



NATURA CUPIDITATEM INGENUIT HOMINI VERI VIDENDI
Marcus Tullius Cicero
(Природа наделила человека стремлением к познанию истины)

Мысли Об Истине

Альманах «**МОИ**»
Электронное издание, ISBN 9984-688-57-7

Альманах «Мысли об Истине» издается для борьбы с лженаукой во всех ее проявлениях и в поддержку идей, положенных в основу деятельности Комиссии РАН по борьбе с лженаукой и фальсификацией научных исследований. В альманахе публикуются различные материалы, способствующие установлению научной истины и отвержению псевдонаучных заблуждений в человеческом обществе.

Альманах издается с 8 августа 2013 года
Настоящая версия тома выпущена **2015-12-08**

© 2014 Марина Ипатьева (оформление и комментарии)

Моррис Клайн. Утрата определенности (главы VIII–XV)

(Предыдущее в [МОИ 20](#))

VIII. Нелогичное развитие: у врат рая

Можно сказать, что ныне достигнута абсолютная строгость.¹

Анри Пуанкаре



Основатели так называемого критического движения в математике сознавали, что на протяжении более двух тысячелетий математики бродили в непролазных дебрях интуитивных представлений, правдоподобных аргументов, индуктивных рассуждений и формального манипулирования символами. Они предложили подвести прочный логический фундамент под те разделы математики, где он отсутствовал, исключить противоречия и те понятия, которые не имели четких определений, а также усовершенствовать обоснование таких разделов математики, как евклидова геометрия. Осуществление этой программы началось в 20-х годах XIX в., хотя в тот период критическое движение затронуло лишь немногих математиков. Когда исследования по неевклидовой геометрии приобрели более широкую известность, это, естественно, весьма стимулировало критическое

движение, поскольку были обнаружены существенные изъяны в структуре евклидовой геометрии: стало очевидным, что даже эта часть математики, слывшая нерушимым оплотом и недостижимым эталоном «истинной» строгости, нуждается в критическом пересмотре. А вскоре (1843) создание кватернионов поставило под сомнение уверенность, с которой математики обращались с вещественными и комплексными числами. Разумеется, многие математики по-прежнему пользовались нестрогими рассуждениями и, получая правильные результаты, убеждали себя в том, что как их доказательства, так и представления, изложенные на страницах учебников по математике, вполне обоснованны и логичны. Однако теперь подобной самоуверенностью страдали далеко не все.

Прекрасно понимая, что от претензий математики на роль носительницы абсолютных истин о реальном мире необходимо отказаться, критически мыслящие математики в то же время отдавали должное колоссальным достижениям своей науки в механике, акустике, гидродинамике, теории упругости, оптике, теории электромагнетизма, а также во многих отраслях техники; они по достоинству оценивали исключительную точность даваемых математикой предсказаний в этих областях. Математика сражалась под непобедимым знаменем истины, но одерживать победы ей позволяла какая-то скрытая и даже таинственная сила. Необычайная эффективность математических методов в естествознании, разумеется, нуждалась в объяснении (гл. XV), но отрицать мощь математики как инструмента познания и отмахиваться от нее не осмеливался никто. Без сомнения, эту мощь не следовало подрывать, погружаясь в лабиринты логических трудностей и противоречий. И хотя математики, поступившись строгими обоснованиями, нарушили собственные принципы доказательности, в их намерения отнюдь не

¹ Пуанкаре А. О науке. – М.: Наука, 1983, с. 164.

входило навсегда оставлять математику на прагматической основе. На карту был поставлен престиж математиков, ибо как иначе они могли провести грань, отделяющую их возвышенную деятельность от прозаической работы инженеров и ремесленников?

И некоторые математики вознамерились еще раз пройти по едва различимым следам прошлого, оставленным в процессе бурного развития своей науки, и проложить надежные пути к тому, что уже достигнуто. Свои усилия они решили прежде всего направить на построение (или критическую перестройку) оснований математики.

Чтобы привести в порядок здание математики, требовались решительные и крутые меры. К тому времени уже стало ясно, что не существует твердой почвы, на которой можно было бы без опасений заложить фундамент математики: столь надежная на первый взгляд опора на истину оказалась обманчивой. Но, может быть, гигантское здание математики станет устойчивым, если под него подвести прочный фундамент иного рода, представляющий собой полную систему четко сформулированных аксиом, определений и явных доказательств всех результатов, сколь бы интуитивно очевидными они ни казались? Основной акцент делался не на истинность утверждений, а на их логическую совместимость, т.е. непротиворечивость. Теснейшая зависимость между аксиомами и теоремами должна была придать устойчивость всему зданию математики. Отдельные части этого здания оказались бы накрепко стянутыми скрепами независимо от того, насколько прочно само оно опирается на землю. Так колеблется под напором ветра гигантский небоскреб, оставаясь тем не менее единой, цельной конструкцией от крыши до фундамента.

Математики начали с оснований математического анализа. Но поскольку математический анализ предполагает использование арифметики вещественных чисел и алгебры, не имевших обоснования, нелогичность такого шага станет более очевидной, если обратиться к следующей аналогии. Представьте себе, что владелец пятидесятиэтажного дома со множеством жильцов, битком набитого мебелью и различной утварью, узнав о шаткости здания, решает перестроить его – и начинает капитальный ремонт с двадцатого этажа!

