденное и незаурядное, что программистский мир был бы до крайности поражен, если бы кто-то, подобно математикам, 110 лет подряд бурно обсуждал зацикливание какой-то программы, регулярно отмечал юбилеи этого события, и из-за этого начал строить новую теорию программирования.

Сущность парадокса Рассела элементарна.

Приложение № 1. Статья «Парадокс Рассела» в Википедии

Ниже приводится текст статьи «Парадокс Рассела» в русской Википедии, скопированный 2012.01.28. Мои замечания даны в сносках с пометкой «**В.Э.:**».

* * *

Парадокс Рассела – открытый в 1901 году[110] Бертраном Расселом и позднее независимо переоткрытый Э. Цермело теоретико-множественный парадокс, демонстрирующий противоречивость логической системы Фреге, являвшейся ранней попыткой формализации наивной теории множеств Г. Кантора.

Парадокс Рассела формулируется следующим образом:

Пусть *K* – множество всех множеств, которые не содержат себя в качестве своего элемента. Содержит ли *K* само себя в качестве элемента? Если да, то, по определению *K*, оно не должно быть элементом *K* – противоречие. Если нет – то, по определению *K*, оно должно быть элементом *K* – вновь противоречие.

Противоречие в парадоксе Рассела возникает из-за использования в рассуждении внутренне противоречивого[111] понятия *множества всех множеств* и представления о возможности неограниченного применения законов классической логики при работе с множествами.[112] Для преодоления этого парадокса было предложено несколько путей. Наиболее известный состоит в предъявлении для теории множеств непротиворечивой формализации $\mathcal{M}$, по отношению к которой являлись бы допустимыми все «действительно нужные» (в некотором смысле) способы оперирования с множествами.[113] В рамках такой формализации утверждение о существовании *множества всех множеств* было бы невыводимым.

---

[110] *Godehard Link (2004), One hundred years of Russell's paradox, p. 350, ISBN 9783110174380.*

[111] Френкель А.А, Бар-Хиллел И. Основания теории множеств / А.А. Френкель, И. Бар-Хиллел. – М.: Мир, 1966. – С. 17–18.

[112] **В.Э.:** А более точно будет сказать, что в мышлении могут применяться различные алгоритмы определения множеств, в том числе и такие как P_R, приводящие к зацикливанию программы.

[113] **В.Э.:** А на самом деле нет никакой необходимости «преодолевать парадокс Рассела». Ну, знаем мы, что программа в этом случае зацикливается – ну и что? Вполне достаточно просто этого знания, и не надо ничего «формализовать».

Действительно, допустим, что множество *U* всех множеств существует.[114] Тогда, согласно аксиоме выделения, должно существовать и множество *K*, элементами которого являются те и только те множества, которые не содержат себя в качестве элемента. Однако предположение о существовании множества *K* приводит к парадоксу Рассела.[115] Следовательно, ввиду непротиворечивости теории $\mathcal{M}$, утверждение о существовании множества *U* невыводимо в этой теории, что и требовалось доказать.[116]

В ходе реализации описанной программы «спасения» теории множеств было предложено несколько возможных её аксиоматизаций (теория Цермело–Френкеля ZF, теория Неймана–Бернайса–Гёделя NBG и т.д.), однако ни для одной из этих теорий до настоящего момента не найдено доказательства непротиворечивости.[117] Более того, как показал Гёдель, разработав ряд теорем о неполноте, такого доказательства не может существовать (в некотором смысле).

Другой реакцией на открытие парадокса Рассела явился интуиционизм Л.Э.Я. Брауэра.[118]

Варианты формулировок

Существует много популярных формулировок этого парадокса. Одна из них традиционно называется парадоксом брадобрея и звучит так:

Одному деревенскому брадобрею приказали «*брить всякого, кто сам не бреется, и не брить того, кто сам бреется*»[119], как он должен поступить с собой?

Еще один вариант:

В одной стране вышел указ: «*Мэры всех городов должны жить не в своем городе, а в специальном Городе мэров*», где должен жить мэр Города мэров?

И ещё один:

Некая библиотека решила составить библиографический каталог, в который входили бы все те и только те библиографические каталоги, которые не содержат ссылок на самих себя. Должен ли такой каталог включать ссылку на себя?

Литература

Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? – гл. II, § 4.5.

Мирошниченко П.Н. Что же разрушал парадокс Рассела в системе Фреге? // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке. – СПб., 2000. – С. 512–514.

Катречко С.Л. Расселовский парадокс брадобрея и диалектика Платона–Аристотеля // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке. – СПб., 2002. – С. 239–242.

Мартин Гарднер А ну-ка, догадайся! = Aha! Gotcha. Paradoxes to puzzle and delight – М.: Мир, 1984. – С. 22–23. – 213 с.

---

[114] **В.Э.:** Что значит – существует? Это тоже элементарное абстрактное множество, заданное элементарно простым алгоритмом P_U: «Помещать в *U* любое множество, которое встретишь!». Раз есть такой алгоритм, значит, есть его потенциальный продукт (в Платновском мире реалия, а в Ментальном мире номиналия). Зачем запрещать думать о таком алгоритме, зачем утверждать, что его нет? Надо просто отдавать себе ясный отчет в том, что это такое, – и все дела!

[115] **В.Э.:** Ну и что, что приводит? Надо просто видеть два алгоритма (две мозговые программы): P_U и P_R – и всё. Ну вот, есть такие программы, ну и что? В чем проблема?

[116] **В.Э.:** Но лучше ничего не доказывать, а просто видеть две программы P_U и P_R.

[117] **В.Э.:** Аксиоматизация – тупиковый путь в изучении программ. Просто на программы надо смотреть как на программы, а не как на «то, не знаю что».

[118] **В.Э.:** См. статью «Направления математики».

[119] **В.Э.:** Это тоже алгоритм (в данном случае алгоритм поведения для мозга брадобрея). При подаче ему на вход номиналии самого брадобрея программа зацикливается (если делает многократную перепроверку своего решения; если не делает, то – как и в случае с программой P_R – выйдет из цикла, либо побрив, либо не побрив цирюльника – это зависит от деталей алгоритма). Остальные два примера аналогичны: это программы поведения для мэров и для составителей каталога библиотеки. Эти программы тоже в определенных условиях зацикливаются.

Марина Ипатьева. Семантический вакуум

Как свидетельствует многолетний опыт, кантористы – в общем-то люди непорядочные. В этом нет ничего удивительного: все защитники лженаук по самому своему статусу просто обязаны быть непорядочными. Попробуйте защищать ложь честным путем! Ха, ха – ничего не получится! Только прибегая ко всяким уловкам, Вы и можете ложь защищать.

Поэтому ВСЕ приверженцы лженаук ведут себя в той или иной степени непорядочно. Описанные в третьем выпуске нашего Альманаха «медиумы» Евзвпия Палладино и Марджери Крэндон делают фокусы, но лгут, будто здесь происходят паранормальные явления. Лгут «экстрасенсы» и гадалки, лгут «торсионщики» и петрики.

Теоретически защитников лженаук можно подразделить на две категории:

1) те, кто лгут сознательно, хорошо зная, что они лгут;

2) те, кто считают, что они не лгут, а просто придерживаются определенных взглядов («добросовестно заблуждающиеся»).

Однако граница между этими категориями отчетлива лишь в теории; на практике же она расплывчата. Человек может «добросовестно заблуждаться» лишь находясь в полной изоляции. Если же его «добросовестные заблуждения» войдут в соприкосновение с правильным учением, то, чтобы остаться при своем «добросовестном заблуждении», он начнет вилять, изворачиваться, игнорировать сокрушительные для него доводы, будто он их и не слышал и будто их и не было, он начнет заниматься откровенной демагогией, выдумывать всякую чепуху, которая якобы доказывает его правоту, и т.д.

А это уже на самом деле переводит его из категории «добросовестно заблуждающихся» в категорию непорядочных плутов.

Именно таким на протяжении более трех десятилетий был путь всех известных мне кантористов. Начинали они свой путь, может быть, и «добросовестно заблуждающимися», но кончали они неизбежно плутовской демагогией.

Таков был путь первых, кто соприкоснулся с Веданской теорией – латвийских профессоров Карлиса Подниекса и Паулиса Кикуста, и таким же был путь последних, с кем соприкасался Валдис Эгле – путь знаменитого русско-германского математика Юрия Манина и его сына Дмитрия Манина. (Последний является также автором бюллетеня «В защиту науки» – там у него опубликованы три статьи)[120].

Переписка Валдиса Эгле с Дмитрием Маниным опубликована в книгах POTI-1 и POTI-2.[121] Кроме того, мне о ней кое-что известно со слов Валдиса Эгле и вообще от того, что фактически я присутствовала при этом и с самого начала была в курсе дел.

Я приведу и разберу здесь главные моменты этой переписки, поскольку на данный момент она представляет собой «последнее слово» российской (и вообще русскоязычной) науки на критику канторизма.

Дмитрий Манин начал эту переписку со лжи,[122] на всей ее протяженности совершал мелкие пакости,[123] а прекратил Валдис Эгле с ним переписку тогда, когда убедился, что со стороны

---

[120] *Манин Д.Ю.* Семантический вакуум. № 1 (VZN_01); *Манин Д.Ю.* (+*Васильева Н.Л.*) Креационисты с физфака МГУ. № 2 (VZN_02); *Манин Д.Ю.* Наука в кривом зеркале: Лакатос, Фейерабенд, Кун. № 3 (VZN_03).

[121] http://vekordija.narod.ru/R-POTI-1.PDF, http://vekordija.narod.ru/R-POTI-2.PDF.

[122] В.Э. послал к Д.М. свое первое письмо 21 ноября 2010 г. в 13:11, а через неделю, 28 ноября получил ответ, датированный 21 ноября 2010 г. 21:29. Выразив удивление, что электронное письмо шло целую неделю, он получил пояснение Манина, что «Это у меня были с почтой проблемы, письма не отправлялись». Однако В.Э. не очень поверил Манину, что в Калифорнии у сотрудника большой компьютерной компании может целую неделю не работать почта и никто эту аварию не устраняет. Сейчас не начало 1990-х, когда действительно иногда барахлили серверы е-почты; теперь вообще практически таких дефектов не бывает, и даже у нас, в Латвии, когда это последний раз случалось лет 15 назад, это исправляли за одни сутки. Поэтому на 99 % В.Э. был уверен, что Манин подделал дату отправки, а потом в

Манина в ней ничего, кроме демагогии, уже не будет. Отец Дмитрия, Юрий Манин тоже был приглашен принять участие, однако уклонился, но мы были уверены, что переписку он читал и был в курсе дел.

Я опущу все невежливые и капризные выходки Дмитрия Манина и извлеку из его писем только то, что хоть в какой-то степени можно считать аргументами против критики канторизма. Так как за спиной Дмитрия Манина, видимо, стоял его отец Юрий Манин, то это можно считать, так сказать, «точкой зрения русского канторизма».

В первую очередь следует отметить, что Манины (как и подобает лжеученым) полностью игнорировали наиболее убийственные для них моменты критики: аргумент, что диагональный процесс охватывает не все элементы «перенумерованного» множества «действительных чисел», раз длина этих цепочек *n* знаков, а число цепочек 10^n (если система счисления десятичная) или 2^n (при двоичной системе), 15-ю теорему Александрова, которая была специально изложена для них вместе с призывом ее разобрать (этот текст я привожу ниже в этом разделе).

Всё это Манины полностью игнорировали и вели себя так, будто всего этого просто не было. Не было – и всё!

Зато Дмитрий Манин придумывал – не знаю уж, сам или с подсказки отца – разные штучки, которые будто бы подрывают критику канторизма. Вот первое из тех мест в его письмах, которое можно считать возражением.[124]

от Dmitrii Manin <dmanin@ix.netcom.com>
кому Valdis Egle <egle.valdis@gmail.com>
дата 19 февраля 2011 г. 19:51
тема Re: February 16
подписан ix.netcom.com

> Или еще давайте так посмотрим:
>
> Пример 1.
>
> Программа 1 порождает целые числа, программа 2 порождает для каждого из них удвоенное. Они работают с одинаковой скоростью, длина двух рядов в каждый момент одинаковая, все числа сразу ставятся во взаимно-однозначное соответствие. Значит, целых чисел столько же, сколько четных при «зависимой генерации», в противоположность тому, что Вы утверждаете.
>
> Пример 2.
>
> Программа 1 порождает целые числа, программа 2 читает их и нечетные пропускает, а четные делит пополам. Обе порождают целые числа, но ряд, порожденный программой 2 всегда вдвое короче. Следовательно, при «зависимой генерации» по Вашему определению целых чисел вдвое меньше, чем целых чисел. Иначе говоря, множество целых чисел не равномощно самому себе.
>
> Из примера 2 прямо следует, что Ваше определение равномощности – плохое, потому что любое определение должно быть таким, чтобы всякое множество было равномощным самому себе.
>
> – М

Самое главное, что здесь произошло, это подмена Маниным одной темы, одного предмета другой темой, другим предметом.

Мы в своей критике канторизма утверждаем: «Если взять (сгенерированное какой-нибудь программой) множество натуральных чисел и отобрать (другой программой) из них четные

ответ на вопрос – солгал. В.Э. также подозревал, что Манин, работая в американской, калифорнийской компьютерной компании, имел доступ к почтовому ящику В.Э., расположенному на сервере американской, калифорнийской компьютерной компании *Google*. Основанием для такого подозрения были следующие обстоятельства. Манин на первое письмо не отвечал целую неделю. Тогда В.Э. написал второе письмо, содержание которого было примерно таким, что «Ваше право согласиться или не согласиться с моим предложением обсудить данный вопрос, но ответить и сообщить о Вашем решении-то можно? Не отвечать вообще – это невежливость и неуважение к другому человеку». В.Э. написал это второе письмо, однако его НЕ отправил – оно осталось в черновиках почтового ящика. Но Манин через несколько часов отреагировал так, будто он это второе письмо прочитал, и сразу ответил, но – задним числом, письмом, датированным на неделю раньше. Эти странные обстоятельства – не встречающиеся ни с кем другим в многочисленных переписках В.Э. – и заставили его подозревать, что Манин подделал дату письма, а потом солгал при объяснении причин задержки. Но, разумеется, стопроцентных доказательств такого варианта не было и не могло быть.

[123] Например, упорно писал имя В.Э. неправильно: «Вальдис», хотя имел перед глазами и книги и многие тексты с правильным написанием.

[124] Книга POTI-2, стр. 25–26.

числа, то их будет в два раза меньше, чем исходных. Это пример зависимой генерации или Взгляд 1».

Мы не интересуемся (и ничего по этому поводу не утверждаем), можно ли генерирующие программы поставить в другие взаимные отношения (конечно, можно). Нам пример с четными числами нужен для сравнения с другими случаями зависимой генерации, например, когда над множеством генерируется множество всех его подмножеств (см. множество *S* выше в Приложении 1 к статье Даубена или см. ниже множество отображений в 15-й теореме Александрова).

Дмитрий Манин то ли читает материал слишком поверхностно, чтобы понять суть дела, то ли намеренно прикидывается дурачком, но только он начинает вести разговор не по существу дела. В его письме всё перекошено; вместо того, чтобы просто понять разницу между зависимой и независимой генерацией, усвоить ее и в дальнейшем не путать и различать эти два вида, – вместо этого он поворачивает дело так, будто мы предлагаем какое-то новое определение соответствия (да еще и равномощности!) и радостно спешит объявить: «*Ваше определение равномощности – плохое, потому что любое определение должно быть таким, чтобы всякое множество было равномощным самому себе*».

Да не определяли мы никакую равномощность, и плевать нам на ваше (ваше!) «взаимно однозначное соответствие»; это Кантор всё придумал, а мы только показываем, что придумал он путаницу.

И вот такое вот извращение сути дела чрезвычайно характерно для кантористов; все они так делали, и никто из них до сих пор не отвечал по существу тех вопросов, которые перед ними ставились. (Да это и понятно: ну что они могут ответить по существу? Против истины не попрешь – тем более, против математической истины).

В ответ на это письмо (после некоторого разъяснения дела, менее резкого и менее жесткого, чем это сейчас сделала я) В.Э. еще раз преподнес Дмитрию Манину 15-ю теорему Александрова и прямо призвал его: «Вот Вам мишень для атаки – ЭТО оспорьте!»[125]

Но не тут-то было!

Дмитрий Манин большими большими кругами бегал по сторонам, лишь бы не прикоснуться к 15-й теореме Александрова (ну, а отец его, Юрий Манин, тот вообще сидел глубоко в кустах спрятавшись).

Круги эти привели к Алгоритму А и к сопоставлению натуральных чисел с действительными числами интервала между 0 и 1. Тут Манин выдвинул вторую из тех вещей, которые можно назвать возражением.

от Dmitrii Manin <dmanin@ix.netcom.com>
кому Valdis Egle <egle.valdis@gmail.com>
дата 2 марта 2011 г. 7:42

> ...Ни одно сгенерированное Вашим процессом число не будет, например, точно квадратным корнем из половины. Значит, Вы перенумеруете не все числа.

И тут началась обычная свистопляска кантористов.

«Алгоритм А не генерирует бесконечных последовательностей».

«Хорошо», соглашается В.Э., «пусть не генерирует. А индивидуальный алгоритм I, который генерирует только одну последовательность, скажем, дробную часть π, он генерирует бесконечную последовательность или нет?»