Но при всей кажущейся нелогичности выбор отправной точки для перестройки математики всё же имел объяснение. К началу XIX в. различные типы чисел стали настолько привычными, что, хотя их использование и не было обосновано в рамках формальной логики, сами по себе свойства чисел не вызвали никаких сомнений. Не возникало трудностей и с применением евклидовой геометрии, хотя она и утратила ореол непогрешимости: безотказное служение человечеству на протяжении двух тысячелетий вселяло уверенность в те ее положения, которые не удавалось обосновать с помощью логики. Однако математический анализ был постоянной мишенью для критики. В этом обширном разделе математики встречались нестрогие доказательства, парадоксы и даже противоречия. К тому же многие результаты не были подкреплены даже практически.

В начале XIX в. проблема строгого обоснования математического анализа привлекла внимание трех мыслителей: священника, философа и математика Бернарда Больцано, Нильса Хенрика Абеля и Огюстена Луи Коши. К сожалению, Больцано жил в Праге, и его работы долгие годы оставались неизвестными. Абель умер в возрасте 27 лет и не успел продвинуться в обосновании анализа сколько-нибудь существенно. Коши работал в Париже, столице математического мира того времени, и к 20-м годам XIX в. имел репутацию одного из величайших математиков мира. Именно поэтому его заслуги в движении за обоснование математики получили наибольшее признание, именно поэтому он оказал наибольшее влияние на своих современников.

Коши решил построить обоснование математического анализа на понятии числа. Почему именно это понятие привлекло его внимание? Англичане, следуя Ньютону, пытались обосновать математический анализ, используя геометрию, – и потерпели неудачу. Коши понимал, что геометрия не может служить основой математического анализа. К тому же математики континентальной Европы, следуя Лейбницу, всегда использовали аналитические методы. Кроме того, хотя к 20-м годам XIX в. работы по неевклидовой геометрии не получили еще широкой известности, математики, по-видимому, были достаточно наслышаны о них, что побуждало их относиться к геометрии с некоторым недоверием. С другой стороны, в царстве чисел математики чувствовали себя достаточно уверенно вплоть до 1843 г., когда Гамильтон создал свои кватернионы; впрочем, даже это знаменательное событие первоначально не вызвало ни малейшего сомнения в том, что с вещественными числами все обстоит благополучно.

Коши поступил весьма мудро, решив построить математический анализ на понятии предела. Как это неоднократно случалось в истории математики, избранный Коши правильный подход уже предлагался ранее некоторыми проницательными умами. Еще в XVII в. Джон Валлис в «Арифметике бесконечно малых» (1655) и шотландский профессор Джеймс Грегори в «Истинной квадратуре окружности и гиперболы» (1667), а затем в XVIII в. Д'Аламбер со всей определенностью указали на понятие предела как на наиболее подходящую основу построения анализа.² Особое значение имели взгляды Д'Аламбера, базировавшиеся на трудах Ньютона, Лейбница и Эйлера. Свое понимание предела Д'Аламбер отчетливо сформулировал в статье «Предел», написанной для «Энциклопедии» (1751–1765):

Говорят, что одна величина есть предел другой величины, если вторая величина может приблизиться к первой настолько, что будет отличаться от нее меньше чем на любую заранее заданную сколь угодно малую величину, хотя величина, которая стремится к другой величине, никогда не может превзойти ее³...

Теория пределов составляет основу истинной метафизики дифференциального исчисления...

Д'Аламбер написал для «Энциклопедии» также статью «Дифференциал», в которой дал обзор работ Барроу, Ньютона, Лейбница, Ролля и других математиков и утверждал, что дифференциал – бесконечно малая величина, т.е. меньше любой «наперед заданной величины». Д'Аламбер счел нужным пояснить, что использует такую терминологию, следуя установившейся традиции. Что же касается самой терминологии, то она, по мнению Д'Аламбера, отличается еще большей краткостью и неясностью, чем подлежащее определению понятие. Правильная терминология и правильный подход должны быть основаны на понятии предела. Д'Аламбер критиковал Ньютона за то, что тот «объяснял» производную как скорость: ведь ясного представления о мгновенной скорости не существует, и такое «объяснение», по мнению Д'Аламбера, вводит в математику чисто физическое понятие – движение. В своем сочинении «Разное» (*Mélanges*, 1767) Д'Аламбер повторил: «Любая величина есть либо нечто, либо ничто. Если величина есть нечто, то ей не дано исчезнуть бесследно. Если величина есть ничто, то она исчезает полностью». Д'Аламбер указал также на понятие предела. Но сам он не развил свою идею о пределе применительно к обоснованию математического анализа, и его современники не смогли оценить ее по достоинству.