«Нет», отвечает Манин (ну, слава богу, хоть в этом последователен, а то были до него и такие кантористы, которые утверждали, что А не генерирует бесконечных последовательностей, а I генерирует).

Ну, тут В.Э. констатирует, что Манин, значит, придерживается конструктивистских взглядов и не признает актуальной бесконечности. Что ж, это вполне приемлемая и непротиворечивая (только анти-кантористская!) позиция.

Но тут Дмитрий Манин восклицает:

[125] POTI-2, стр. 31.

> «Наверное, можно строить такую математику, но это будет жутко неудобно. Представьте: обходиться без π, без e. Синус 30 градусов существует, а косинус почему-то нет. Длина диагонали единичного квадрата не существует. Кошмар».

При этом можно так понять, что он упрекает НАС, что МЫ строим такую математику! (Блеск манинской логики! – но как уловка кантористов она – типична: свои проблемы и промахи немедленно приписывать противнику).

Мы-то признаем актуальную бесконечность. Точнее так: мы способны рассуждать и в такой системе понятий, когда актуальная бесконечность не признается, и в такой, когда она признается.

Если актуальной бесконечности НЕ признавать, то получается только что декларированный Маниным мир: «без π, без e» и т.д. (точнее, π и e существуют лишь как потенциальные пределы, к которым стремятся определенные процессы). Тогда, конечно, и алгоритм A, и алгоритм I генерируют только конечные последовательности. (Ну, и тогда, разумеется, всё учение Кантора летит в мусорник).

Если же актуальную бесконечность мы признаем, то все бесконечные процессы завершаются, и их продукты считаются существующими и данными. Тогда алгоритм I генерирует бесконечную последовательность π, а алгоритм A генерирует все такие последовательности.

Для Дмитрия Манина (да и для всех кантористов вообще) характерна абсолютная неспособность к четкому логическому мышлению. Он непрерывно прыгает из одной системы понятий в другую и обратно, и эти его прыжки и извивания призваны создать лазейку для оправдания канторизма. Однако если ему начать объяснять, что такое логика и логическое мышление, то он переходит к оскорблениям. (Они многочисленны в письмах Манина – не высшей степени грубости, не откровенная ругань, но – достаточно грубые и неуважительные).

* * *

До этого места я в начале сентября написала посвященное Маниным сочинение. Теперь прошло около двух месяцев, и из головы уже почти выветрился тогдашний план окончания этого текста. Не буду его восстанавливать. В принципе основное сказано, и каждый может сам прочитать ВСЮ переписку В.Э. с Дмитрием Маниным. Манин никак не мог придти к какому-нибудь законченному и непротиворечивому взгляду о бесконечности, а любые объяснения В.Э. отбрасывал с криком о «стоге сена».

Фактически Манину требовалось только одно: словесная формула «Кантор прав!», и когда эта формула не получалась, то это приводило его в раздражение.

И младший Манин (Дмитрий), и старший Манин (Юрий) всеми силами избегали разговора по существу главных предложенных им вопросов – и тем самым проявили себя интеллектуальными трусами и людьми непорядочными.

Нас теперь больше Маниных интересуют ответы других математиков на материалы настоящего сборника. Но, тем не менее, я даю возможность также и Маниным исправить положение и проявить себя в лучшем свете, чем они это сделали в 2011 году.

Господа Манины! – младший и старший! – если вы на это способны! – если вы вообще способны на какую-то интеллектуальную деятельность! – тогда пришлите мне письменный ответ на аргументацию этого сборника **по существу** (!!!) разобранных здесь вопросов – и я ваш ответ опубликую в своем Альманахе!

А в заключение я привожу здесь ниже тот текст о Пятнадцатой теореме Александрова, который Валдис Эгле предлагал вам в феврале 2011 года и от которого вы оба (оба!) трусливо сбежали!

Марина Ипатьева

1 ноября 2013 года

Теорема, предложенная Маниным в феврале 2011 года

Книга R-POTI-2, стр. 29–33, текст Валдиса Эгле.

...

Теперь я воспользуюсь случаем и приведу эту теорему еще раз – теперь уже, во-первых, в полном виде, а, во-вторых, буду «вмешиваться» в нее и показывать ошибку.

Ничего страшного нет в том, что я даю ее вторично – это поистине ключевая теорема Канторовской теории множеств, всё равно что теорема Пифагора для геометрии. До этой теоремы Александров доказывает одну за другой много теорем, и во всех результат один – и такое, и такое, и этакое множество «счетны», т.е. равномощны с множеством натуральных чисел.[126] А здесь впервые (!) появляется множество, которое не счетно, т.е. («по-ихнему») превосходит счетное множество по «мощности», т.е. по количеству элементов!

И вот, если окажется, что на самом-то деле никакой превосходящей «мощности» нет, то и не начинается никакое построение всех дальнейших зданий, – а просто продолжается предыдущий серый ряд: все множества «счетны», «равномощны» и т.д.

Поэтому данная теорема поистине ключевая: от нее зависит, начнется канторовская стройка, – или не начнется. Так что не пожалеем еще немножко места и времени на столь важный вопрос!

Вот эта теорема, теперь с моими комментариями; разбираем ее на примере, когда X = {1, 2, 3, 4}, Y = {a, b}, а Y^X изображено на Рис.5 (но при этом, разумеется, имеем в виду и общий случай):

§19. Пятнадцатая теорема Александрова

Теорема 15. Пусть X и Y – два произвольных непустых множества, удовлетворяющих тому единственному условию, чтобы Y состояло более чем из одного элемента. Множество всех различных отображений множества X в множество Y имеет мощность большую, чем мощность множества X.

При этом мы, естественно, считаем два отображения f_1 и f_2 множества X в множество Y различными, если по крайней мере для одного элемента $x \in$ X элементы $f_1(x)$ и $f_2(x)$ множества Y различны между собою.

Доказательство. Обозначим через Y^X множество всех отображений множества X в множество Y. В соответствии с определением неравенства мощностей мы должны доказать два утверждения:

1) Существует взаимно однозначное отображение множества X на некоторое подмножество множества Y^X.

2) Не существует взаимно однозначного отображения множества X на всё множество Y^X.

Для доказательства первого утверждения[127] выберем в множестве Y два каких-нибудь различных элемента y' и y'' и для каждого элемента x_0 множества X построим отображение fx_0

---

[126] Теорема 1. «Всякая часть счетного множества есть либо конечное, либо счетное множество». Теорема 2. «Сумма конечного или счетного числа конечных или счетных множеств есть конечное или счетное множество». Теорема 3. «Всякое бесконечное множество M содержит счетное подмножество». Теорема 5. «Присоединяя к бесконечному множеству A счетное или конечное множество B, получим множество $A \cup B$, эквивалентное множеству A». Теорема 7. «Множество P всех пар натуральных чисел счетно». Теорема 8. «Множество всех рациональных (т.е. целых и дробных) чисел счетно». Теорема 9. «Множество S всех конечных последовательностей, составленных из элементов данного счетного множества D, есть счетное множество». Теорема 10. «Множество всех рациональных точек n-мерного пространства счетно». Теорема 11. «Множество всех многочленов $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ с рациональными коэффициентами счетно». Теорема 12 (Кантор). «Множество всех алгебраических чисел счетно».

[127] **В.Э.:** Эту первую часть доказательства теоремы мы можем пропустить, так как не вызывает сомнений, что можно (взаимно однозначно) отобразить множество X на часть множества Y^X.

множества X в множество Y следующим способом: образ данного элемента x_0 при отображении fx_0 есть $fx_0(x_0) = y'$, а образ всякого отличного от x_0 элемента $x \in X$ при отображении fx_0 есть $fx_0(x) = y''$. Различным элементам x_1, x_2 множества X соответствуют различные отображения; в самом деле

$$fx_1\,(x_1) = y'$$
$$fx_2\,(x_1) = y''.$$

Итак, нами установлено взаимно однозначное соответствие между множеством X и частью множества Y^X.

Докажем теперь, что не существует никакого взаимно однозначного соответствия между множеством X и множеством Y^X.[128]

Предположим, что такое соответствие существует, и обозначим через $f^{\,\xi}$ тот элемент множества Y^X, который в силу этого соответствия отвечает элементу ξ множества X.[129] Искомое противоречие мы получим, если найдем элемент f множества Y^X, отличающийся от всех f^{ξ}.

Такой элемент f, т.е. такое отображение множества X в множество Y, мы построим следующим образом. Рассмотрим произвольный элемент ξ множества X; образ этого элемента при отображении f^{ξ} есть элемент $f^{\xi}(\xi)$ множества Y. Определим теперь $f\,(\xi)$, положив $f\,(\xi) = \eta$, где η – произвольный элемент множества Y, выбранный под единственным условием, чтобы он был отличен от элемента $f^{\,\xi}(\xi)$[130] (это условие всегда выполнимо, так как, по предположению, множество Y содержит по крайней мере два элемента).

Мы утверждаем, что отображение f отлично от всех отображений $f^{\,\xi}$.[131] В самом деле, если бы f совпадало с некоторым определенным f^{ξ}, то, в частности, для элемента $\xi \in X$ мы имели бы

$$f(\xi) = f^{\xi}(\xi),$$ [132]

вопреки определению отображения f. Теорема этим доказана.

Замечание 1. Только что изложенная теорема, принадлежащая к числу замечательнейших предложений теории множеств, доказана, и притом приведенным здесь методом, основателем теории множеств Кантором. Самый этот метод доказательства известен под названием канторова диагонального процесса.

* * *

Итак, Дмитрий Юрьевич, видите, для чего нужны «зависимая генерация» и «независимая генерация» и их до-веданские прототипы «Взгляд 1» и «Взгляд 2».

Переведите глаза на рисунке 5 с одной таблицы на другую и обратно: чик – чик! чик – чик! чик – чик!... Щелкает тумблер: либо Взгляд 1 (и тогда Y^X действительно больше, чем X, но и другие множества тоже больше – или меньше), либо Взгляд 2 (и тогда Y^X ни черта не больше X, и нет тогда никаких канторовских каскадов бесконечностей, и все бесконечные множества равномощны и одинаковы как серенькие мышки!).

Вот Вам мишень для атаки – ЭТО оспорьте!

И еще один момент. Обратите внимание, что в формулировке 15-й теоремы Александрова не оговаривается, что речь идет о бесконечных множествах. (Единственное условие: чтобы Y имело минимум 2 элемента). Стало быть, всё это рассуждение и доказательство одинаково действует как на конечные, так и на бесконечные множества, и пример, изображенный на Рис.5 – вполне законный частный случай теоремы. И то превосходство в числе элементов Y^X над X, которое мы в Таб.2 видим непосредственно визуально, – это превосходство здесь, в 15-ой теореме, доказывается диагональным процессом.

---

[128] **В.Э.:** То есть, что не существует ситуации, изображенной на Рис.5 в Таблице 3.

[129] **В.Э.:** Ну, например, если $\xi = 8$, то $f^{\,\xi} = \{1–a, 2–b, 3–b, 4–b\}$, т.е. при этом отображении 1 отображается на *a*, а 2, 3 и 4 – на *b*.

[130] **В.Э.:** Ну, в нашем примере, значит, меняем местами *a* и *b*.

[131] **В.Э.:** А зря утверждаете: на Рис.5 Таб.3 же видно, что диагональный процесс не построил такого отображения *f*, которое не соответствовало бы ни одному X.

[132] **В.Э.:** То есть, в нашем примере, когда $\xi = 8$, речь идет о 8-й паре *x–y*, а такой пары вообще не существует; их всего 4. Следовательно, теорема не может считаться доказанной, если мы держимся «независимой генерации» (или Взгляда 2 – канторовского взгляда, между прочим!). Что же, попытаемся в таком случае интерпретировать это доказательство для варианта «зависимая генерация» (или Взгляда 1): см. Рис.5 Таб.2. Да – теперь не существует взаимно-однозначного соответствия между множеством X и множеством Y^X (это и на глаз видно, что Y^X длиннее чем X). Но только это ведь та точка зрения, для которой и множество XY больше, чем X, и (положительных) четных чисел меньше, чем натуральных. Утверждение теоремы можно считать верным только тогда, если перескочить на Взгляд 1.

Таблица 2. (Зависимая генерация)		
Y	X	Y^X
a	1	**1–a** 2–a 3–a 4–a
b	2	1–a **2–a** 3–a 4–b
	3	1–a 2–a **3–b** 4–a
	4	1–a 2–a 3–b **4–b**
		1–a 2–b 3–a 4–a
		1–a 2–b 3–a 4–b
		1–a 2–b 3–b 4–a
		1–a 2–b 3–b 4–b
		1–b 2–a 3–a 4–a
		1–b 2–a 3–a 4–b
		1–b 2–a 3–b 4–a
		1–b 2–a 3–b 4–b
		1–b 2–b 3–a 4–a
		1–b 2–b 3–a 4–b
		1–b 2–b 3–b 4–a
		1–b 2–b 3–b 4–b

Таблица 3. (Независимая генерация)		
Y	X	Y^X
a	1	**1–a** 2–a 3–a 4–a
b	2	1–a **2–a** 3–a 4–b
	3	1–a 2–a **3–b** 4–a
	4	1–a 2–a 3–b **4–b**
	5	1–a 2–b 3–a 4–a
	6	1–a 2–b 3–a 4–b
	7	1–a 2–b 3–b 4–a
	8	1–a 2–b 3–b 4–b
	9	1–b 2–a 3–a 4–a
	10	1–b 2–a 3–a 4–b
	11	1–b 2–a 3–b 4–a
	12	1–b 2–a 3–b 4–b
	13	1–b 2–b 3–a 4–a
	14	1–b 2–b 3–a 4–b
	15	1–b 2–b 3–b 4–a
	16	1–b 2–b 3–b 4–b

Рис.5. Два варианта при установлении «факта», что множество Y^X превосходит по мощности множество X: либо **1)** мы пользуемся Взглядом 1 (возможно, интерпретированным как «зависимая генерация»), и тогда диагональный процесс создает новый элемент, не соответствующий ни одному X; либо **2)** мы пользуемся Взглядом 2 (возможно, интерпретированным как «независимая генерация»), и тогда диагональный процесс не создает нового элемента, который не соответствовал бы ни одному X.

Этот факт особенно отчетливо показывает, что Александров (и прочие математики, разумеется), сейчас находятся в области Таблицы 2 (а не Таблицы 3!) и рассуждают в рамках «зависимой генерации» (Взгляда 1 – некантороского взгляда!).

Если бы они последовательно находились в области Таблицы 3 («независимой генерации или Взгляда 2), то там просто вступили бы в силу те аргументы, о которых я говорил в §11.1 и §12 – о том, что n и 2^n не могут быть[133] одинаковыми бесконечностями и поэтому диагональный процесс провести невозможно. Но они не находятся в области Таблицы 3; они диагональным процессом доказывают ту истину, которая нам «интуитивно» ясна из соображений Взгляда 1!

И поэтому я вынужден акцентировать разделение Взгляда 1 и Взгляда 2 (или «зависимой генерации» и «независимой генерации») и фиксировать перескакивание математиков с одного взгляда на другой или, иными словами, логическую ошибку *Homonymia*.

А если они в 15-ой теореме о множестве отображений Y^X рассуждают в рамках Взгляда 1, то почему они в теореме 7 (о парах натуральных чисел), в теореме 8 (о множестве всех рациональных чисел), в теореме 9 (о всех конечных последовательностях), в теореме 10 (о рациональных точках n-мерного пространства), в теореме 11 (о многочленах с рациональными коэффициентами), в теореме 12 (об алгебраических числах) – почему они во всех этих местах тоже не рассуждают в рамках Взгляда 1?

Почему?

При этом взгляде (Взгляде 1) там тоже получится превосходящая мощность!

А при Взгляде 2 и у Y^X нет превосходящей мощности (так как диагональный процесс в этом случае не проходит; он проходит только при Взгляде 1).

§20. Объективная математическая истина у Кантора

То, что математики дальше строят после «золотой» 15-й (по Александрову) теоремы и ей подобных (выводы о том, что якобы существует мощность континуума и другие, еще бóльшие мощности, что якобы трансцендентных чисел неизмеримо больше, чем алгебраических и всё такое в этом духе), – всё это претендует на то, что оно является объективной математической

[133] 2^n в случае, когда Y состоит из двух элементов; если же Y состоит из y элементов, то будет y^n.

истиной такого же порядка, как, скажем, математические факты, что площадь круга $S = \pi R^2$ или объем шара $V = 4/3\ \pi R^3$.

Эти последние факты существуют в (объективном!) «платоновском мире» {PENRO2.VE2}, а те «факты», которые якобы обнаруживаются после канторовской «золотой теоремы», в платоновском мире НЕ существуют.

Но что же в платоновском мире существует реально в том месте, где должны были находиться все эти канторовские за́мки? А находится там некоторое объективно существующее различие в структуре элементов множеств. Эти различия в некоторых случаях позволяют диагональный процесс запустить (уж чем бы он ни кончился), а в других случаях не позволяет.

Таблица 4.		
X	**Y**	**XY**
1	1	**1**–1
2	2	1–**2**
3	3	2–1
		1–3
		2–2
		3–1
		3–2
		2–3
		3–3

Возьмем, например, 10-ую теорему Александрова («Множество всех рациональных точек *n*-мерного пространства счетно»). Упростим ее: вместо рациональных точек возьмем натуральные точки, размерность возьмем $n = 2$, и посмотрим всё это на конечном примере, аналогично тому, как мы это делали с множеством Y^X в Таблице 2 и Таблице 3. (Это изображено в Таблице 4; в множестве XY элементы расположены в порядке возрастания «высоты пары», как это делалось Александровым для теоремы 7: «Множество P всех пар натуральных чисел счетно»).

Таблица 5.			
X	**Y**	**Z**	**XYZ**
1	1	1	**1**–1–1
2	2	2	2–**1**–1
3	3	3	1–2–**1**
			1–1–2
			2–2–1
			2–1–2
			1–2–2
			3–1–1
			1–3–1
			1–1–3
			. . . .
			3–3–3

Попытаемся теперь (точно так же, как это делалось в 15-ой теореме для конечного случая множества Y^X) при помощи диагонального процесса доказать, что мощность множества XY больше мощности множества X, и что между ними «*не существует никакого взаимно-однозначного соответствия*» (формулировка из доказательства 15-ой теоремы).

Диагональный процесс не удается: не хватает длины в элементах множества XY. Элементов в XY, конечно, больше, чем в X, как и в случае с Y^X, а вот длины элемента не хватает, чтобы можно было с триумфом объявить, что построен элемент, которого нет среди пронумерованных по X.

Возьмем три размерности для нашего (вырожденного) пространства. Это изображено в таблице 5. Теперь у нас диагональный процесс даже и удается! Но это, разумеется, только для конечного примера, когда в каждой размерности лишь три точки.

Вот эти различия в структурах элементов, то позволяющие, то не позволяющие запустить диагональный процесс, – эти различия и есть то объективное, что реально скрывается за построениями Кантора. И если теория множеств хочет не строить «воздушные замки», а действительно изучать математическую реальность платоновского мира, то именно эти различия структуры элементов и должны в ней фигурировать.

Но это будет уже совсем другая теория множеств.

Роджер Пенроуз. Четыре главы двух книг

В этот раздел мы помещаем четыре параграфа из двух книг английского математика Роджера Пенроуза, в которых он касается канторовского диагонального процесса и которые, соответственно, богато снабжены комментариями Валдиса Эгле в его перепечатках этих книг.

§2.5. Семейства вычислений; следствие Гёделя–Тьюринга $\mathcal{G}$

Роджер Пенроуз. «Тени Разума»; http://vekordija.narod.ru/R-PENRS1.PDF, стр. 71–80.

Для того, чтобы понять, каким образом из теоремы Гёделя (в моей упрощенной формулировке, навеянной отчасти идеями Тьюринга) следует всё вышесказанное, нам необходимо будет сделать небольшое обобщение для типов утверждений, относящихся к рассмотренным в предыдущем разделе вычислениям. Вместо того чтобы решать проблему завершаемости для каждого отдельного вычисления ((A), (B), (C), (D) или (E)), нам следует рассмотреть некоторое общее вычисление, которое зависит от натурального числа *n* (либо как-то воздействует на него). Таким образом, обозначив такое вычисление через *C*(*n*), мы можем рассматривать его как целое семейство вычислений, где для каждого натурального числа (0, 1, 2, 3, 4,...) выполняется отдельное вычисление (соответственно, (*C*(0), *C*(1), *C*(2), *C*(3), *C*(4), ...), а сам принцип, в соответствии с которым вычисление зависит от *n*, является целиком и полностью вычислительным.

В терминах машин Тьюринга это всего лишь означает, что *C*(*n*) есть действие, производимое некоей машиной Тьюринга над числом *n*. Иными словами, число *n* наносится на ленту и подается на вход машины, после чего машина самостоятельно выполняет вычисления. Если вас почему-либо не устраивает концепция «машины Тьюринга», вообразите себе самый обыкновенный универсальный компьютер и считайте *n* «данными», необходимыми для работы какой-нибудь программы.[134] Нас в данном случае интересует лишь одно: при любом ли значении *n* может завершиться работа такого компьютера.

Для того, чтобы пояснить, что именно понимается под вычислением, зависящим от натурального числа *n*, рассмотрим два примера.

(F) Найти число, не являющееся суммой квадратов *n* чисел,

и

(G) Найти нечетное число, являющееся суммой *n* четных чисел.

Припомнив, о чем говорилось выше, мы без особого труда убедимся, что вычисление (F) завершается только при *n* = 0, 1, 2 и 3 (давая в результате, соответственно, 1, 2, 3 и 7), тогда как вычисление (G) вообще не завершается ни при каком значении *n*. Вздумай мы действительно доказать, что вычисление (F) не завершается при *n*, равном или большем 4, нам понадобилась бы более или менее серьезная математическая подготовка (по крайней мере, знакомство с доказательством Лагранжа); с другой стороны, тот факт, что ни при каком *n* не завершается вычисление (G), вполне очевиден. Какими же процедурами располагают математики для установления незавершаемой природы таких вычислений в общем случае? Можно ли сами эти процедуры представить в вычислительной форме?

Предположим, что у нас имеется некая вычислительная процедура *A*, которая по своем завершении[135] дает нам исчерпывающее доказательство того, что вычисление *C*(*n*) действительно никогда не заканчивается. Ниже мы попробуем вообразить, что *A* включает в себя все известные

---

[134] **В.Э.:** Хорошо! Вот так и сделаем – и посмотрим, что тут выйдет. Итак *C* – это просто PROCEDURE, скажем, языка PASCAL, а на входе у нее один параметр: *n*. (И никаких машин Тьюринга!)

[135] Здесь я предполагаю, что если процедура *A* вообще завершается, то это свидетельствует об успешном установлении факта незавершаемости *C*(*n*). Если же *A* «застревает» по какой-либо иной, нежели достижение «успеха», причине, то это означает, что в данном случае процедура *A* корректно завершиться не может. См. далее по тексту возражения Q3 и Q4, а также Приложение А, с. 193.

математикам процедуры,[136] посредством которых можно убедительно доказать, что то или иное вычисление никогда не завершается. Соответственно, если в каком-то конкретном случае завершается процедура *A*, то мы получаем, в рамках доступного человеку знания, доказательство того, что рассматриваемое конкретное вычисление никогда не заканчивается. Большая часть последующих рассуждений не потребует участия процедуры *A* именно в такой роли, так как они посвящены, в основном, математическим умопостроениям. Однако для получения окончательного заключения $\mathcal{G}$ нам придется-таки придать процедуре *A* соответствующий статус.

Я, разумеется, не требую, чтобы посредством процедуры *A* всегда можно было однозначно установить, что вычисление $C(n)$ нельзя завершить (в случае, если это действительно так); однако я настаиваю на том, что неверных ответов *A* не дает, т.е. если мы с ее помощью пришли к выводу, что вычисление $C(n)$ не завершается, значит, так оно и есть. Процедуру *A*, которая и в самом деле всегда дает верный ответ, мы будем называть обоснованной. Следует отметить, что если процедура *A* оказывается в действительности необоснованной, то этот факт, в принципе, можно установить с помощью прямого вычисления – иными словами, необоснованную процедуру *A* можно опровергнуть вычислительными методами. Так, если *A* ошибочно утверждает, что вычисление $C(n)$ нельзя завершить, тогда как в действительности это не так, то выполнение самого вычисления $C(n)$ в конечном счете приведет к опровержению *A*. (Возможность практического выполнения такого вычисления представляет собой отдельный вопрос, его мы рассмотрим в ответе на возражение Q8.)

Для того, чтобы процедуру *A* можно было применять к вычислениям в общем случае, нам потребуется какой-нибудь способ маркировки различных вычислений $C(n)$, допускаемый *A*. Все возможные вычисления *C* можно, вообще говоря, представить в виде простой последовательности

$$C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, \ldots,$$ [137]

т.е. q-е вычисление при этом получит обозначение C_q. В случае применения такого вычисления к конкретному числу n будем записывать

$$C_0 (n), C_1 (n), C_2 (n), C_3 (n), C_4 (n), C_5 (n), \ldots.$$ [138]

Можно представить, что эта последовательность задается, скажем, как некий пронумерованный ряд компьютерных программ. (Для большей ясности мы могли бы, при желании, рассматривать такую последовательность как ряд пронумерованных машин Тьюринга, описанных в НРК; в этом случае вычисление $C_q(n)$ представляет собой процедуру, выполняемую q-й машиной Тьюринга T_q над числом n.) Здесь важно учитывать следующий технический момент: рассматриваемая последовательность является вычислимой – иными словами, существует одно-единственное[139] вычисление $C_\bullet$, которое, будучи выполнено над числом q, дает в результате C_q, или, если точнее, выполнение вычисления $C_\bullet$, над парой чисел q, n (именно в таком порядке) дает в результате $C_q (n)$.[140]

Можно полагать, что процедура *A* представляет собой некое особое вычисление, выполняя которое над парой чисел q, n, можно однозначно установить, что вычисление $C_q (n)$, в конечном итоге, никогда не завершится. Таким образом, когда завершается вычисление *A*, мы имеем достаточное доказательство того, что вычисление $C_q (n)$ завершить невозможно. Хотя, как уже говорилось, мы и попытаемся вскоре представить себе такую процедуру *A*, которая формализует все известные современной математике процедуры, способные достоверно установить невозможность завершения вычисления, нет никакой необходимости придавать *A* такой смысл прямо сейчас. Пока же процедурой *A* мы будем называть любой обоснованный набор вычислительных правил, с помощью которого можно установить, что то или иное вычисление $C_q (n)$ никогда не

---

136 **В.Э.:** В этом месте рассуждение Пенроуза, до сих пор достаточно ясное, теряет под собой почву реальности. Что это за процедура *A*, которая «*включает в себя все известные математикам процедуры*»? Я как программист привык рассуждать о таких программах, которые я (хотя бы в принципе) могу написать. Но эту *A* не может написать никто – ни я, ни кто другой. Поэтому рассуждения уже пошли о несуществующем объекте. Но, ладно – посмотрим, что будет дальше.

137 **В.Э.:** Так, стало быть, здесь он нумерует различные процедуры языка Паскаль, которые каждая делает свою работу: процедура C0, процедура C1, процедура C2 и т.д.

138 **В.Э.:** То есть, всем этим процедурам подаем на вход одно и то же число.

139 Собственно, точно такой же результат достигается посредством процедуры, выполняемой универсальной машиной Тьюринга над парой чисел q, n; см. Приложение А и НРК, с. 51–57.

140 **В.Э.:** Это сказано туманно, но, видимо, подразумевается, что если мы многократно обратимся к C_q, то это всегда будет одна и та же программа.

завершается. Поскольку выполняемое процедурой *A* вычисление зависит от двух чисел *q* и *n*, его можно обозначить как *A* (*q*, *n*) и записать следующее утверждение:

(H) Если завершается *A* (*q*, *n*), то C_q (*n*) не завершается.

Рассмотрим частный случай утверждения (H), положив *q* равным *n*. Такой шаг может показаться странным, однако он вполне допустим. (Он представляет собой первый этап мощного «диагонального доказательства» – процедуры, открытой в высшей степени оригинальным и влиятельным датско-русско-немецким математиком девятнадцатого века Георгом Кантором; эта процедура лежит в основе рассуждений и Гёделя, и Тьюринга.) При *q*, равном *n*, наше утверждение принимает следующий вид:

(I) Если завершается *A* (*n*, *n*), то C_n (*n*) не завершается.

Отметим, что *A*(*n*,*n*) зависит только от <u>одного</u> числа (*n*), а не от двух, так что данное вычисление должно принадлежать ряду C_0, C_1, C_2, C_3, … (по *n*), поскольку предполагается, что этот ряд содержит <u>все</u> вычисления, которые можно выполнить над одним натуральным числом *n*.[141] Обозначив это вычисление через C_k, запишем:

(J) $A(n,n) = C_k(n)$.

Рассмотрим теперь частный случай $n = k$. (Второй этап диагонального доказательства Кантора.) Из равенства (J) получаем:

(K) $A(k,k) = C_k(k)$,

утверждение же (I) при $n = k$ принимает вид:

(L) Если завершается *A* (*k*, *k*), то C_k (*k*) не завершается.

Подставляя (K) в (L), находим:

(M) Если завершается C_k (*k*), то C_k (*k*) не завершается.[142]

Из этого следует заключить, что вычисление C_k (*k*) в действительности <u>не</u> завершается. (Ибо, согласно (M), если оно завершается, то оно не завершается!) Невозможно завершить и вычисление *A* (*k*, *k*), поскольку, согласно (K), оно <u>совпадает</u> с C_k (*k*). То есть, наша процедура *A* оказывается не в состоянии показать, что данное конкретное вычисление C_k (*k*) не завершается, даже если оно и в самом деле не завершается.

Более того, если нам <u>известно</u>, что процедура *A* обоснована, то, значит, нам <u>известно</u> и то, что вычисление C_k (*k*) не завершается. Иными словами, нам известно нечто, о чем посредством процедуры *A* мы узнать не могли. Следовательно, сама процедура *A* с нашим пониманием <u>никак</u> не связана.

* * *

2010.08.20 11:22 пятница

<u>В.Э.:</u> Сдержим эмоции, вспыхнувшие у меня и отраженные в последней сноске сразу после того, как я *осознал* и *понял* (любимые словечки Пенроуза) <u>ЧТО</u> ! мне пытаются всучить под видом математического доказательства. Разберем теперь это «доказательство» основательно, и для этого мне потребуется уже не подстрочное примечание, а крупная вставка в текст Пенроуза.

На рис. VE1 изображена схема, на которую лучше поглядывать, разбирая рассуждение Пенроуза, так как она дает некоторую «визуализацию» этих вещей.

По вертикальной оси в схеме отложены всевозможные вычислительные процедуры $C_i(n)$, имеющие на входе один параметр (число *n*). Эти процедуры перенумерованы, и их общее количество – C.

По горизонтальной оси отложены числа, которые могут быть параметрами этих процедур; их общее количество – N.

Горизонтальные прерывистые линии показывают выполнение одной процедуры с всевозможными параметрами (входными числами). Вертикальные прерывистые линии показывают

---

[141] **В.Э.:** Ах вот как! Оказывается, в том ряду C_0, C_1, C_2, C_3, … были <u>все</u> процедуры, которым можно подать на вход число *n*, в том числе и *A*! (О! Теперь мы уже в двойном тумане!)

[142] **В.Э.:** Боже! И вот эту муру нам хотят преподнести как доказательство, имеющее какое-то отношение к чему-то в реальном мире! Во-первых, «процедура *A*», содержащая «все возможные доказательства», – это объект несуществующий; во-вторых, «ряд *C*», содержащий «все программы, которым можно подать на вход число *n*», – это объект несуществующий; в-третьих, даже если предположить, что *A* и *C* существуют, то нет никакой гарантии, что в пункте (I) можно будет взять $q = n$; в-четвертых, программа A(n,n), имеющая два параметра, не эквивалентна программе A(n), имеющей один параметр; в-пятых, нет гарантии, что в пункте (K) можно будет взять $n = k$. Это то, что бросается в глаза сразу, с первого взгляда.

выполнение всевозможных процедур с одним и тем же параметром (числом). Пересечение горизонтальных и вертикальных прерывистых линий отображает выполнение одной определенной процедуры с одним определенным параметром (числом).

Но к каждому пункту этой плоскости привязана и другая процедура $A(i,n)$ с двумя входными параметрами, первый из которых указывает на процедуру C_i, а второй – на ее входной параметр n. Эта процедура проверяет, заканчивается ли процедура C_i при данном параметре n (доказывает, будет она завершаться, или нет). Процедура $A(i,n)$ такая хитрая, что ее можно рассматривать одновременно и как единую процедуру A, и как массив (размером C × N) отдельных разрозненных процедур, и как разные объединения (множества) этих разрозненных процедур (подмножества единой A).

Таковы стартовые установки пенроузовского рассуждения, так сказать, «поле брани».