Концепцию предела можно также обнаружить в «Размышлениях о метафизике исчисления бесконечно малых» Карно, в работе Люилье от 1786 г., удостоенной премии Берлинской академии наук, и в работе Карно, не получившей премии, но тем не менее удостоенной похвального отзыва той же академии. Весьма возможно, что все эти работы оказали влияние на формирование взглядов Коши. Во всяком случае, во введении к знаменитому ныне «Курсу алгебраического анализа» (*Cours d'analyse algébrique*, 1821) Коши высказался со всей определенностью: «Что же касается методов, то я стремился придать им ту степень строгости, которая достижима в математике».

Несмотря на слово «алгебраический», которое Коши вынес в заголовок своего курса, он не разделял традиционной веры в «общность алгебры». Коши имел здесь в виду рассуждения, неявно используемые его современниками: то, что истинно для вещественных чисел, истинно и для комплексных чисел; то, что истинно для сходящихся рядов, истинно и для расходящихся рядов; то, что истинно для конечных величин, истинно и для бесконечно малых величин. Коши очень тщательно определил и установил свойства основных понятий математического анализа: функции, предела, непрерывности, производной и интеграла. Он также ввел различие между бесконечными рядами, имеющими сумму в указанном им смысле, и бесконечными рядами, не имеющими такой суммы, т.е. различие между сходящимися и расходящимися рядами. Последние

² **Яглом:** Концепцию предела как исходного пункта математического анализа иногда связывают также и с Ньютоном, различавшим «первое число» (с которого переменная начинает изменение) и «последнее число» (предел (!) – значение, к которому она приходит) и придававшим особое значение «последним числам». Однако увлеченный физической интерпретацией анализа (производная как скорость), Ньютон не потрудился даже дать понятию «последнего числа» сколько-нибудь отчетливое определение, что лишило основанные на этом понятии конструкции доказательной силы.

³ **Яглом:** В данном Д'Аламбером определении предела ныне вызывает сомнение лишь замечание о том, что стремящаяся к a величина не может a превзойти; Д'Аламбер требовал, чтобы из $x \rightarrow a$ следовало постоянство знака разности $x - a$, в то время как Коши это последнее условие отбросил.

Коши объявил «вне закона»⁴. В октябре 1826 г. Абель имел все основания сообщить в письме своему бывшему учителю Хольмбе, что Коши «в настоящее время единственный, кто знает, как следует действовать в математике». Далее Абель называет Коши глупцом и фанатиком, но замечает, что тот по крайней мере считает необходимым «воздать дьяволу дьяволов».

Хотя Коши поставил своей целью обоснование математического анализа и заявил в переиздании своего курса (1829), что достиг мыслимых пределов строгости, он допустил немало ошибок, впрочем вполне понятных, если учесть тонкость затронутых им понятий. Приведенные Коши определения функции, предела, непрерывности и производной по существу были правильными, но язык, которым ему приходилось пользоваться, не отличался ни ясностью, ни точностью. Подобно своим современникам, Коши был убежден, что из непрерывности следует дифференцируемость (гл. VII), и сформулировал множество теорем, в условиях которых предполагал только непрерывность, тогда как в доказательстве использовал дифференцируемость, причем упорствовал в своих заблуждениях, даже когда ему указывали на ошибку. Введя со всеми необходимыми оговорками определение столь важного понятия, как «определенный интеграл», Коши намеревался показать, что для любой непрерывной функции значение такого интеграла существует и единственно; однако предложенное им доказательство оказалось ошибочным (поскольку Коши не сознавал необходимости введения более тонкого понятия – **равномерной** непрерывности)⁵. Ясно понимая различие между сходящимися и расходящимися рядами, Коши тем не менее неоднократно предлагал неверные теоремы о расходящихся рядах и приводил ошибочные доказательства. Так, он утверждал – и более того, доказывал, – что сумма бесконечного ряда непрерывных функций непрерывна (это верно лишь при условии равномерной непрерывности). Коши почленно интегрировал бесконечные ряды, утверждая, что проинтегрированный ряд соответствует интегралу от функции, представленной исходным рядом (и в этом случае его ошибка была обусловлена непониманием необходимости равномерной сходимости). Коши предложил критерий сходимости последовательности, ныне известный под названием критерия Коши, но не сумел доказать его достаточность, так как для доказательства этого требовалось использовать такие свойства вещественных чисел, которые не были известны ни Коши, ни его современникам. Коши был также убежден, что если функция двух переменных имеет в некоторой точке предел, когда каждая из переменных в отдельности стремится к точке, то эта функция должна стремиться к пределу и в том случае, когда обе переменные изменяются одновременно и (переменная) точка $M(x, y)$ стремится к рассматриваемой точке $N(a, b)$ ⁶.

С самого начала работы по обоснованию математического анализа носили сенсационный характер. После заседания Парижской академии наук, на котором Коши изложил свою теорию сходимости рядов, Лаплас поспешил домой и оставался там взаперти до тех пор, пока не проверил на сходимость все ряды, которые он использовал в своей «небесной механике». Велика же была его радость, когда он обнаружил, что ряды сходятся.