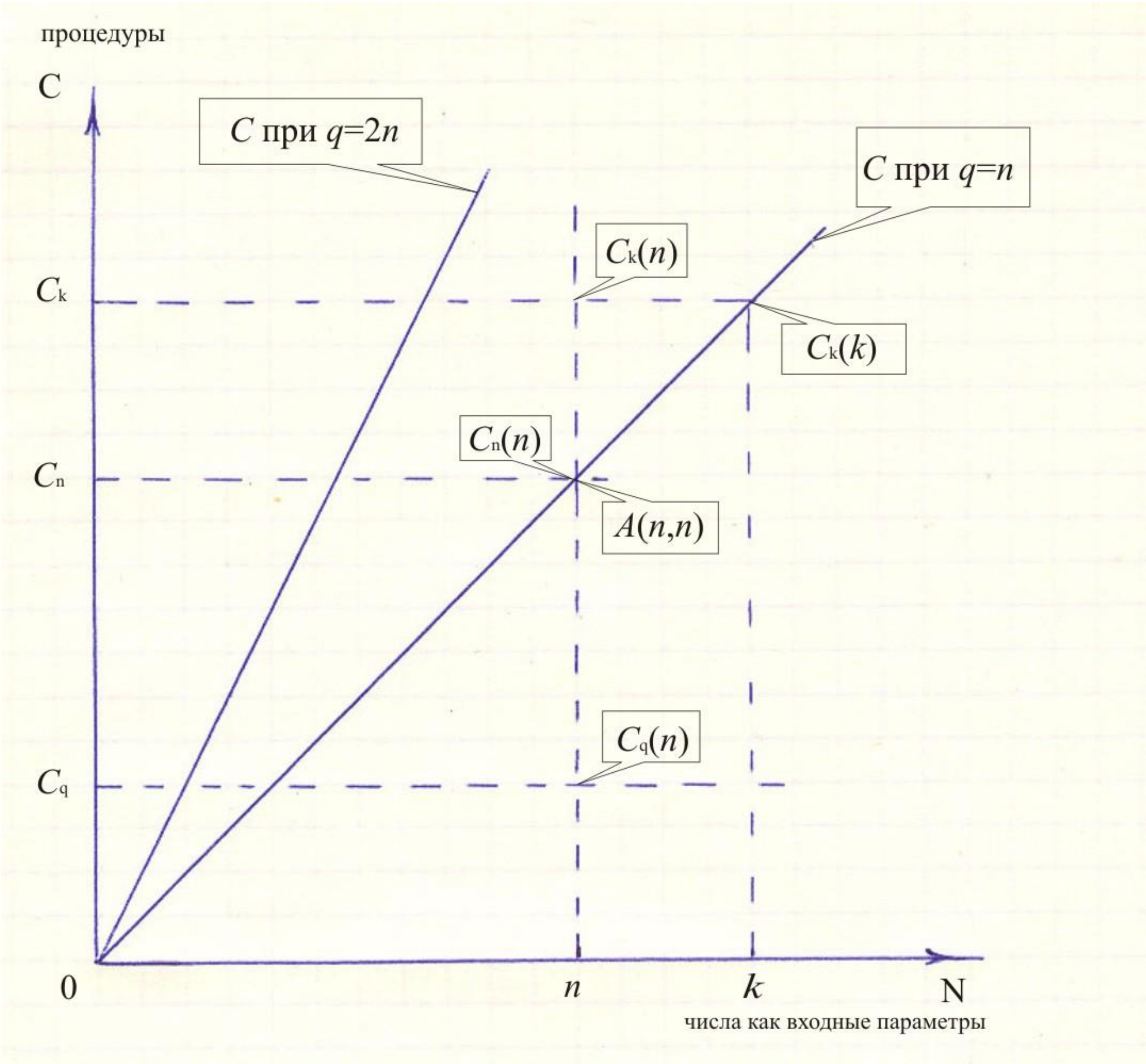


Рис.VE1. Схема для ориентации в рассуждении Пенроуза

Пенроуз перед своим доказательством дал нам разрешение: «*Если вас почему-либо не устраивает концепция «машины Тьюринга», вообразите себе самый обыкновенный универсальный компьютер и считайте* n *«данными», необходимыми для работы какой-нибудь программы*». Меня действительно «не устраивают» «машины Тьюринга», и поэтому я воспользуюсь разрешением Пенроуза и проверю его рассуждение на реальных программах реальных компьютеров, с которыми я имел достаточно много дел. Уж кто-кто, а я-то «обыкновенный компьютер» вообразить могу, как и программы с необходимыми для них данными!

Да только нет для нас, работающих программистов, такого ряда программ

$$C_0, C_1, C_2, C_3, \ldots, C_q, \ldots .$$

Что я должен включать в этот ряд? Свою подпрограмму ABC, которая среди других входных параметров имеет *n*? Или только те подпрограммы, которые имеют лишь один параметр – *n*? А если процедура ABC сама с параметром *n* вообще не работает, а только передает его вызываемой функции DEF? Тогда что я должен включать в ряд C_q – только ABC? Или только DEF? Или обе программы? А если я вчера написал программу, а сегодня изменил ее? Тогда включать вчерашнюю или сегодняшнюю? А если программа ABC по алгоритму одинаковая, но написана для разных машин: для «Минск-22», для «Mitra-15», для «ЕС ЭВМ», для «IBM PC»? Тогда все включаем – или только одну? И если одну, то которую? А если моя программа и программа Леньки, моего друга по Институту, отличается только несколькими операторами и обе дают одинаковые результаты, то включаем обе или одну? И которую? А если я начал писать и не дописал программу, то включаем ее? Ведь как возможное вычисление она же существует! А ту, которую я вообще не начал писать, а только подумал о ней? И ту, о которой подумал школьник, не умеющий программировать?.. Где граница?

Я программист, и привык мыслить точно и строго, и эта математическая расплывчатость и обычный для математиков туман мыслей меня никак не может устраивать. Если бы я рассуждал столь же туманно, как они, то мои программы не работали бы. Диспос перепутывал бы, что печатать на одном АЦПУ, что на другом, что выводить на дисплей, что копировать на другой диск, а что передавать другой машине. Всё пришло бы в сплошную кашу, застопорилось и зависло бы. Так что нас – программистов – проверяет самый придирчивый в мире судья: компьютер. Чуть что сделаешь не так – и всё полетит к чертям, работать не будет. Нас принуждают к абсолютно строгому мышлению – а кто на это не способен, тот не может быть программистом и вынужден уйти с этой работы.

Иное дело математики. Их никто не проверяет и не заставляет мыслить строго и точно. Придумал 23-летний Алан Тьюринг в 1936 году рассуждение, которое, как мы уже начали видеть и еще увидим дальше, представляет собой сплошную чушь, – и хорошо, и стал знаменитым. А в 1994 году уже и без того знаменитый 62-летний Роджер Пенроуз согласно кивает головой: «Да! Правильно! Всё верно! Гениально!». Сами себя проверили – и готово. Не требуется, чтобы что-то работало, действовало, не сбивалось и не зависало…

Я помню, во времена Диспоса однажды Ленька Рогов (один из лучших моих друзей в Институте электроники – он участвовал в других разработках, не Диспоса) увидел в журнале «Автоматика и вычислительная техника» статью Растрыгина (доктор ф.-м. наук, зав.лаб., главная знаменитость нашего Института после его директора академика Якубайтиса). В этой статье после преамбулы стояла начальная фраза:

«Возьмем программы P_1, P_2, P_3, … P_n»

И Ленька тогда сказал со своей обычной непревзойденной иронией:

– Вот, что значит доктор наук! Мы каждую программу пишем и отлаживаем неделями и месяцами, а он их просто берет охапками! – и закрыл журнал. (Да… все эти «теоретики от алгоритмов» для нас, пишущих и работающих программистов, были лишь объектами насмешек, и ни о каком авторитете их в наших глазах не могло быть и речи).

Итак, тот основной объект, над которым проводится рассуждение Пенроуза (множество процедур C_0, C_1, C_2, C_3, …., C_q, ...), для программиста не может считаться ни в малейшей мере определенным и осмысленным. Это всё равно что в детской сказке, когда мачеха приказывает падчерице: «Иди туда, не знаю, куда, возьми то, не знаю, что, а если до утра не принесешь…»

Не лучше обстоят дела и с процедурой $A(i,n)$ – она тоже не представляет собой ничего такого, что мы, работающие программисты, могли бы воспринять как нечто реальное, хотя бы в принципе реализуемое на какой-нибудь машине и поэтому достойное обсуждения.

На самом деле одного этого уже достаточно, чтобы отвергнуть всё рассуждение Пенроуза как слишком туманное и не имеющее никакого отношения к реальному компьютерному программированию и к реальным программам.

Но изюминка еще впереди! Согласимся на время с установками Пенроуза и примем его «правила игры», чтобы посмотреть, что же из этого выйдет. Ладно, пусть у нас имеется ряд пронумерованных процедур C_0, C_1, C_2, C_3, …., C_q, ... и хитроумная процедура $A(i,n)$ для теоретической проверки, останавливаются ли все они при каждом *n* или нет.

Только выйдем всё-таки немножко из математического тумана и, во-первых, представим себе эти C_i более четко:

вот, допустим, C_0 – это процедура возведения *n* в степень два (квадрат),

C_1 – это процедура извлечения квадратного корня из *n*,

C_2 – это процедура извлечения кубического корня из n и т.д.,
а во-вторых, не будем сразу пускаться в туманную даль бесконечностей, а применим математическую индукцию.

Вот, выше, в §2.4 Пенроуз рисовал растущие шестиугольники, «визуализировал» добавление оболочек к кубам (рис. 2.2), и я полностью с ним соглашался. А потом Пенроуз писал:

> «Представленное выше рассуждение о суммировании последовательных шестиугольных чисел можно при желании заменить более формальным математическим доказательством. В основу такого формального доказательства можно положить принцип математической индукции, т.е. процедуру установления истинности утверждения в отношении всех натуральных чисел на основании одного-единственного вычисления. По существу, этот принцип позволяет заключить, что некое положение $P(n)$, зависящее от конкретного натурального числа n (например, такое: «сумма первых n шестиугольных чисел равна n^3»), справедливо для всех n, если мы можем показать, во-первых, что оно справедливо для $n = 0$ (или, в нашем случае, для $n = 1$), и, во-вторых, что из истинности $P(n)$ следует истинность и $P(n+1)$.»

Вот, это правильно! И это действительно математика, действительно математическое мышление и действительно доказательство!

Поэтому сначала возьмем C (количество задействованных процедур) и N (количество возможных параметров) конечными и очень маленькими (ну, допустим, N = 4), посмотрим, что получается при этих маленьких значениях, потом посмотрим, что получается при переходе к N + 1, и что получается, когда N → ∞.

Итак, теперь в нашей «вселенной» имеется только пять чисел: 0, 1, 2, 3, 4.

Будет ли C (количество задействованных процедур) тоже ограничено этой же величиной (4)? Выше мы уже приняли, что процедуры C_0, C_1 и C_2 у нас заняты (это возведение в квадрат, извлечение квадратного корня и кубического корня). Пока число C не превышает N. Но мы можем ввести сразу целых пять процедур умножения: C_3 – умножить n на 0; C_4 – умножить n на 1; C_5 – умножить n на 2; C_6 – умножить n на 3; C_7 – умножить n на 4.

Теперь у нас количество процедур уже перевалило за N (N = 4, а C = 7).

Следовательно, в диспозиции Пенроуза для $q = 5$, $q = 6$ и $q = 7$ не будут существовать вычисления $C_q(q)$.

Пока еще это не очень страшно, так как на первом этапе «*диагонального доказательства – процедуры, открытой в высшей степени оригинальным и влиятельным датско-русско-немецким математиком девятнадцатого века Георгом Кантором*» Пенроуз «полагает q равным n».

Это «положение» определяет диагональ, видную на рис. VE1. Только теперь у нас картина будет уже не квадратная, а вытянутая вверх (C = 7, а N = 4). Поэтому диагональ упирается в правый край картины, не достигнув высоты C.

Разумеется, та пятерка процедур умножения на разные числа, которую мы добавили к C, не последняя. Мы можем добавить еще пятерку сложения n с разными числами, пятерку вычитания из n разных чисел, пятерку деления n на разные числа, и т.д. – вообще необозримое множество всевозможных процедур. Тогда количество C различных процедур будет еще возрастать, картина рисунка VE1 будет вытягиваться всё больше и больше вверх, а диагональ будет охватывать всё меньшую и меньшую часть этой картины.

Теперь возьмем N + 1 = 5. Что изменится? Теперь вместо пятерок процедур будут добавляться шестерки процедур, и растягивание картины станет еще быстрее.

Изменится ли что-нибудь при дальнейшем росте N? Нет – не изменится. Картина как была, так и останется вытянутой, диагональ будет охватывать всё более и более ничтожную долю картины (при N → ∞ охваченная доля стремится к 0%).

Это вывод такой же достоверности, с какой в §2.4 Пенроуз рассуждал о растущих «шестиугольных числах» и кубах, при этом «визуализируя» процесс. Это действительно достоверный математический вывод.

А теперь перейдем к теперешнему рассуждению Пенроуза – к его второму этапу.

Итак, положили «q равным n», получили $C_n(n)$; заканчивается ли эта процедура, проверяет $A(n,n)$; оно «*зависит только от одного числа* (n)» (оставим в стороне то обстоятельство, что для реальных компьютерных программ вообще-то есть разница, имеет ли процедура один параметр, или два параметра, значения которых оказались одинаковыми).

Теперь $A(n,n)$ принадлежит к множеству C, имеет там номер k, ищем вычисление $C_k(k)$, оно должно находиться на пересечении горизонтали k с диагональю $q = n$, и… чушшш!.. эта горизонталь не пересекается с диагональю, потому что диагональ охватывает ничтожнейшую часть картины. Вычисление $C_k(k)$ не найдено, оно не существует, никаких выводов сделать невозможно, доказательство лопнуло, получился пшик…

Вообще меня потрясает, как умные люди (а, по всему судя, Пенроуз же умный человек!) могут воспринимать всерьез «доказательства», основанные на «диагональном методе» Кантора. Ведь очевидно же, что этот метод противоречит математической индукции. Может быть достоверно лишь одно – либо математическая индукция, либо «диагональный метод». (И я без сомнений отвечаю, что достоверно первое, а второе – полная чушь). И то, что эта чушь теперь считается «общепринятой математической истиной», по-моему, говорит о глубоком вырождении математики. При Гауссе, когда математика еще была точной и достоверной наукой, такое «доказательство» было бы невозможно!)

«Доказательство», приводимое Пенроузом, состоит из сплошных изъянов. Там вообще нет ну абсолютно ничего, что могло бы заставить программиста сделать какие-то выводы относительно своих программ и вообще реального мира. Тем не менее Пенроуз на полном серьезе думает, что всё это действительно доказывает что-то о свойствах мозга, интеллекта, разума, сознания! Каким же должно быть мышление человека, чтобы ТАК полагать?!

Сам Пенроуз скажет, как только мы вернем ему слово: «*Надо признать, что, на первый взгляд, это доказательство и в самом деле смахивает на фокус*». Нет, мистер Пенроуз! – не на фокус оно смахивает, а на манипуляции шамана дикого племени, продолжающего жить в каменном веке и верящего, что эти манипуляции представляют собой колдовство!

Знаменитый физик, лауреат Нобелевской премии 1965 года, Ричард Фейнман в своем выступлении перед выпускниками Калифорнийского технологического института в 1974 году (включенном в качестве Заключения в книгу «Вы, конечно же, шутите, мистер Фейнман…»[143]), говорил о псевдонауках, и там имеются такие слова:

> «У тихоокеанских островитян есть религия самолетопоклонников. Во время войны они видели, как приземляются самолеты, полные всяких хороших вещей, и они хотят, чтобы так было и теперь. Поэтому они устроили что-то вроде взлетно-посадочных полос, по сторонам их разложили костры, построили деревянную хижину, в которой сидит человек с деревяшками в форме наушников на голове и бамбуковыми палочками, торчащими как антенны – он диспетчер, – и они ждут, когда прилетят самолеты. Они делают всё правильно. По форме всё верно. Всё выглядит так же, как и раньше, но всё это не действует. Самолеты не садятся. Я называю упомянутые науки науками самолетопоклонников, потому что люди, которые ими занимаются, следуют всем внешним правилам и формам научного исследования, но упускают что-то главное, так как самолеты не приземляются».

Вот, это «доказательство», данное Пенроузом, – это всё равно что ритуальные манипуляции колдуна «самолетепоклонников»: они внешне подражают научному математическому доказательству, но на самом деле «упускают что-то главное», из-за чего «самолеты не приземляются», то есть, ничего на самом деле не доказано.

Но теперь, по крайней мере, я стал понимать, зачем «им» нужны машины Тьюринга. Совсем недавно, несколькими страницами выше, я так сокрушался и удивлялся: «*Уже со студенческих времен я не могу понять, почему все «теоретики от алгоритмов» так держатся за эти «машины Тьюринга». Ну, предложил 23-летний юноша (..) Алан Тьюринг такую модель в мае 1936 года, когда в мире не существовало еще ни одного компьютера. Ну, было по тем временам это, пожалуй, действительно выдающимся достижением. Но с тех пор прошло 74 года – целая человеческая жизнь! Компьютеры теперь есть в каждом доме…*» А теперь я понял! Машины Тьюринга «им» нужны для проведения «самолетопоклоннического» ритуала «доказательства» «проблемы остановки»! Это культовый предмет! С настоящими компьютерными программами ритуал не получается: нет даже видимости доказательства!..

Вообще с точки зрения программиста реальных компьютеров об этом рассуждении Пенроуза можно еще очень многое говорить. Что такое, например, «вычисление C_k» – то самое, которое при «пересечении с диагональю» даст легендарное $C_k(k)$? Ведь C_k то же самое, что $A(n,n)$ – оно «идет по диагонали» и проверяет:

– останавливается ли C_0 при n = 0?
– останавливается ли C_1 при n = 1?

[143] См. http://vekordija.narod.ru/R-FEYNMA.PDF стр. 168.

Рис.VE2. Вырезка из фильма режиссера Харальда Райнля (по книгам Эриха фон Дэникена) «Воспоминания о будущем» (1970). Самолетопоклонники выполняют ритуал призыва самолетов.

– останавливается ли C_2 при n = 3?

– и т.д.