Как ни парадоксально, сам Коши отнюдь не был склонен сковывать себя требованиями математической строгости. Написав три учебника (1821, 1823 и 1829) главным образом с целью строгого обоснования математического анализа, Коши в своих исследованиях продолжал полностью игнорировать строгость. Дав определение непрерывности, Коши никогда не доказывал, что рассматриваемые им функции непрерывны. Неоднократно подчеркивая важность сходимости рядов и несобственных интегралов, Коши оперировал с бесконечными рядами, преобразованиями Фурье и несобственными интегралами так, словно никаких проблем сходимости не существовало. Определив производную как предел, Коши предложил и чисто формальный подход, аналогичный предложенному Лагранжем (гл. VI). Коши допускал и полусходящиеся (осциллирующие) ряды, например $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ и перестановку членов в так

⁴ Вряд ли было бы уместно входить здесь в технические детали приводимых Коши определений и доказательств. Для нас важно лишь подчеркнуть, что именно Коши приступил к планомерному обоснованию математического анализа.

⁵ **Яглом:** Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной*, скажем на интервале $a < x < b$, если для каждой точки x этого интервала и каждого (сколь угодно малого!) числа $\varepsilon > 0$ существует такое δ , что $|y(x) - y(x_0)| < \varepsilon$, коль скоро $|x - x_0| < \delta$, и *равномерно непрерывной* на этом интервале, если соответствующее значение δ можно считать не зависящим от x_0 (а только от ε); тонкое (и важное) различие между непрерывностью и равномерной непрерывностью было осознано лишь Кантором и Вейерштрассом.

⁶ **Яглом:** Неверность этого утверждения Коши следует из рассмотрения простейшей функции $Z = Z(x, y)$, где $Z=0$, при $xy = 0$ и $Z = 1$ при $xy \neq 0$.

называемых условно сходящихся рядах (некоторых рядах с положительными и отрицательными членами). Совершал он и другие «преступления», но безошибочная интуиция позволяла ему угадывать истину даже в тех случаях, когда ему не удавалось установить ее в соответствии со стандартами строгости, присущими его же собственным учебникам математического анализа.

Труды Коши вызвали к жизни многочисленные работы по обоснованию математического анализа. Но основной вклад в решение этой важной проблемы был внесен другим выдающимся математиком – Карлом Вейерштрассом (1815–1897). Именно ему суждено было завершить обоснование математического анализа. Результаты своих исследований Вейерштрасс начал излагать в лекциях, прочитанных в 1858–1859 гг. в Берлинском университете. Самые ранние из сохранившихся конспектов лекций Вейерштрасса были сделаны его учеником Германом Амантусом Шварцем весной 1861 г. Труды Вейерштрасса полностью освободили математический анализ от какой бы то ни было зависимости от движения, интуитивных представлений и геометрической наглядности, которые во времена Вейерштрасса выглядели уже довольно подозрительно.

К 1861 г. Вейерштрасс отчетливо понимал, что вопреки широко распространенному убеждению (гл. VII) дифференцируемость отнюдь не следует из непрерывности. Мир был потрясен, когда в 1872 г. Вейерштрасс представил Берлинской академии пример функции, непрерывной при всех вещественных x , но не дифференцируемой ни при одном значении x . (Он сам не опубликовал свой пример; это было сделано, разумеется со ссылкой на Вейерштрасса, Полем Дюбуа-Реймоном в 1875 г. Ранее Вейерштрасса примеры непрерывной, но нигде не дифференцируемой функции были с помощью геометрических соображений построены Больцано в 1830 г. и Шарлем Селирье примерно в то же время, но второй из этих примеров был опубликован лишь в 1890 г., а первый – еще позже; в силу этого Больцано и Селирье не оказали влияния на развитие математики.)

То обстоятельство, что Вейерштрасс привел свой пример на позднем этапе развития математического анализа, следует расценивать как удачу, ибо, как сказал в 1905 г. Эмиль Пикар, «если бы Ньютон и Лейбниц знали, что непрерывные функции необязательно должны иметь производные, то дифференциальное исчисление никогда не было бы создано». Строгое мышление может стать препятствием для творческого начала.

Коши и даже Вейерштрасс – в начале своей деятельности по обоснованию математического анализа – рассматривали все свойства вещественных и комплексных чисел как нечто данное, не нуждающееся в обосновании. Первый шаг к логическому обоснованию вещественных и комплексных чисел был сделан в 1837 г. создателем кватернионов Гамильтоном. Гамильтон знал, что комплексные числа можно использовать для представления векторов на плоскости, и пытался найти (гл. IV) числа с тремя единицами, которые могли бы служить представлением векторов в пространстве. Гамильтон стал изучать свойства комплексных чисел с тем, чтобы обобщить их. Одним из результатов, изложенных в его работе «Алгебраические пары, с предварительным очерком о времени», было логическое обоснование комплексных чисел, при построении которого Гамильтон, однако, считал свойства вещественных чисел общеизвестными. Вместо комплексных чисел $a + b\sqrt{-1}$ Гамильтон ввел упорядоченные пары (a, b) вещественных чисел и определил операции над этими парами так, чтобы результаты совпадали с результатами операций, производимых над комплексными числами $a + b\sqrt{-1}$.⁷ Следует заметить, что Гамильтону пришлось создавать новую теорию комплексных чисел, поскольку для него, как и для всех его предшественников, были неприемлемы не только символ $\sqrt{-1}$, но до какого-то времени и отрицательные числа.

Позднее в одной из своих работ Гамильтон писал:

Настоящая теория пар опубликована, дабы продемонстрировать скрытый смысл [комплексных чисел] и показать на этом примечательном примере, что выражения, которые все считали чисто символическими и не допускавшими интерпретации, входят в мир идей, обретая реальность и значимость.

⁷ **Яглом:** Другими словами, Гамильтон полагал $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$; $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$. Подобное же построение теории комплексных чисел ранее (около 1840 г.) было дано одним из создателей неевклидовой геометрии Я. Бойаи в работе, представленной на конкурс, объявленный Лейпцигским научным обществом. Но, к сожалению, эта работа не была должным образом оценена жюри конкурса и потому осталась неопубликованной.

Далее в той же статье говорится следующее:

В теории отдельных чисел символ $\sqrt{-1}$ *лишен всякого смысла* [курсив Гамильтона] и означает невозможное извлечение корня, или мнимое число, но в теории пар тот же символ $\sqrt{-1}$ обретает смысл и означает возможное извлечение корня, или вещественную пару, а именно (как мы только что убедились) главное значение квадратного корня из пары $(-1, 0)$. Следовательно, знак $\sqrt{-1}$ может быть надлежащим образом использован во второй теорий, но отнюдь не в первой, и мы можем, если угодно, написать для любой пары (a_1, a_2)

$$(a_1, a_2) = a_1 + a_2 \sqrt{-1}$$

...и интерпретировать символ $\sqrt{-1}$ в том же выражении как обозначающий вторую единицу, или чисто вторичную пару $(0, 1)$.

Так Гамильтон убрал то, что он назвал «метафизическими камнями преткновения» в системе комплексных чисел.

В свою теорию пар Гамильтон включил и свойства вещественных чисел – пар вида $(a, 0)$. В работе от 1837 г. он попытался логически обосновать систему вещественных чисел. Исходя из понятия времени, Гамильтон вывел свойства положительных целых чисел, а затем распространил эти свойства на рациональные (положительные и отрицательные целые числа и дроби) и иррациональные числа. Но развитая Гамильтоном теория была логически весьма несовершенна и особенно несостоятельна во всем, что касалось иррациональных чисел. Она была не только неясно изложена, но и неверна. Математический мир вполне справедливо просто не заметил эту работу Гамильтона. Интерес Гамильтона к обоснованию вещественных и комплексных чисел был ограниченным. Истинной целью его исследований были кватернионы. Но когда Гамильтону случалось работать в области математического анализа, он, подобно большинству своих современников, без малейших колебаний свободно оперировал свойствами вещественных и комплексных чисел.

Вейерштрасс первым понял, что обоснование математического анализа останется незавершенным, если не добиться более глубокого понимания системы вещественных чисел, и первым предложил строгое определение и вывод свойств иррациональных чисел на основе известных свойств рациональных чисел. Свои исследования Вейерштрасс начал еще в 40-х годах XIX в., но его результаты долгое время оставались неопубликованными; впервые они стали известны лишь из лекций, прочитанных Вейерштрассом в Берлинском университете в 60-е годы.

Некоторые другие математики, прежде всего Рихард Дедекинд и Георг Кантор, также правильно определили иррациональные числа и доказали их свойства, приняв за исходные свойства рациональных чисел. Работы этих математиков были опубликованы в 70-х годах XIX в. Дедекинд, как и Вейерштрасс, отчетливо сознавал необходимость ясной теории иррациональных чисел для последовательного изложения математического анализа. В небольшой книге «Непрерывность и иррациональные числа» (1872) [46]⁸ Дедекинд писал, что начиная с 1858 г. он «острее, чем когда-либо, ощущал отсутствие строгого обоснования арифметики». В работе о теоремах анализа (гл. IX) Кантор также признавал необходимость последовательной теории иррациональных чисел. Работы Вейерштрасса, Дедекинда и Кантора позволили математикам наконец доказать, что $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$.

Однако логическое обоснование рациональных чисел по-прежнему отсутствовало. Дедекинд понимал это и в работе «Что такое числа и для чего они служат» (1888) [47]⁹ описал основные свойства чисел, которые могли бы стать основой аксиоматического подхода к рациональным числам. Джузеппе Пеано (1858–1932), используя идеи Дедекинда и некоторые идеи, заимствованные из «Учебника арифметики» (1861) Германа Грассмана, построил в работе «Элементы арифметики» (1889) теорию рациональных чисел из аксиом, описывающих свойства положительных целых (натуральных) чисел.¹⁰ Наконец логическая структура систем вещественных и комплексных чисел была создана.

Как побочный результат обоснования числовой системы была решена проблема обоснования привычной всем алгебры. Почему, свободно манипулируя символами так, как если бы они были натуральными числами, мы получаем верные результаты и в том случае, если

⁸ Дедекинд Р. Непрерывность и иррациональные числа. – Одесса: Матезис, 1923.

⁹ Дедекинд Р. Что такое числа и для чего они служат. – Казань: Изд-во Императорского университета, 1905.

¹⁰ **Яглом:** Систему аксиом, описывающую натуральные числа, несколько раньше (1888) Дж. Пеано указал Р. Дедекинд.