А ведь C_0, C_1, C_2 – это вычисления совершенно различной природы! В наших, принятых выше, примерах, значит, процедура C_k будет работать так: если ей на вход подадут параметр 0, она проверит, можно ли возвести в квадрат число 0; если подадут на вход 1, то проверит, можно ли извлечь квадратный корень из 1; если подадут на вход 2, то проверит, можно ли извлечь кубический корень из 2; если подадут на вход 3, то проверит, можно ли умножить 4 на 0… Ну, и так далее: при каждом параметре происходят совершенно другие действия, не имеющие ничего общего с предыдущими! (Представляю проблемы того программиста, которому нужно написать эту программу C_k!).

Ладно, C_k идет «по диагонали». Но может ли быть какая-нибудь C_m, которая идет по более наклонной черте (рис. VE1) при $q = 2n$? То есть, процедура $A(2n,n)$ тоже является процедурой одного параметра и тоже представлена среди C? (Во всяком случае в классической математике же функции $y = x$ и $y = 2x$ обе являются функциями одной переменной). А если так, то одних только процедур типа C_k будет в C столько же, сколько и натуральных чисел N.

Вообще очевидно, что мощность множества C бесконечно[144] раз больше, чем мощность множества N, и всё «доказательство» Пенроуза построено на игнорировании этого факта.

Но, пожалуй, хватит. Пойдем дальше.

Продолжим текст Пенроуза:

* * *

В этом месте осторожный читатель, возможно, пожелает перечесть всё вышеприведенное доказательство заново, дабы убедиться в том, что он не пропустил какой-нибудь «ловкости рук» с моей стороны. Надо признать, что, на первый взгляд, это доказательство и в самом деле

[144] Бесконечно? Или конечное число раз? Тут так сразу и не определишь из-за расплывчатости C – но очевидно, что мощность C во много много раз больше мощности N.

смахивает на фокус, и всё же оно полностью допустимо, а при более тщательном изучении лишь выигрывает в убедительности.[145] Мы обнаружили некое вычисление C_k (k), которое, насколько нам известно, не завершается; однако установить этот факт с помощью имеющейся в нашем распоряжении вычислительной процедуры A мы не в состоянии. Это, собственно, и есть теорема Гёделя(–Тьюринга) в необходимом мне виде. Она применима к любой вычислительной процедуре A, предназначенной для установления невозможности завершить вычисление, – коль скоро нам известно, что упомянутая процедура обоснована. Можно заключить, что для однозначного установления факта незавершаемости вычисления не будет вполне достаточным ни один из заведомо обоснованных наборов вычислительных правил (такой, например, как процедура A), поскольку существуют незавершающиеся вычисления (например, C_k (k)), на которые эти правила не распространяются. Более того, поскольку на основании того, что нам известно о процедуре A и об ее обоснованности, мы действительно можем составить вычисление C_k (k), которое, очевидно, никогда не завершается, мы вправе заключить, что процедуру A никоим образом нельзя считать формализацией процедур, которыми располагают математики для установления факта незавершаемости вычисления, вне зависимости от конкретной природы A. Вывод:

$\mathcal{G}$ Для установления математической истины математики не применяют заведомо обоснованные алгоритмы.[146]

Мне представляется, что к такому выводу неизбежно должен прийти всякий логически рассуждающий человек. Однако многие до сих пор предпринимают попытки этот вывод опровергнуть (выдвигая возражения, обобщенные мною под номерами Q1 – Q20 в §2.6 и §2.10), и, разумеется, найдется ничуть не меньше желающих оспорить вывод более строгий, суть которого сводится к тому, что мыслительная деятельность непременно оказывается связана с некими феноменами, носящими фундаментально невычислительный характер.[147] Вы, возможно, уже спрашиваете себя, каким же это образом подобные математические рассуждения об абстрактной природе вычислений могут способствовать объяснению принципов функционирования человеческого мозга. Какое такое отношение имеет всё вышесказанное к проблеме осмысленного осознания? Дело в том, что, благодаря этим математическим рассуждениям, мы и впрямь можем прояснить для себя некие весьма важные аспекты такого свойства мышления, как понимание – в терминах общей вычислимости, – а, как было показано в §1.12, свойство понимания связано с осмысленным осознанием самым непосредственным образом. Предшествующее рассуждение действительно носит в основном математический характер, и связано это с необходимостью подчеркнуть одно очень существенное обстоятельство: алгоритм A участвует здесь на двух совершенно различных уровнях. С одной стороны, это просто некий алгоритм, обладающий определенными свойствами, с другой стороны, получается, что на самом-то деле A можно рассматривать как «алгоритм, которым пользуемся мы сами» в процессе установления факта незавершаемости того или иного вычисления. Так что в вышеприведенном рассуждении речь идет не только и не столько о вычислениях. Речь идет также и о том, каким образом мы используем нашу способность к осмысленному пониманию для составления заключения об истинности какого-либо математического утверждения – в данном случае утверждения о незавершаемости вычисления C_k (k). Именно взаимодействие между двумя различными уровнями рассмотрения алгоритма A – в качестве гипотетического способа функционирования сознания и собственно вычисления – позволяет нам сделать вывод, выражающий фундаментальное противоречие между такой сознательной деятельностью и простым вычислением.

---

[145] **В.Э.:** Особенно после моего разбора ☺.

[146] **В.Э.:** Данное выше Пенроузом «доказательство» ни в малейшей мере не является таким рассуждением, которое мог бы воспринять всерьез программист, привыкший мыслить строго, точно и конкретно. Для такого программиста это «доказательство» не доказывает абсолютно ничего. Но, несмотря на это, тезис $\mathcal{G}$ – верный. Просто он вытекает не из (туманного) рассуждения Пенроуза, а из других соображений. Если под «заведомо обоснованными алгоритмами» понимать «правила» и «доказательства» формальных систем (а Пенроуз понимает именно это, что особенно ясно станет ниже), то, действительно, НЕ на эти правила-алгоритмы формалистов опирается познание математических истин. А на какие алгоритмы опирается на самом деле – это показывает Веданская теория.

[147] **В.Э.:** Вот как тут Пенроуз перескакивает и сбивается! Для него понятия «правила-алгоритмы формалистов» и «вычислительные процессы» совпадают. Нет вторых вне первых. Поэтому из $\mathcal{G}$ следует невычислительная природа мышления вообще. Но на самом деле понятия «правила-алгоритмы формалистов» и «вычислительные процессы» НЕ совпадают. На правилах-алгоритмах формалистов мышление действительно не опирается. Но оно представляет собой другие вычислительные процессы.

Существуют, однако, всевозможные лазейки и контраргументы, на которые необходимо обратить самое пристальное внимание. Для начала, в оставшейся части этой главы, я тщательно разберу все важные контраргументы против вывода $\mathcal{G}$,[148] которые когда-либо попадались мне на глаза – см. возражения Q1–Q20 и комментарии к ним в §§2.6 и 2.10; там, кроме того, можно найти и несколько дополнительных возражений моего собственного изобретения. Каждое из возражений будет разобрано со всей обстоятельностью, на какую я только способен. Пройдя через это испытание, вывод $\mathcal{G}$, как мы убедимся, существенно не пострадает. Далее, в главе 3, я рассмотрю следствия уже из утверждения $\mathcal{G}$. Мы обнаружим, что оно и в самом деле способно послужить прочным фундаментом для построения весьма убедительного доказательства абсолютной невозможности точного моделирования сознательного математического понимания посредством вычислительных процедур,[149] будь то восходящих, нисходящих или любых их сочетаний. Многие сочтут такой вывод весьма неприятным, поскольку если он справедлив, то нам, получается, просто некуда двигаться дальше. Во второй части книги я выберу более позитивный курс. Я приведу правдоподобные, на мой взгляд, научные доводы в пользу справедливости результатов моих размышлений о физических процессах, которые могут, предположительно, лежать в основе деятельности мозга – вроде той, что осуществляется при нашем восприятии приведенных выше рассуждений, – и о причинах недоступности этой деятельности для какого бы то ни было вычислительного описания.

§2.7. Неразрешимость проблемы Гильберта

Роджер Пенроуз. «Новый Разум Короля»; http://vekordija.narod.ru/R-PENRO1.PDF, стр. 74–80.

Мы теперь вплотную подходим к той цели, ради которой Тьюринг с самого начала разрабатывал свою теорию – получить ответ на вопрос, заключенный в общей проблеме алгоритмической разрешимости, поставленной Гильбертом, а именно: существует ли некая механическая процедура для решения всех математических задач, принадлежащих к некоторому широкому, но вполне определенному классу? Тьюринг обнаружил, что он мог бы перефразировать этот вопрос следующим образом: остановится ли в действительности n-я машина Тьюринга, если на ее вход поступит число m? Эта задача получила название проблемы остановки. Не так сложно составить список команд, для которых машина никогда не остановится при любом m (как, например, в случаях $n = 1$ или 2, рассмотренных в предыдущем разделе, а также во всех случаях, когда вообще отсутствует команда STOP). Точно так же существует множество списков команд, для которых машина будет останавливаться всегда, независимо от вводимого числа m (например, T_{11}). Кроме того, некоторые машины при работе с одними числами останавливались бы, а с другими – нет. Совершенно очевидно, что алгоритм, который никогда не прекращает работу, бесполезен. Это, собственно, и не алгоритм вовсе. Поэтому важно уметь ответить на вопрос, приведет ли когда-нибудь работа машины T_n над данным числом m к какому-то ответу или нет! Если нет (т.е. процесс вычисления никогда не прекращается), то я буду выражать это следующей записью:

$$T_n(m) = \square.$$

(Сюда же включены машины, которые в ходе работы попадают в ситуацию, когда нет команды, определяющей их дальнейшее поведение, как это было в случае рассмотренных выше фиктивных машин T_4 и T_7. К сожалению, наша на первый взгляд работоспособная машина T_3 должна теперь также считаться фиктивной, т.е. $T_3\ (m) = \square$, поскольку результатом ее действия всегда будет просто пустая лента, тогда как нам, чтобы приписать номер полученному ответу, нужна хотя бы одна единица на выходе! Машина T_{11}, однако, совершенно полноправна, поскольку она производит единственную 1. Результатом ее работы будет лента с номером 0, так что $T_{11}(m) = 0$ для любого m.)

В математике весьма важно иметь возможность установить момент, когда машина Тьюринга остановится. Рассмотрим для примера уравнение

$$(x + 1)^{w+3} + (y + 1)^{w+3} = (z + 1)^{w+3}.$$

---

[148] **В.Э.:** Против вывода $\mathcal{G}$? Значит, против тезиса, который я НЕ оспариваю.

[149] **В.Э.:** Ну нет же: только с процедурами математических формалистов ты справишься, но не с компьютерами вообще.

(Не пугайтесь, даже если вы не любите вникать в детали математических вычислений. Это уравнение используется здесь только в качестве примера, и от вас не требуется его глубокого понимания.) Это конкретное уравнение относится к известной (возможно, самой известной) и пока нерешенной математической проблеме. Проблема формулируется следующим образом: существует ли какой-либо набор x, y, z, w, для которого это равенство выполняется. Знаменитое утверждение, записанное на полях «Арифметики» Диофанта великим французским математиком семнадцатого столетия Пьером де Ферма (1601–1665) и известное как «последняя теорема Ферма», гласит, что это равенство никогда не выполняется[150].[151] Будучи адвокатом по профессии, Ферма тем не менее был искуснейшим математиком своего времени. (Ферма был современником Декарта.) В своей записи он утверждал, что знает «воистину прекрасное доказательство» своей теоремы, но поля книги слишком малы, чтобы его привести. До сегодняшнего дня никому так и не удалось ни воспроизвести это доказательство,[152] ни найти опровергающий это утверждение пример!

Очевидно, что для заданной четверки чисел (x, y, z, w) выяснить, выполняется это равенство или нет, можно простым вычислением. Значит, мы можем представить себе вычислительный алгоритм, который последовательно перебирает все возможные четверки чисел одну за другой и останавливается только тогда, когда равенство удовлетворяется. (Мы уже знаем, что для конечных наборов чисел существуют способы их кодирования на ленте вычислимым способом, а именно, в виде одного числа. Таким образом, перебор всех четверок можно провести, просто следуя естественному порядку соответствующих им одиночных чисел.) Если бы мы могли установить, что этот алгоритм никогда не останавливается, то это стало бы доказательством утверждения Ферма.

Сходным образом в терминах проблемы остановки машины Тьюринга можно перефразировать многие другие нерешенные математические проблемы. Примером такого рода проблем может служить так называемое предположение Гольдбаха: любое четное число, большее двух, может быть представлено в виде суммы двух простых чисел.[153] Процесс, с помощью которого можно установить, относится некоторое натуральное число к простым или нет, является алгоритмическим, поскольку достаточно проверить делимость данного числа на все числа, меньшие его, а это достигается с помощью конечного числа вычислительных операций. Мы можем придумать машину Тьюринга, которая перебирает четные числа 6, 8, 10, 12, 14, ..., пробуя все возможные способы разбиения их на пары нечетных чисел

$$6 = 3 + 3,\ 8 = 3 + 5,\ 10 = 3 + 7 = 5 + 5,\ 12 = 5 + 7,\ 14 = 3 + 11=7 + 7,\ \ldots$$

и убеждаясь, что для каждого четного числа какое-то из разбиений образовано двумя простыми числами. (Очевидно, нам не надо проверять пары четных слагаемых, кроме 2 + 2, поскольку все простые числа за исключением 2 – нечетные.) Наша машина должна остановиться только в том случае, если она находит четное число, для которого ни одно из разбиений не является парой простых чисел. В этом случае мы получили бы контрпример к предположению Гольдбаха, т.е. нашли бы четное число, большее 2, которое не является суммой двух простых чисел. Следовательно, если бы мы могли установить, останавливается машина Тьюринга когда-нибудь или нет, то тем самым мы выяснили бы, справедливо предположение Гольдбаха или нет.

Возникает естественный вопрос: каким образом следует определять, остановится какая-то определенная машина Тьюринга (в которую введены конкретные начальные данные) или нет? Для многих машин Тьюринга ответить на этот вопрос нетрудно, но, как мы видели выше, иногда для ответа может потребоваться решение какой-нибудь до сих пор не решенной математической задачи. Так существует ли некая алгоритмическая процедура для решения общей проблемы –

---

[150] Напомним, что натуральными мы называем числа 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6... Вместо обычной записи ($x^w + y^w = z^w$, где $x, y, z > 0$, $w > 2$) мы используем «$x + 1$», «$w + 3$» и т.д., чтобы включить в рассмотрение все натуральные числа, начиная с нуля.

[151] Желающие ознакомиться с вопросами, имеющими отношение к этому знаменитому утверждению и изложенными без излишних технических подробностей, могут обратиться к работе Дэвлина [1988].

[152] Последняя теорема Ферма доказана английским математиком Эндрю Уайлсом (Andrew J. Wiles). Доказательство опубликовано в 1995 году. – *Прим. ред.*

[153] Напомним, что простые числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ... – это такие натуральные числа, которые делятся только на самих себя и на единицу. Ни нуль, ни единица простыми числами не считаются.

проблемы остановки – полностью механическим путем? Тьюринг показал, что такой процедуры на самом деле нет.[154]

В сущности, его доказательство сводилось к следующему. Предположим, наоборот, что указанный алгоритм существует.[155] Тогда существует и некая машина Тьюринга *H*, которая «решает», остановится ли в конце концов *n*-я машина Тьюринга, действуя на число *m*. Условимся, что результатом действия машины *H* будет лента с номером 0, если *n*-я машина не останавливается, и с номером 1 в противоположном случае:

$$H(n; m) = \begin{cases} 0, & \text{если } T_n(m) = \square, \\ 1, & \text{если } T_n(m) \\ & \text{останавливается.} \end{cases}$$

Здесь мы могли бы воспользоваться способом кодирования пары (*n*, *m*), использованным ранее для универсальной машины Тьюринга *U*. Однако это привело бы к проблеме технического характера, поскольку при некоторых *n* (например, *n* = 7) T_n будет определена некорректно, и маркер 111101 будет непригоден для отделения на ленте *n* от *m*. Чтобы избежать этой проблемы, будем полагать, что *n* представлено не в двоичной, а в расширенной двоичной форме, тогда как для *m* будет по-прежнему использоваться обычная двоичная запись. В этом случае комбинации 110 будет достаточно для разделения *n* и *m*. Использование точки с запятой в обозначении *H*(*n*; *m*) в отличие от запятой в обозначении универсальной машины *U*(*n*, *m*) указывает на это различие в кодировании.

Представим себе теперь бесконечную таблицу, в которую включены окончательные результаты действий всех возможных машин Тьюринга на все возможные (различные) входные данные. В этой таблице *N*-й ряд представляет собой результаты вычислений *n*-й машины Тьюринга, полученные при ее работе последовательно с *m* = 0, 1, 2, 3, 4, ...:

$n \downarrow$ \ $m \rightarrow$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
0	□	□	□	□	□	□	□	□	□	...
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...
3	0	2	0	2	0	2	0	2	0	...
4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...
5	0	□	0	□	0	□	0	□	0	...
6	0	□	1	□	2	□	3	□	4	...
7	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
8	□	1	□	□	1	□	□	□	1	...
.	.				.				.	...
.	.				.				.	
.	.				.				.	
197	2	3	5	7	11	13	17	19	23	...
.	.				.				.	
.	.				.				.	
.	.				.				.	

[154] **В.Э.:** То, что такой процедуры нет, не вызывает никаких сомнений с точки зрения программиста. Но вот способ, которым Тьюринг пытается это доказать, и те интерпретации, которые всему этому дает Пенроуз, вызывают существенные возражения. Диагональный метод, который Пенроуз чуть ниже назовет «остроумным и мощным приемом», славится своей путаницей в понятиях и на самом деле никогда ничего не доказывает. Диагональный процесс можно пускать всегда, когда перед нами бесконечное множество, элементы которого тоже бесконечны, – и ничего другого, кроме этого факта, этот «остроумный и мощный прием» не показывает.

[155] Это хорошо известный и очень мощный метод математического доказательства, называемый «доказательством от противного» или *reductio ad absurdum* (сведение к абсурду), в котором сначала полагается истинным утверждение, исключающее исходное, затем из этой предпосылки выводится противоречие, которое и служит доказательством справедливости исходного утверждения.

Я немного «сжульничал» и не стал располагать машины Тьюринга по порядку их действительных номеров. Если бы я так сделал, то получился бы список, начало которого выглядело бы слишком скучным, поскольку все машины при значениях n меньших 11 не дают ничего, кроме □, а для $n = 11$ мы имеем просто нули. Дабы сделать начало этой таблицы более интересным, я предположил, что мы использовали некую гораздо более эффективную систему кодирования. Фактически, я просто присвоил ячейкам более или менее произвольные значения, только чтобы дать вам общее представление о том, как может выглядеть эта таблица.

На самом деле нам не требуется, чтобы эта таблица была построена путем вычислений, скажем, с помощью некоторого алгоритма. (На самом деле, как мы увидим далее, такого алгоритма и не существует.) Достаточно просто представить себе, что каким-то образом истинный список попал в наше распоряжение, возможно, с помощью Бога[156]! Если бы мы попытались получить эту таблицу с помощью вычислений, то именно символы □ вызвали бы затруднения, поскольку мы не могли бы с уверенностью сказать, когда в той или иной ячейке должен быть помещен символ □ – ведь соответствующие вычисления никогда не заканчиваются!

Тем не менее искомую таблицу можно построить с помощью вычислительной процедуры, если использовать нашу гипотетическую машину H, поскольку она могла бы определить, где на самом деле появляются значения □. Однако вместо этого мы используем машину H для того, чтобы избавиться от появления значений □ в таблице, заменив их во всех случаях нулями. Это достигается за счет вычисления значения $H(n; m)$, предваряющего действие T_n на m, после чего мы позволим T_n производить соответствующие действия, только если $H(n; m) = 1$ (т.е. только тогда, когда вычисление $T_n(m)$ приводит к определенному результату), и будем просто записывать в соответствующую ячейку 0 при $H(n; m) = 0$ (т.е. если $T_n(m) =$ □). Мы можем записать эту новую процедуру, представляющую собой последовательное действие $H(n; m)$ и $T_n(m)$, как

$$T_n(m) \times H(n; m).$$

(Здесь я использую общепринятую в математике договоренность о последовательности выполнения действий, согласно которой операция, записанная справа, должна выполняться первой. Обратите внимание, что в этом случае можно символически записать □ × 0 = 0.)

Теперь таблица принимает следующий вид:

$n \downarrow$ \ $m \rightarrow$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	…
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	…
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	…
3	0	2	0	2	0	2	0	2	0	…
4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	…
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	…
6	0	0	1	0	2	0	3	0	4	…
7	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
8	0	1	0	0	1	0	0	0	1	…
.	.				.				.	
.	.				.				.	
.	.				.				.	

Заметьте, что, исходя из предположения существования машины H, мы получаем ряды таблицы, состоящие из вычислимых последовательностей. (Под «вычислимой последовательностью» я понимаю бесконечную последовательность, элементы могут быть найдены один за другим посредством некоего алгоритма; это означает, что существует некоторая машина Тьюринга, которая, будучи применена поочередно к натуральным числам $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...$, производит члены рассматриваемой последовательности.) Обратите внимание на следующие два факта относительно этой таблицы. Во-первых, любая вычислимая последовательность натуральных

[156] **В.Э.:** Обозначим эту «данную Богом» матрицу как *М.

чисел должна появиться где-то (может быть, далеко не сразу) среди рядов таблицы.[157] Это свойство выполнялось уже и для исходной таблицы, содержавшей значения □. Мы просто добавили несколько рядов, чтобы заменить «фиктивные» машины Тьюринга (т.е. такие, которые приводят к □ хотя бы в одном случае). Во-вторых, считая, что машина Тьюринга H существует, мы получили таблицу вычислительным путем (т.е. с помощью некоторого определенного алгоритма), а именно, посредством процедуры $T_n(m) \times H(n;\ m)$. Иными словами, существует некая машина Тьюринга Q, применение которой к паре чисел $(n,\ m)$ дает значение соответствующей ячейки таблицы. Для этой машины числа n и m на ленте можно кодировать таким же образом, как и для H, т.е. мы имеем

$$Q(n;\ m) = T_n(m) \times H(n;\ m).$$

Воспользуемся теперь разновидностью остроумного и мощного приема, так называемого диагонального процесса Георга Кантора. (Мы познакомимся с оригинальным вариантом этого метода в следующей главе.) Рассмотрим значения в ячейках, расположенных на главной диагонали таблицы – диагональные элементы (матрицы), – выделенные **жирным** шрифтом:

0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	**0**	0	0	0	0	0	0	0
1	1	**1**	1	1	1	1	1	1
0	2	0	**2**	0	2	0	2	0
1	1	1	1	**1**	1	1	1	1
0	0	0	0	0	**0**	0	0	0
0	0	1	0	2	0	**3**	0	4
0	1	2	3	4	5	6	**7**	8
0	1	0	0	1	0	0	0	**1**
.				.				.
.				.				.
.				.				.

157 **В.Э.:** Ну вот, здесь и раскрывается вся ущербность всех этих построений! Допустим, как и в PENRS1§2.5 [*перепечатан выше*], что «в нашей вселенной» всего пять чисел (0, 1, 2, 3, 4), т.е. m может принимать только эти значения. Тогда одних только перестановок P_m этих чисел (а они все вычислимы и, значит, должны находиться в строках пенроузовской таблицы!) будет 5! (факториал от 5, т.е. 120 штук!). А плюс еще случаи, когда элементы последовательности повторяются, а плюс еще когда они все одинаковы как в пенроузовской строке 2 (одних этих будет столько же, сколько и m!), а плюс еще когда разными машинами Тьюринга выдаются одинаковые последовательности, как в пенроузовских строках 0 и 1... Эта таблица (если она претендует на то, что содержит все вычислимые последовательности) никогда не будет квадратной – вниз она намного намного длиннее, чем вправо. И при росте m, и при $m \to \infty$ всё это будет только усугубляться. Следовательно, диагональный процесс никогда не охватит все строки таблицы. Он упрется в правый край таблицы, не достигнув ее нижнего края. И построенный диагональным процессом новый элемент будет в таблице (только в неохваченной диагональным процессом ее части), и никакого противоречия получено не будет, и всё «доказательство» Тьюринга–Пенроуза полетит к чертовой матери... (Всё как обычно при диагональном процессе – надоело уже и разбирать все эти вариации). Но зато пенроузовская процедура Q не сможет обработать эту таблицу и умножить $T_n(m) \times H(n;\ m)$. Она не может сначала обработать первую строку, уйти в бесконечность, перепрыгнуть через нее, потом взяться за вторую строку, уйти во вторую бесконечность, снова перепрыгнуть через нее и т.д. Она может обрабатывать таблицу только «с уголка»: сначала взять элемент n=0, m=0; потом n=0, m=1; потом n=1, m=1; потом n=1, m=0; потом n=0, m=2; потом n=1, m=2; потом n=2, m=2; потом n=2, m=1; потом n=2, m=0 и т.д. Но обработанная таким образом матрица будет квадратной. Она не охватит всю исходную таблицу, и если в ней (в этой квадратной обработанной матрице) пускать диагональный процесс, то он действительно охватит все ее строки и построит элемент, в ней не содержащийся. Но никакого противоречия всё равно не будет, потому что эта квадратная обработанная процедурой Q матрица (в отличие от исходной вытянутой) действительно не содержит все последовательности. Из всего этого, разумеется, не следует, что процедура $H(n;\ m)$ существует. Она не существует, но просто все эти путанные «рассуждения» не доказывают этого. В моем старом учебнике логики (Г.И. Челпанов, 1947), по которому во времена моего младенчества мой отец преподавал логику в гимназии, эта ситуация называется «утверждение формально неправильное, но материально правильное». Однако больше всего меня удивляет то, что всю эту белиберду с чрезвычайно путанными понятиями Пенроуз (и другие математики!) могут воспринимать всерьез и делать из этого какие-то выводы, относящиеся к нашему реальному миру. Это же какое-то наваждение, гипноз, помешательство!

Эти элементы образуют некоторую последовательность 0, 0, 1, 2, 1, 0, 3, 7, 1, ..., к каждому члену которой мы теперь прибавим единицу:

1, 1, 2, 3, 2, 1, 4, 8, 2, ...

Это, безусловно, механическая процедура, и, поскольку наша таблица была получена путем вычислений, мы получим новую вычислимую последовательность $1 + Q(n; n)$, т.е.

$$1 + T_n(n) \times H(n; n)$$

(с учетом того, что для диагональных элементов $n = m$). Но наша таблица содержит в себе все вычислимые последовательности, поэтому она должна содержать также и новую последовательность. Однако это невозможно! Ведь наша новая последовательность отличается от первого ряда первым элементом, от второго – вторым, от третьего – третьим, и т.д. Налицо явное противоречие, которое и устанавливает справедливость доказываемого нами утверждения о том, что машина Тьюринга *H* на самом деле не существует! Иными словами, не существует универсального алгоритма для решения вопроса об остановке произвольной машины Тьюринга.

Можно построить доказательство и по-другому. Для этого заметим, что из предположения о существовании *H* следует и существование машины Тьюринга с номером *k*, реализующей алгоритм (диагональный процесс!) $1 + Q(n; n)$, т.е. можно записать

$$1 + T_n(n) \times H(n; n) = T_k(n).$$

Но если мы подставим в это выражение $n = k$, то получится

$$1 + T_k(k) \times H(k; k) = T_k(k).$$

Мы приходим к противоречию, потому что если $T_k(k)$ останавливается, то мы имеем невыполнимое равенство

$$1 + T_k(k) = T_k(k)$$

(поскольку $H(k; k) = 1$), тогда как в случае безостановочного действия $T_k(k)$ (т.е. когда $H(k; k) = 0$) мы получаем не менее абсурдное соотношение

$$1 + 0 = \square.$$ [158]

Вопрос о том, останавливается ли конкретная машина Тьюринга или нет, представляет собой совершенно четко определенную математическую задачу (а ранее мы уже видели, что, наоборот, различные важные математические задачи могут быть сведены к вопросу об остановке машины Тьюринга). Таким образом, доказав, что не существует алгоритма для решения вопроса об остановке машины, Тьюринг показал (также как и Черч, который использовал свой собственный и весьма отличающийся подход), что не может быть и общего алгоритма для решения математических задач. Проблема разрешимости Гильберта не имеет решения!

Это не означает, что в каждом отдельном случае мы не в состоянии выяснить справедливость (или, наоборот, несостоятельность) некоторого конкретного математического утверждения или определить, остановится ли данная машина Тьюринга. С помощью интуиции, искусных технических приемов или же опираясь просто на здравый смысл, мы, вероятно, могли бы получить ответ на такие вопросы в частных случаях. (Так, например, если перечень инструкций некоторой машины Тьюринга не включает ни одной команды STOP или же, наоборот, состоит только из таких команд, то одного здравого смысла[159] достаточно для решения вопроса о ее остановке!) Но не существует ни одного алгоритма, который позволял бы решать любую математическую задачу или давал ответ на вопрос об остановке любой машины Тьюринга при любых вводимых в нее числах.

Может показаться, что мы пришли к выводу о существовании по крайней мере нескольких неразрешимых математических вопросов. Однако это совсем не так! Мы не показали, что существует какая-то необычайно громоздкая машина Тьюринга, для которой (в некотором абсолютном смысле) невозможно решить вопрос об остановке при ее работе с каким-то особенно громоздким числом – в действительности, всё как раз наоборот, как мы сможем скоро убедиться. Мы вообще ничего не говорили о неразрешимости какой-то отдельной задачи, а только лишь об алгоритмической неразрешимости классов задач. В каждом конкретном случае ответ будет либо «да», либо «нет», поэтому алгоритм для решения частной задачи, конечно, существует, а именно

---

[158] **В.Э.:** Эти противоречия доказывают только лишь то, что диагональ $Q(n; n)$ не может пересекаться с прямой T_k, как это и должно быть при вытянутой вниз матрице и при том, что T_k намеренно строит нечто отличное от того, что содержится в области, охваченной диагональю. Загипнотизированный Кантором и Тьюрингом Пенроуз не понимает, что полученным противоречием опровергается не существование $H(n; m)$, а существование $T_k(k)$.

[159] **В.Э.:** Однако этот «здравый смысл» опять же есть не что иное, как алгоритм («проверить, есть ли команды STOP в тексте программы (машины Тьюринга)» и т.п.).

алгоритм, который при применении к этой задаче просто дает ответ «да» или, может быть, «нет»! Трудность в данном случае состоит в том, что мы не знаем, какой именно из имеющихся алгоритмов применять в том или ином случае. Это вопрос об установлении математической истинности отдельного утверждения, но не об общем решении проблемы для целого класса утверждений. Очень важно сознавать, что сами по себе алгоритмы не доказывают математическую истину.[160] Решение о правомерности использования каждого алгоритма должно всегда приходить извне.

§2.8. Как превзойти алгоритм

Роджер Пенроуз. «Новый Разум Короля»; http://vekordija.narod.ru/R-PENRO1.PDF, стр. 80–83.

К вопросу о том, как установить истинность математических утверждений, мы вернемся позднее, в связи с теоремой Гёделя (см. главу 4)[161]. Пока же я бы хотел обратить ваше внимание на то, что доказательство Тьюринга носит гораздо более конструктивный характер и не столь негативно, как могло показаться из предыдущего изложения. Мы ведь не показали, что есть некая определенная машина Тьюринга, для которой абсолютно невозможно решить, останавливается она или нет. Более того, если внимательно проследить за доказательством, то выяснится, что для кажущихся «чрезвычайно сложными» машин сама процедура Тьюринга, использованная для их построения, неявным образом дает ответ! Посмотрим, как это происходит. Допустим, у нас есть алгоритм, который иногда позволяет определить, что машина Тьюринга не остановится. Вышеописанная процедура Тьюринга позволяет явно проследить за вычислениями машины Тьюринга в случае, когда этот конкретный алгоритм не дает ответа на вопрос об остановке вычислительного процесса. Однако тем самым эта процедура дает нам в этом случае возможность узнать ответ! Конкретная машина Тьюринга, за работой которой мы следим, и вправду никогда не остановится.

Чтобы подробно разобраться в этом вопросе, предположим, что у нас есть некий алгоритм, который иногда позволяет решить проблему остановки. Как и ранее, мы обозначим этот алгоритм (машину Тьюринга) через H, но теперь мы допускаем, что этот алгоритм не всегда может точно определить, что машина Тьюринга не остановится:

$$H(n; m) = \begin{cases} 0 \text{ или } \square, & \text{если } T_n(m) = \square, \\ 1, & \text{если } T_n(m) \\ & \text{останавливается.} \end{cases}$$

так что $H(n; m) = \square$ возможно в случае, когда $T_n(m) = \square$. Существует немало алгоритмов типа $H(n; m)$. (Например, $H(n; m)$ мог бы просто давать на выходе 1, как только машина $T_n(m)$ останавливается, хотя такой алгоритм едва ли представляет большой практический интерес!)

Мы можем повторить процедуру Тьюринга, следуя уже пройденным путем, с той только разницей, что теперь некоторые из «$\square$» останутся не замененными на нули. Как и ранее, применив диагональный процесс, получим

$$1 + T_n(n) \times H(n; n)$$

в качестве n-го элемента диагонали. (Мы будем иметь $\square$ каждый раз, когда $H(n; n) = \square$. Отметим, что $\square \times \square = \square$, $1 + \square = \square$.) Это безупречно алгоритмизованное вычисление, поэтому оно может быть произведено некоторой машиной Тьюринга, скажем k-ой, и тогда мы получим

$$1 + T_n(n) \times H(n; n) = T_k(n).$$

Для k-го диагонального элемента (т.е. $n = k$) мы имеем

$$1 + T_k(k) \times H(k; k) = T_k(k).$$

Если вычисления $T_k(k)$ останавливаются, то мы приходим к противоречию (в этом случае $H(k; k)$ должно равняться единице, но тогда возникнет невыполнимое равенство: $1 + T_k(k) = T_k(k)$). Значит, $T_k(k)$ не может остановиться, т.е.

$$T_k(k) = \square.$$

---

[160] **В.Э.:** Это уже общие и неправильные интерпретации всего предыдущего. Если «математическую истину» вообще можно установить, то только по тому или иному алгоритму.

[161] http://vekordija.narod.ru/R-PENRO2.PDF, стр.35.

Но алгоритм не может этого «знать», потому что, если бы он давал $H(k; k) = 0$, мы снова пришли бы к противоречию (мы получили бы тогда неверное соотношение 1 + 0 = ☐).