вместо символов подставляем вещественные или комплексные числа? Это происходит потому, что вещественные и комплексные числа обладают такими же формальными свойствами, что и натуральные числа. Если не гнаться за строгостью, то можно сказать, что верно не только равенство $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$, но и равенство $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}$.

Иначе говоря, ab можно заменить на ba независимо от того, означают ли a и b натуральные или иррациональные числа.

Весьма примечательна последовательность, в которой развивались события. Вместо того, чтобы, начав с целых чисел и дробей, перейти к иррациональным и комплексным числам, алгебре и математическому анализу, ученые решали проблему обоснования математики в обратном порядке. Они действовали так, будто крайне неохотно затрагивали проблемы, которые, как всем было ясно, можно было до поры до времени обходить стороной, и принимались за обоснование лишь в тех случаях, когда это вызывалось настоятельной необходимостью. Как бы то ни было, в 90-е годы XIX в., через каких-нибудь шесть тысяч лет (!) после того, как египтяне и вавилоняне «пустили в оборот» целые числа, дроби и иррациональные числа, математики смогли наконец доказать, что $2 + 2 = 4$. Стало ясно, что даже великие математики должны заботиться о математической строгости.

В конце XIX в. была решена еще одна выдающаяся проблема. На протяжении 60 лет – с того времени, когда Гаусс выразил уверенность в непротиворечивости построенной им неевклидовой геометрии, вероятно, считая, что она может явиться геометрией реальной Вселенной, и вплоть до начала 70-х годов XIX в., когда были опубликованы работы Гаусса по неевклидовой геометрии и (впоследствии прославленная, а первоначально не оцененная) пробная лекция Римана на получение звания приват-доцента, – большинство математиков не принимали неевклидову геометрию всерьез (гл. IV). Выводы, напрашивающиеся из самого существования неевклидовой геометрии, настолько пугали своей непривычностью, что ученые предпочитали не задумываться над ними. У математиков всё еще теплилась надежда, что в один прекрасный день в каждой из нескольких предложенных неевклидовых геометрий вскроются противоречия и эти странные творения человеческой фантазии можно будет предать забвению как бессмысленные.

К счастью, вопрос о непротиворечивости элементарных неевклидовых геометрий наконец удалось разрешить. Метод, которым была решена эта проблема, заслуживает – особенно в свете последующих событий – того, чтобы познакомиться с ним подробнее. Одна из неевклидовых геометрий – так называемая удвоенная эллиптическая геометрия, идея которой содержалась в лекции Римана 1854 г., – существенно отличается от евклидовой геометрии. В этой геометрии нет параллельных; любые две прямые пересекаются в двух точках; сумма внутренних углов треугольника больше 180° . Многие другие ее теоремы также отличаются от своих евклидовых аналогов. В 1868 г. Эудженио Бельтрами (1835–1900) обнаружил, что удвоенная эллиптическая геометрия плоскости применима к поверхности сферы, если прямые в удвоенной эллиптической геометрии интерпретировать как большие окружности на сфере (окружности, центры которых совпадают с центром сферы, например окружности, образуемые меридианами).

Может показаться, что предложенная Бельтрами интерпретация удвоенной эллиптической геометрии неприемлема. Создатели всех неевклидовых геометрий показали, что в их геометриях прямые ничем не отличаются от евклидовых прямых. Напомним, однако, что предложенные Евклидом определения прямой и других понятий (гл. V) были излишними. В любой области математики, как подчеркивал Аристотель, мы должны начинать наши построения с неопределяемых понятий. От прямых требуется лишь, чтобы они удовлетворяли аксиомам. Но большие окружности на сфере удовлетворяют всем аксиомам удвоенной эллиптической геометрии. А поскольку аксиомы удвоенной эллиптической геометрии применимы к большим окружностям на сфере, к этим окружностям должны быть применимы и теоремы удвоенной эллиптической геометрии, так как они логически вытекают из аксиом.

Если исходить из интерпретации прямой как большой окружности, то непротиворечивость удвоенной эллиптической геометрии устанавливается следующим образом. Если бы в удвоенной эллиптической геометрии существовали противоречивые теоремы, то должны были бы существовать противоречивые теоремы и в сферической геометрии – геометрии на поверхности сферы. Но сфера – один из объектов, изучаемых евклидовой геометрией. Следовательно, если евклидова геометрия непротиворечива, то должна быть непротиворечива и удвоенная эллиптическая геометрия.

Доказать непротиворечивость гиперболической геометрии (гл. IV) оказалось не так просто. Но как непротиворечивость удвоенной эллиптической геометрии удалось доказать на модели –

сферической поверхности, так и непротиворечивость гиперболической геометрии была доказана на модели – несколько более сложной поверхности трехмерного евклидова пространства, изучаемой в (евклидовой!) дифференциальной геометрии. Нам нет необходимости описывать эту модель (см., например, [48]¹¹). Заметим лишь, что непротиворечивость гиперболической геометрии означает помимо прочего независимость аксиомы Евклида о параллельных от остальных аксиом евклидовой геометрии. Действительно, если бы аксиома Евклида о параллельных не была независима от остальных аксиом евклидовой геометрии, т.е. если бы ее можно было вывести из них, то она была бы **теоремой** гиперболической геометрии, так как, за исключением аксиомы о параллельных, все остальные аксиомы гиперболической геометрии совпадают с аксиомами евклидовой геометрии. Но эта евклидова «теорема» противоречила бы аксиоме о параллельных гиперболической геометрии и гиперболическая геометрия была бы противоречивой. Следовательно, полуторавековые попытки вывести аксиому Евклида о параллельных (пятый постулат Евклида) из других аксиом евклидовой геометрии были заранее обречены на провал.

Неевклидовы геометрии, задуманные как «геометрии реального пространства», где прямая имеет тот же смысл (тот же вид, то же строение), что и в евклидовой геометрии, оказались применимыми к фигурам, совершенно отличным от тех, которые имели в виду создатели неевклидовых геометрий, и это важное обстоятельство имело серьезные последствия: неевклидовы геометрии получили совершенно различные интерпретации, ибо (как мы уже неоднократно отмечали) в любой аксиоматике должны быть неопределяемые понятия, которым в принципе можно придать какой угодно смысл – только бы удовлетворялись определяющие эти понятия аксиомы. Интерпретации неевклидовых геометрий получили название моделей. Таким образом, физический смысл той или иной математической теории оказался необязательным: одна и та же теория могла применяться к совершенно различным физическим или математическим ситуациям.

Непротиворечивость неевклидовых геометрий была доказана в предположении, что евклидова геометрия непротиворечива. У математиков 70–80-х годов прошлого века непротиворечивость евклидовой геометрии сомнений не вызывала. Несмотря на работы Гаусса, Лобачевского, Бойаи и Римана, евклидову геометрию продолжали считать естественной и непрменной геометрией реального мира, а сама мысль о том, что геометрия реального мира может быть внутренне противоречивой, казалась нелепой. Тем не менее непротиворечивость евклидовой геометрии не была доказана логически.

Многие математики, относившиеся к неевклидовой геометрии почти презрительно, с удовлетворением восприняли доказательства непротиворечивости ее различных вариантов совсем по другой причине: дело в том, что хотя неевклидовы геометрии обретали смысл, но, как следовало из приведенных доказательств, лишь как модели, которые строились в рамках евклидовой геометрии. Это позволяло принять их как геометрии, реализуемые на тех или иных поверхностях, а не как геометрии, применимые к физическому миру, где прямые понимались в обычном смысле. Разумеется, подобный подход полностью противоречил взглядам Гаусса, Лобачевского и Римана (а в несколько ином смысле – и Бойаи).

Нерешенной оставалась лишь одна фундаментальная проблема, связанная с наведением строгости в математике: в основаниях евклидовой геометрии обнаружились изъяны. Однако в отличие от математического анализа природа геометрии и ее понятий была ясна. Установить неопределяемые термины, уточнить определения, восполнить недостающие аксиомы и завершить доказательства было сравнительно простой задачей. Она была решена независимо Морицем Пашем (1843–1930), Джузеппе Веронезе (1854–1917) и Марио Пиери (1860–1904). Давид Гильберт (1862–1943), по достоинству оценивший вклад Паша, предложил свой вариант аксиоматического построения евклидовой геометрии, который наиболее широко используется в наши дни. На едином дыхании он заложил основания неевклидовой геометрии Ламберта, Гаусса, Лобачевского и Бойаи, а также других геометрий, созданных в XIX в., главным образом проективной геометрии.¹²

¹¹ Делоне Б.Н. Элементарное доказательство непротиворечивости геометрии Лобачевского. – М.: Гостехиздат, 1956.

¹² **Яглом:** Первым автором, полностью решившим задачу обоснования евклидовой геометрии, был, по-видимому, итальянец М. Пиери, ученик Дж. Пеано. Несколько позже в том же 1899 г. появились в значительной степени основанные на более ранних исследованиях Паша «Основания геометрии» Д. Гильберта, где производилось тщательное выделение отдельных групп аксиом, описывающих то или иное

Так, к началу XX в. математическая строгость восторжествовала в арифметике, алгебре, математическом анализе (начала которого базировались на аксиомах для целых чисел) и геометрии (на основе аксиом для точек, прямых и других геометрических объектов). Многих математиков соблазняла возможность пойти еще дальше и построить на понятии числа всю геометрию – план, осуществимый с помощью аналитической геометрии. Сама геометрия как таковая по-прежнему не вызывала у них доверия. У математиков еще не изгладился из памяти один из уроков, преподанных им неевклидовой геометрией, которая выявила серьезные изъяны в евклидовой геометрии, считавшейся до сих пор образцом математической строгости. Однако к началу XX в. программа сведения всей геометрии к числу не была выполнена. Тем не менее большинство математиков того времени говорили об арифметизации геометрии, хотя правильнее было бы говорить об арифметизации математического анализа. Так, на II Международном конгрессе математиков, состоявшемся в 1900 г. в Париже, Пуанкаре утверждал: «На сегодняшний день в математическом анализе остались только целые числа, а также конечные и бесконечные системы целых чисел, связанных между собой системой отношений равенства или неравенства. Математика, можно сказать, арифметизована». Паскалю принадлежит следующее высказывание: «*Tout ce qui passe la Géométrie nous passe*» (всё, что выходит за рамки Геометрии, выходит за рамки нашего понимания). В начале XX в. математики предпочитали говорить иначе: «*Tout ce qui passe l'Arithmétique nous passe*» (всё, что выходит за рамки Арифметики, выходит за рамки нашего понимания).