Таким образом, если мы можем отыскать k, то мы знаем, как построить вычислительную процедуру, для которой алгоритм не дает решения проблемы остановки, но нам ответ известен!

* * *

2010.12.11 22:19 суббота

В.Э.: Так рассуждает Пенроуз. А теперь посмотрим, как выглядят точные рассуждения. Как обычно, будем доверять математической индукции, а не диагональному процессу (как известно, они находятся в непримиримом противоречии – см. PENRS1 §2.5)[162].

2011.01.05 15:21 среда

Следуя математической индукции, сначала (1) посмотрим, как это всё выглядит при конечном $m = z–1$ ($z–1$ – максимальное значение m, которое может подаваться на вход алгоритмам – машинам Тьюринга T_n – или выдаваться ими), а потом (2) посмотрим, что произойдет, когда $z \to \infty$.

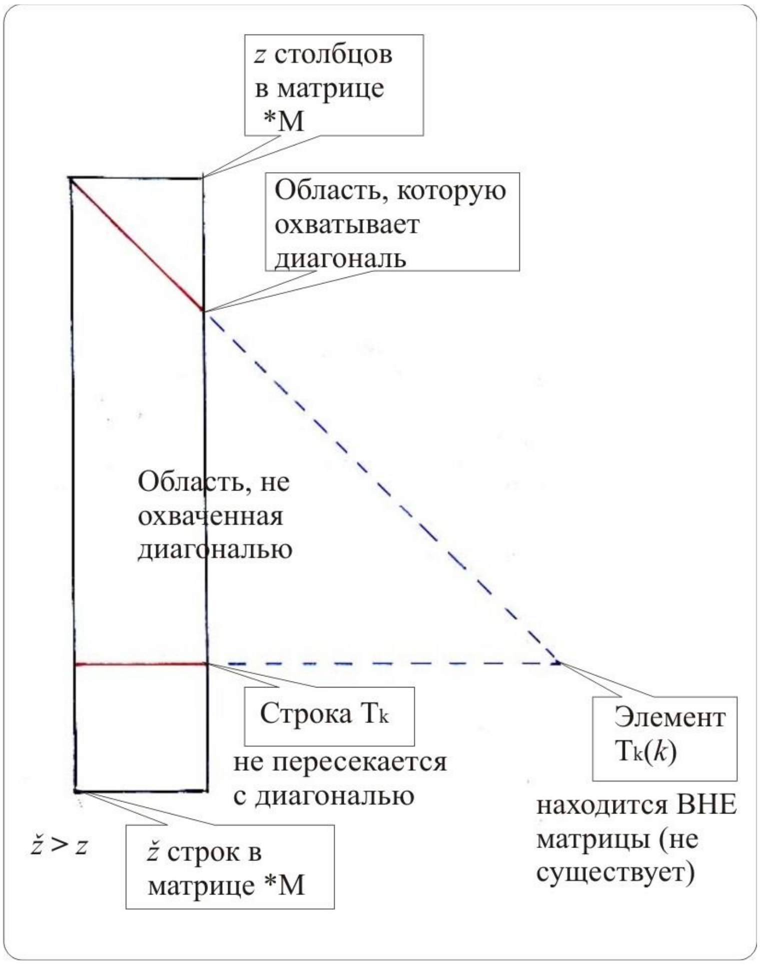


Рис. VE3. Диагональный процесс в матрице *M, данной Богом Пенроузу

Тогда «данная Богом» матрица *M будет иметь «вправо» ширину z колонок, а «вниз» некоторую длину $ž$ [163] строк. Так как эта матрица *M включает в себе ВСЕ последовательности чисел, какие только могут быть созданы алгоритмическим путем (машинами Тьюринга) из чисел

[162] Этот параграф был перепечатан выше.
[163] Читается: «ж».

в пределах от 0 до $z – 1$, то очевидно, что $\check{z} >> z$ ($\check{z}$ намного больше z). Одних только перестановок чисел m среди $\check{z}$ строк будет $z!$ (факториал от z). Графически ситуация изображена на Рис. VE3.

Далее, очевидно, что диагональ, по которой будет строиться «отличающаяся от всех существующих» (и якобы вызывающая противоречие) строка k матрицы, – эта диагональ не охватывает все $\check{z}$ строки матрицы, а только z строк. Так как k намеренно строится такой, чтобы она не совпадала ни с одной из строк, охваченных диагональю, то, естественно, строка k находится (если уж матрица вообще содержит все строки!) в той части матрицы, которую «диагональный процесс» не охватил.

Предположение, что существует $T_k(k)$, то есть, что существует результат машины T_k при входном значении k, естественно, должно приводить к противоречиям, потому что $k > z$ (то есть, это значение m недопустимо для принятых нами ограничений) и потому, что диагональ и строка k не пересекаются.

Все полученные противоречия доказывают недопустимость предположения, что существует $T_k(k)$, а не предположения, что существует машина $H(n; m)$. Всё это очевидно даже из «визуализации» рисунка VE3.

Переносить недопустимость $T_k(k)$ на недопустимость $H(n; m)$ – это логическая (и математическая) ошибка, причем чрезвычайно грубая!

Но Пенроуз ее совершает!

А далее пусть $z \to \infty$. Что изменится?

Ничего. Матрица растягивается еще больше, диагональ растет бесконечно вправо и вниз (но всегда гораздо медленнее, чем растягивается матрица), строка k летит вниз, тоже растягиваясь в длину до бесконечности, но, тем не менее, всегда оставаясь в той части матрицы, которую не охватывает диагональ. Элемент $T_k(k)$ никогда не существует, и предположение о его существовании всегда будет приводить к указанным Пенроузом противоречиям, а о существовании машины H всё это не говорит абсолютно ничего.

Можно оценить соотношение роста матрицы вправо и вниз. Количество столбцов растет как $z \to \infty$. Зависимость количества строк от z оценить труднее, так как состав множества машин T_n не очень четко определен, но ясно что в нем есть подмножество простых перестановок z чисел. Оценим хотя бы соотношение количества столбцов с этим подмножеством строк. К какому пределу будет стремиться это соотношение при $z \to \infty$? Это соотношение $z/z! = 1/(z–1)!$

В этой дроби переменная, стремящаяся к бесконечности, даже не остается в числителе, а лишь в одном знаменателе – так что и правило Лопиталя применять незачем. Чему равен предел дроби $1/(z–1)!$, когда $z \to \infty$? А эта дробь характеризует ту часть матрицы, которую будет охватывать диагональный процесс!

Чтобы рассуждения Пенроуза (а перед ним Тьюринга) считать состоятельными, нужно предполагать, что при бесконечном z ситуация изменится: что диагональ вдруг охватит всю матрицу, что $T_k(k)$ вдруг окажется в пределах матрицы в результате пересечения диагонали и строки T_k ... Интересно, как Пенроуз и Тьюринг согласовали бы свое видение ситуации с математической индукцией, с правилом Лопиталя – вообще с духом той, старой и достоверной математики, которая создала дифференциальное и интегральное исчисление?

Но по вопросу такого согласования мне никогда не приходилось слышать ничего другого, кроме тупого утверждения доктора Подниекса {CANTO2.2299}[164], что правило Лопиталя им с Кантором не нужно.

Итак, всё здесь предельно ясно, и непонятно только одно: как могут математики такого ранга как Пенроуз всего этого не видеть, не понимать и принимать всерьез эту Канторо-Тьюринговскую галиматью!? Какое ослепление должно на них найти, как должен быть затуманен и заворожен их разум, чтобы рассуждать так, как они рассуждают, когда истина совершенно очевидна и кристально ясна!

Так что Пенроузу «превзойти алгоритм» все-таки не удалось.

(Конец вставки; далее продолжается текст Пенроуза)

* * *

А как нам найти k? Это непростая задача. Необходимо тщательно изучить конструкцию $H(n; m)$ и $T_n(m)$ и понять, как в точности действует $1 + T_n(n) \times H(n; n)$ в качестве машины

[164] http://vekordija.narod.ru/R-CANTO2.PDF, стр.117.

Тьюринга. Затем надо определить номер этой машины, который и есть k. Конечно, это выполнить трудно, но вполне возможно.[165] Из-за этих трудностей вычисление $T_k(k)$ нас бы вовсе не интересовало, не будь она специально предназначена для доказательства неэффективности алгоритма H! Важно то, что мы получили строго определенную процедуру, которая для любого наперед заданного алгоритма H позволяет найти такое k, что для $T_k(k)$ этот алгоритм не может решить проблему остановки, т.е. мы тем самым превзошли его. Возможно, мысль о том, что мы «умнее» каких-то алгоритмов, принесет нам некоторое удовлетворение!

На самом деле, упомянутая процедура настолько хорошо определена, что мы могли бы даже найти алгоритм для нахождения k по заданному H. Поэтому, прежде чем мы «погрязнем» в самодовольстве, мы должны осознать, что этот алгоритм может улучшить H,[166] поскольку он, по сути, «знает», что $T_k(k) = \square$, – или все-таки нет? В предыдущем изложении было удобно использовать антропоморфный термин «знать» по отношению к алгоритму. Однако не мы ли в конечном счете «знаем», тогда как алгоритм просто следует определенным нами правилам? А может быть мы сами просто следуем правилам, запрограммированным в конструкции нашего мозга и в окружающей нас среде? Эта проблема затрагивает не только алгоритмы, но и то, как мы выносим суждения об истинности и ложности. К этим важнейшим проблемам мы вернемся позднее. Вопрос о математической истине (и ее неалгоритмической природе) будет рассмотрен в главе 4.[167] На данный момент мы, по крайней мере, получили некоторое представление о значении слов «алгоритм» и «вычислимость» и достигли понимания некоторых из относящихся к ним вопросов.

§3.3. Сколько же всего действительных чисел?

Роджер Пенроуз. «Новый Разум Короля»; http://vekordija.narod.ru/R-PENRO2.PDF, стр. 16–20.

Давайте остановимся на минутку, чтобы оценить всю колоссальность обобщения при переходе от рациональных чисел к действительным.

Вначале может показаться, что целых чисел больше, чем натуральных, поскольку каждое натуральное число является целым, в то время как некоторые целые числа (а именно отрицательные) натуральными не являются. Аналогично может создаться впечатление, что дробей больше, чем целых чисел. Однако это не так.[168] Согласно мощной и очень красивой теории бесконечных чисел, разработанной в конце XIX века Георгом Кантором – исключительно самобытным немецким математиком русского происхождения,[169] – общее число дробных чисел, общее

---

[165] Фактически, самую трудную часть мы уже выполнили, когда построили универсальную машину Тьюринга U, поскольку она позволяет нам записывать $T_n(n)$ как машину Тьюринга, действующую на n.

[166] Мы могли бы, конечно, «обыграть» и этот модифицированный алгоритм, просто за счет повторного применения предыдущей процедуры. Тогда мы сможем использовать эти вновь полученные знания для дальнейшего улучшения алгоритма, который мы, в свою очередь, снова превзойдем; и так далее. Тип рассуждений, в который выливается этот повторяющийся процесс, будет рассмотрен нами в связи с теоремой Гёделя в главе 4 (с. 99).

[167] http://vekordija.narod.ru/R-PENRO2.PDF, стр.54.

[168] **В.Э.:** Больше или не больше целых чисел, чем натуральных, и больше или не больше дробных чисел, чем тех же натуральных, – это зависит от того, как мы здесь определяем понятия «больше» или «одинаково», как мы измеряем их «количество». Классическая математика, создавшая алмазный фонд этой науки – дифференциальное и интегральное исчисление – всегда рассматривала математические соотношения как результаты некоторых процессов (функций). Если функция $\varphi(x)$ и функция $\psi(x)$ при $x \to \infty$ обе тоже стремились к бесконечности, то соотношение $\varphi(x) / \psi(x)$, т.е. соотношение ∞/∞ отнюдь не предполагалось обязательно равным 1, а определялось по (золотому!) правилу Лопиталя соотношением производных функций. Если мы сохраняем этот дух классической математики и смотрим на числа как на результат некоторых процессов (а они и есть потенциальные продукты программ, т.е. процессов!), то $\infty/\infty \neq 1$, а $\infty/\infty = 2$ для соотношения целых и натуральных чисел и $\infty/\infty = \infty$ для соотношения дробных и натуральных чисел. «Великое открытие» Кантора состояло в том, что он вводом своего «взаимно-однозначного соответствия» установил, что $\infty/\infty = 1$ (всегда!), то есть, он принял такой постулат и тем самым отступился от духа классической математики, пришедшей в этом месте к правилу Лопиталя уже примерно за 200 лет до Кантора. Оценку этому постулату Кантора мы дадим ниже.

[169] **В.Э.:** Георг Кантор был сыном датчанина (лютеранина) и немки (католички), родившимся в России, в Санкт-Петербургской колонии иностранных торговцев, но в 11 лет увезенный родителями в Германию, где и прожил всю остальную жизнь. Кантор был психически болен, страдал маниакально-

количество всех целых чисел и число всех натуральных чисел равны одному и тому же бесконечному числу, обозначаемому $\aleph_0$ («алеф-нуль»). (Удивительно, что похожая идея была частично предвосхищена еще за 250 лет до этого в начале XVII века великим итальянским физиком и астрономом Галилео Галилеем. Мы вспомним о некоторых других достижениях Галилея в главе 5.[170]) Равенство количества целых чисел количеству натуральных чисел видно из следующего взаимно-однозначного соответствия:

Целые числа		Натуральные числа
0	$\leftrightarrow$	0
-1	$\leftrightarrow$	1
1	$\leftrightarrow$	2
-2	$\leftrightarrow$	3
2	$\leftrightarrow$	4
-3	$\leftrightarrow$	5
3	$\leftrightarrow$	6
-4	$\leftrightarrow$	7
.	.	.
.	.	.
.	.	.
$-n$	$\leftrightarrow$	$2n-1$
n	$\leftrightarrow$	$2n$
.	.	.
.	.	.
.	.	.

Обратите внимание,[171] что каждое целое число (в левом столбце) и каждое натуральное число (в правом столбце) встречаются один и только один раз в своем списке. В канторовской теории множеств именно существование такого рода взаимно-однозначного соответствия устанавливает факт равенства числа объектов в левом столбце числу объектов в правом столбце. Таким образом, число целых чисел действительно равно числу натуральных чисел. В данном случае это число бесконечно, но это не имеет значения. (Единственное необычное свойство бесконечных чисел состоит в том, что даже если мы исключим некоторые элементы одного из списков, мы можем установить взаимно-однозначное соответствие между элементами двух списков.) Аналогичным, хотя и несколько более сложным образом, устанавливается взаимно-однозначное соответствие между дробными и целыми числами. (Для этого можно использовать какой-либо из способов представления пар[172] натуральных чисел – числителей и знаменателей – через отдельные натуральные числа; см. главу 2, с.50.)[173] Множества, которые можно поставить во взаимно-однозначное соответствие с рядом натуральных чисел, называются счетными; таким

депрессивным психозом; в депрессивной фазе он прекращал работу и ему давали отпуска на его профессорской работе в Галльском университете и помещали в психиатрическую клинику (каковая имелась при том же университете), а в маниакальной фазе своей болезни Кантор сочинял разные неправильные «теории», например теорию бесконечных множеств и теорию о том, что Шекспира не существовало, а его сочинения написал Бэкон (в ранней стадии канторовской болезни) или что не существовало ни Шекспира, ни Бэкона, а их сочинения написал какой-то неизвестный тайный гений (в поздней стадии канторовской болезни). Болезнь Кантора может вызвать сочувствие, но сочувствия не может вызвать тот факт, что маниакальный бред психически больного человека был принят в качестве «научной истины» такой наукой как математика (!!!). Георг Кантор умер в психиатрической клинике своего университета.

[170] http://vekordija.narod.ru/R-PENRO3.PDF, стр.15.

[171] **В.Э.:** Больше всего, читатель, обратите внимание на то, что элементы, перечисленные в левом списке, – конечны (т.е. в каждой строке списка имеется только один элемент). Лишь поэтому (а вовсе не потому, что строк в списке недостаточно много!) здесь нельзя проводить знаменитый «диагональный процесс» и обнаруживать ценнейший вывод, что не все целые числа перенумерованы натуральными числами.

[172] **В.Э.:** Обратите внимание, читатель, что теперь в перенумерованном списке в каждой его строке содержится уже пара элементов, т.е. их два. Это больше, чем в предыдущем случае, но всё же еще всего лишь конечное число, и великолепный диагональный процесс пока провести невозможно.

[173] http://vekordija.narod.ru/R-PENRO1.PDF, стр.61.

образом, счетные бесконечные множества – это множества, состоящие из $\aleph_0$ элементов. И, как мы только что убедились, множество целых чисел, равно как и множество дробных чисел, является счетным.[174]

Существуют ли множества, не являющиеся счетными? Несмотря на расширение натуральной системы чисел сначала целыми, а затем и рациональными числами, общее число рассматриваемых объектов не увеличилось. Как мы убедились, число объектов во всех случаях осталось счетным. У читателя теперь может создаться впечатление, что все бесконечные множества счетны. Это не так, поскольку ситуация меняется коренным образом[175] при переходе к действительным числам. Одним из замечательных достижений Кантора явилось доказательство того, что действительных чисел больше, чем натуральных. При этом Кантор применил так называемый диагональный процесс, который упоминался в главе 2[176] и который Тьюринг использовал в своем доказательстве неразрешимости проблемы остановки для машин Тьюринга. Доказательство Кантора, как и более позднее доказательство Тьюринга, – это доказательство от противного. Предположим, что утверждение, справедливость которого мы хотим установить, на самом деле ложно, то есть множество действительных чисел счетно. Тогда множество действительных чисел в интервале от 0 до 1 должно быть заведомо счетным и должен существовать какой-нибудь список,[177] устанавливающий взаимно-однозначное соответствие между рассматриваемым множеством действительных чисел и множеством натуральных чисел, наподобие вот этого:

Натуральные числа		Действительные числа
0	↔	0,10357627183...
1	↔	0,14329806115...
2	↔	0,02166095213...
3	↔	0,43005357779...
4	↔	0,92550489101...
5	↔	0,59210343297...
6	↔	0,63667910457...
7	↔	0,87050074193...
8	↔	0,04311737804...
9	↔	0,78635081150...
10	↔	0,40916738891...
.	.	.
.	.	.
.	.	.

[174] **В.Э.:** На самом деле «счетны» ВСЕ бесконечные множества. Кантор установил постулат, что $\infty/\infty \equiv 1$, и несчетных множеств не существует. Иллюзию существования «несчетных» множеств создает только «диагональный метод». А этот процесс можно будет проводить, как только количество элементов в строке «пронумерованного списка» станет бесконечным. Обратите внимание читатель: возможность проведения диагонального процесса не имеет никакого отношения к количеству строк в списке (о котором после этого процесса будут делаться выводы), а имеет отношение только к количеству элементов в самой строке.

[175] **В.Э.:** Верно! Ситуация меняется коренным образом: теперь в каждой строке стало бесконечное количество элементов (цифр)! Ур-ра-а-а!!! Теперь можно проводить диагональный процесс! – Но что менялось-то? Количество строк? Или длина строки? Ясно, что решающим было изменение длины строки. А выводы будут делаться о количестве строк! Но, читатель, это ведь логическая ошибка чрезвычайной грубости: выводы, которые должны относиться к длине строки, переносить на количество строк!

[176] В §2.7, который перепечатан выше.

[177] **В.Э.:** Однако элементарно очевидно, что этот список, если он претендует на то, что он содержит ВСЕ «действительные числа» (точнее, их нотаты) указанного интервала, то он должен иметь вправо длину n цифр, а вниз длину 10^n строк. Если он имеет не такое соотношение длин, то (вариант 1) он не содержит все требуемые «числа», а если он содержит все «числа», то (вариант 2) соотношение длин таково ($n/10^n$). Теперь выбирайте, мистер Пенроуз, какой вариант Вы подразумеваете? (Или никакой не подразумеваете: в тумане пребываете?). Постулат Кантора ($\infty/\infty \equiv 1$) заставляет Вас полагать, что $n/10^n = 1$ и что $10^n = n$, но это неминуемо приведет Вас к противоречиям.

Жирным шрифтом выделены диагональные десятичные знаки. В данном случае эти цифры равны:

$$1, 4, 1, 0, 0, 3, 1, 4, 8, 5, 1, \ldots$$

Метод диагонального процесса состоит в построении действительного числа (в интервале от 0 до 1), чье десятичное разложение (после десятичной запятой) отличается в каждом разряде от соответствующего числа приведенной выше последовательности. Для определенности положим, что цифра данного разряда равна 1, если цифра соответствующего разряда на диагонали отлична от 1, и равна 2, если цифра на диагонали равна 1. Таким образом, в рассматриваемом случае получается такое действительное число:

$$0{,}21211121112\ldots .$$

Это действительное число не может быть в списке,[178] поскольку оно отличается от первого числа в первом десятичном разряде (после десятичной запятой), от второго числа – во втором разряде, от третьего числа – в третьем разряде и т.д. Таким образом, мы приходим к противоречию,[179] поскольку полагали, что рассматриваемый список содержит <u>все</u> действительные числа в интервале от 0 до 1. Из этого противоречия следует истинность утверждения, которое нам требовалось доказать, – а именно, что не существует взаимно-однозначного соответствия между множеством действительных чисел и множеством натуральных чисел и, соответственно, что число действительных чисел <u>больше</u>[180] числа рациональных чисел и не является счетным.

Число действительных чисел равно бесконечному числу, обозначаемому *C*. (Здесь *C* является сокращенным обозначением слова континуум – другого названия системы действительных чисел.) Может возникнуть вопрос, почему мы не обозначаем это число, например, $\aleph_1$. Символ $\aleph_1$ на самом деле обозначает следующее за $\aleph_0$ бесконечное число, а вопрос о том, верно

---

[178] **В.Э.:** Может или не может это «число» быть в списке – это зависит от того, какую концепцию своей таблицы Пенроуз принял из двух вариантов, предложенных ему в предыдущей моей сноске. Если он принял концепцию (1) (матрица квадратна), то полученного «числа» действительно нет в таблице, и этот результат опровергает предположение, что в квадратной матрице могут содержаться ВСЕ указанные числа. (К соотношению количества натуральных и действительных чисел этот результат никакого отношения не имеет). Если же Пенроуз принял концепцию (2) (длина матрицы вправо *n* цифр, а вниз – 10^n строк), то диагональный процесс охватил не всю таблицу, а только ее верхнюю часть, и «построенный» диагональным процессом элемент <u>имеется</u> в таблице, – но только в неохваченной диагональным процессом ее части. Так что надо просто мыслить четко и ясно, выбирать какой-нибудь один определенный вариант, а не пребывать в «суперпозиции» обоих вариантов сразу.

[179] **В.Э.:** Самое главное, фундаментальное, противоречие кроется, конечно, в собственно постулате Кантора о том, что $\infty/\infty \equiv 1$. Нет никакой необходимости вводить этот постулат. Ситуация предельно просто объясняется и ясна «как божий день» без него – и по «лезвию Оккама» этот постулат должен лететь в мусорную яму. Но вместо этого на его основе строится запутанное, уродливое здание некоего подобия «теории», не соответствующей никакой реальности ни физического, ни платоновского мира, «теории», <u>принципиально</u> лишенной возможности когда-либо быть где-нибудь примененной и приносить какую-либо пользу людям (за исключением, разумеется, тех профессоров, которые ею занимаются, выдавая это за «научную деятельность» и выманивая таким способом деньги от общества).

[180] **В.Э.:** С тем, что действительных чисел больше, чем рациональных, мы можем согласиться по тем же соображениям, по которым мы соглашаемся, что целых чисел больше, чем натуральных (т.е. – ДО введения постулата Кантора о том, что $\infty/\infty \equiv 1$). Однако, если мы рассуждаем в рамках системы, принявшей этот постулат, то у нас НЕТ оснований считать, что действительных чисел больше, чем рациональных. Мнение о таком превосходстве количества опирается, во-первых, на диагональный процесс, но возможность проведения этого процесса зависит НЕ от количества строк в «пронумерованном списке», а от бесконечности длины самих строк, и перенос выводов о длине строк на их количество представляет собой элементарную логическую ошибку. Во-вторых, с бесконечной длиной строк связана и другая особенность «списка действительных чисел»: его нельзя построить по <u>линейному</u> алгоритму, т.е. строя одну строку за другой (как строились списки целых и рациональных «чисел», состоящие из конечных строк). Чтобы таким же образом (одну строку за другой) строить список «действительных чисел», алгоритм должен был бы «перепрыгивать через бесконечность» каждой очередной строки, чтобы приступить к созданию следующей. Это обстоятельство облегчает адептам Кантора пребывать во мнении, что действительных чисел якобы больше рациональных даже если принят постулат Кантора ($\infty/\infty \equiv 1$). Но существуют <u>нелинейные</u> алгоритмы создания «всех действительных чисел», и их изучение показывает, что нет абсолютно никаких оснований полагать, что это множество чем-то принципиально отличается от других бесконечных множеств. <u>**Если принят постулат Кантора, то ВСЕ бесконечности одинаковы**</u>. (И, следовательно, нет ни необходимости, ни смысла этот постулат принимать).

ли утверждение $C = \aleph_1$ – это так называемая континуум-гипотеза, – представляет собой знаменитую и пока что нерешенную проблему.[181]

При этом следует отметить, что множество вычислимых чисел счетно.[182] Пересчитать их можно просто перечислив по порядку машины Тьюринга, порождающие действительные числа (то есть машины, последовательно порождающие цифры каждого разряда действительных чисел). При этом можно исключить из списка любую машину Тьюринга, порождающую действительное число, которое уже встречалось ранее в списке. Поскольку множество машин Тьюринга счетно, то, следовательно, счетным также должно быть и множество вычислимых действительных чисел. Почему же нельзя применить диагональный процесс к этому списку с тем, чтобы породить новое не включенное в список вычислимое число? Ответ состоит в том, что в общем случае невозможно с помощью вычислений решить, следует ли ту или иную машину Тьюринга включать в список, поскольку для этого мы должны были бы иметь возможность решить проблему остановки. Некоторые машины Тьюринга, начав порождение цифр действительного числа, могут зависнуть и оказаться уже не в состоянии выдать очередную цифру (поскольку они «не остановятся»). Не существует вычислимого способа, который позволил бы решить, какие именно машины Тьюринга зависнут таким образом. Это, в сущности, и есть проблема остановки. Значит, хотя метод диагонального процесса и породит некоторое действительное число, последнее не будет вычислимым. На самом деле, это рассуждение может использоваться для доказательства существования невычислимых чисел. Именно в этом ключе выдержано описанное в предыдущей главе тьюринговское доказательство существования классов алгоритмически неразрешимых задач. Другие области применения диагонального процесса будут рассмотрены дальше.

* * *

МОИ: Итак, я поместила в этот сборник основные тексты, в которых В.Э. высказывался о теории Кантора за последние три года. Есть много более старых текстов предыдущих 30 лет и есть менее значительные эпизоды последних трех лет, но это уже не помещается в настоящий выпуск Альманаха. Будем считать, что в основных чертах вопрос был нами разобран, – во всяком случае разобран в мере достаточной, чтобы кантористы могли начать отвечать, – если, конечно, они способны что-то ответить.

---

[181] **В.Э.:** Если мы о канторовском диагональном процессе знаем то, что мы теперь знаем, то «проблема континуума» сводится к вопросу: «Есть ли какое-нибудь промежуточное значение между *конечно* и *бесконечно* в отношении длины строк той матрицы, в которой мы (вслед за Пенроузом) проводили диагональный процесс?». (Великая научная проблема – ничего не скажешь!)

[182] **В.Э.:** Поскольку на самом деле множество действительных чисел тоже «счетно», то данное утверждение Пенроуза не представляет интереса.

Марина Ипатьева. А что на месте руин?

Столь расхваленная в бесчисленных сочинениях «теория множеств Георга Кантора» рухнула и лежит в дымящихся руинах.

Но что же мы видим за этими руинами – какая картина открывается нам сквозь пелену над развалинами? Какова подлинная реальность?

Опишу ее кратко в нескольких пунктах.

1. Всякую бесконечность создает бесконечно продолжающийся процесс. (Или точнее: процесс, который МОЖЕТ продолжаться бесконечно и прерывается только по внешним, а не по внутренним причинам).

2. Если процессы рассматриваются независимо друг от друга, то все они одинаково бесконечны и могут быть друг с другом сопоставлены (независимая генерация множеств, независимое соответствие, канторовское «взаимно однозначное соответствие»).

3. Если процессы рассматриваются как взаимно сцепленные, зависящие друг от друга, то бесконечности становятся неодинаковыми, а их соотношения определяются характером сцепления процессов. В классической математике это выражается раскрытием неопределенностей вида ∞/∞ по правилу Лопиталя. (Это зависимая генерация множеств, зависимое соответствие).

4. Примерами зависимой генерации могут послужить множества а) всех подмножеств данного множества; б) всех отображений данного множества; в) и другие случаи, в которых кантористы констатируют «превосходящую мощность» множеств. Если эта «превосходящая мощность» реальна, то она всегда вызвана зависимой генерацией.

5. Для отслеживания этих вещей достаточно различать:

   а) независимую генерацию или соответствие; и

   б) зависимую генерацию или соответствие.

6. При генерации множеств необходимо различать:

   а) линейную генерацию; и

   б) нелинейную генерацию.

7. При линейной генерации элементы создаются один за другим, могут быть выстроены в линейный ряд и «перенумерованы».

8. При нелинейной генерации элементы создаются иным способом, не могут быть выстроены в линейный ряд и «перенумерованы». В частности, нелинейная генерация нужна в том случае, если множество содержит две бесконечности: бесконечное число элементов, каждый из которых тоже бесконечен. Примером нелинейной генерации является Алгоритм А.

9. Кантористы никогда не рассматривали нелинейные генерации и, не имея о них представления, делали искаженные и фантастические выводы над продуктами таких генераций.

10. Сравнение «мощностей» множеств путем «взаимно однозначного» их сопоставления вообще является занятием пустым и бесплодным (о сравнении множеств всё уже выражает правило Лопиталя, когда установлен и аналитически дан характер взаимодействия процессов).

11. Однако, если такое сравнение «мощностей» всё-таки проводить, то характеристикой мощности должна быть возможность (или невозможность) сопоставить элементы множеств (а не возможность или невозможность их линейно перенумеровать.

12. Множество натуральных чисел МОЖЕТ быть поэлементно сопоставлено с множеством действительных чисел интервала между 0 и 1 (под «числами» понимая то, что под этим понимается в рассуждениях кантористов), хотя действительные числа этого интервала и не могут быть линейно перенумерованы. Эти множества могут быть поэлементно сопоставлены, если генерации их обоих проводятся по нелинейному алгоритму.

13. Кантористы совершают логическую ошибку, полагая, что для сравнения «мощности» множеств необходима не возможность сопоставления элементов, а возможность линейной их нумерации. (Точнее: они вообще не отличают возможность сопоставления элементов от возможности линейной нумерации).

14. Так как множество натуральных чисел может быть (при помощи нелинейного алгоритма) поэлементно сопоставлено с множеством действительных чисел интервала между 0 и 1, то они имеют одинаковую «мощность». Это находится в согласии с результатами диагонального процесса.

15. Если множество M состоит из элементов m, каждый из которых, в свою очередь, состоит из n элементов как знаков некоторого алфавита (и m перебирают все возможные комбинации этих знаков), то в таком множестве можно провести «диагональный процесс» по обычному канторовскому принципу и построить «отличающийся» элемент d. Однако, так как n конечно, то даже кантористы не осмеливаются утверждать, что элемента d нет в множестве M.

16. Чтобы кантористы осмелились это утверждать, необходимо, чтобы n стало бесконечным. Условием, чтобы проводить «диагональный процесс» по кантористским принципам, является бесконечность элементов m (как множеств). Но кантористы совершают логическую ошибку, количественную характеристику одного множества (m) приписывая другому множеству (M). По их мнению возможность проведения диагонального процесса свидетельствует о «превосходящей мощности» множества M.

17. Однако и при бесконечном n диагональный процесс не строит «отличающийся» элемент d (по тем же причинам, что и в пункте 15: при переходе к бесконечному n характер взаимоотношений в множестве M не изменяется).

18. При всей этой системе взглядов актуальные бесконечности признаются существующими. Но актуально бесконечные множества имеют такие свойства, какие они имели бы, если бы бесконечные процессы завершились. Их характеристики – это пределы всех характеристик, меняющихся при $n \to \infty$.

19. Эта система взглядов – завершенная и непротиворечивая. Она не столь экзотична, как теория канторизма, но правда всегда обыденнее сказки.

20. Канторизм отличается от этой системы взглядов только наличием логических ошибок. Весь канторизм построен на логических ошибках. Только в этом кратком описании были упомянуты следующие логические ошибки канторизма:

– не различает независимое и зависимое построение множеств, постоянно путается и прыгает с одного на другое;

– не различает линейную нумерацию и сопоставление элементов, постоянно путается и приписывает первому свойства второго;

– характеристику множества m приписывает множеству M (пункт 16);

– принимает, что при бесконечном n будет $a^n = n$ (когда $a \geq 2$) и поэтому считают диагональный элемент d отсутствующим в множестве M.

21. На самом деле в канторизме еще больше логических ошибок; они переливаются и переходят одна в другую, вместе образуя замкнутую систему, какие в психиатрии называются паранойяльными.

* * *

Всем российским (и русскоязычным за рубежом) математикам, до сих пор считавшим «канторовскую теорию множеств» состоятельной, предлагается ответить на материалы этого сборника по существу рассмотренных вопросов – без обычной для кантористов демагогии и трусости.

Помните, математики: до сих пор вы могли считаться добросовестно заблуждающимися.

Теперь же – если вы будете увиливать от ответа – вы станете мошенниками и ворами.

1 ноября 2013 года

Научно-популярное издание
«Мысли об Истине»
Выпуск № 5
Сформирован 1 ноября 2013 года

Все читатели приглашаются принять участие в создании альманаха МОИ и присылать свои статьи и заметки для этого издания по адресу: Marina.Olegovna@gmail.com. Если присланные материалы будут соответствовать направлению Альманаха и минимальным требованиям информативности и корректности, то они будут опубликованы в нашем издании.

Содержание