Движения, первоначально ставившие перед собой довольно ограниченные цели, по мере своего разрастания нередко начинают охватывать гораздо более широкий круг проблем, чем ранее предполагалось. Критическое движение в области оснований математики со временем сделало мишенью своих атак и логику – законы мышления, используемые в математических доказательствах при переходе от одного заключения к другому.

Начало логике как науке было положено сочинением Аристотеля «Органон» (Инструмент [мышления], около 300 г. до н.э.) [см. прим. 3 к гл. IV]¹³. По признанию Аристотеля, он выделил законы мышления, используемые математиками, абстрагировал их от частных и обнаружил, что эти законы обладают универсальной применимостью. Так, один из фундаментальных законов аристотелевой логики, закон исключенного третьего, гласит: всякое имеющее смысл высказывание либо истинно, либо ложно. Закон исключенного третьего Аристотель мог абстрагировать, например, из такого математического утверждения, как «всякое целое число либо четно, либо нечетно». Логика Аристотеля в основном представляла собой силлогистику – набор правил о выводе новых утверждений из уже известных.

На протяжении более чем двух тысячелетий логика Аристотеля не вызывала возражений у мыслителей, в частности у математиков. Правда, Декарт, подвергавший сомнению любые убеждения и учения, задал вопрос: откуда нам известно, что законы логики правильны? И сам же ответил на него: господь бог не стал бы вводить нас в заблуждение. Так Декарт обосновал для себя всеобщую убежденность в правильности законов логики.

Декарт и Лейбниц надеялись, что им удастся расширить логику до универсальной науки о мышлении, применимой ко всем областям человеческого разума, – построить своего рода универсальное исчисление мышления. Они намеревались уточнить и облегчить применение законов мышления введением буквенной символики, подобной алгебраической. О математическом методе Декарт отзывался так: «Это более мощный инструмент познания, чем все остальные, что дала нам человеческая деятельность, ибо он служит источником всего остального».

По замыслу Лейбница, имевшим несколько более конкретный характер, чем планы Декарта, для построения универсальной логики необходимы три основных элемента. Первый элемент – универсальный научный язык (*characteristica universalis*), частично или полностью символический и применимый ко всем истинам, выводимым посредством рассуждений. Вторая

из неопределяемых отношений между основными элементами (точками, прямыми и плоскостями): принадлежность (точки, прямой или плоскости); понятие «между» и т.д. В настоящее время имеется много разных систем обоснования евклидовой геометрии (см., например, [49: Яглом И.М. Аксиоматические обоснования евклидовой геометрии. В кн.: Новое в школьной математике. – М.: Знание, 1972, с. 40–63]).

¹³ В.Э.: Это примечание звучит так: – Яглом: Андроник Родосский, выпустивший в I в. до н.э. собрание сочинений Аристотеля, назвал «Органом» свод работ последнего по логике и строению наук, написанных независимо одна от другой и, видимо, в разное время; названием «Новый органон» Бэкон подчеркивал и близость свою к Аристотелю (по теме), и резкое различие (по установкам).

составная часть – исчерпывающий набор логических форм мышления (*calculus ratiocinator*), позволяющих осуществить любой дедуктивный вывод из начальных принципов. Третий элемент – набор основных понятий (*ars combinatoria*), через которые определяются все остальные понятия, своего рода алфавит мышления, позволяющий сопоставить символ каждой простой идее. Комбинируя символы и производя над ними различные операции, мы получаем возможность выражать и преобразовывать более сложные понятия.

К числу фундаментальных принципов следует отнести, например, закон тождества: A есть A (и A не есть «не A »). Из таких законов можно было бы вывести все мыслимые истины, включая математические. Кроме того, существуют фактические истины, но они в значительной мере опираются на так называемый принцип достаточного основания, состоящий в том, что эти истины могут быть именно такими, а не какими-либо иными. Лейбниц был основоположником символической логики, однако его работы в этой области оставались неизвестными до 1901 г.

Ни Декарту, ни Лейбницу не удалось развить последовательно символическое исчисление логики. Они создали лишь отдельные фрагменты.¹⁴ Вплоть до XIX в. логика Аристотеля сохраняла свои позиции. В 1797 г. Кант во втором издании «Критики чистого разума» назвал логику «замкнутым и полным учением». Хотя до начала XX в. большинство математиков в своих рассуждениях продолжали следовать неформальным, изложенным лишь словесно, а не символически, принципам аристотелевой логики, они пользовались и другими схемами рассуждений, не исследованными Аристотелем. Не вдаваясь в анализ используемых логических принципов, математики пребывали в уверенности, что их рассуждения не выходят за рамки адекватной дедуктивной логики. В действительности же они использовали интуитивно вполне разумные, но не сформулированные явно логические принципы.

В то время как внимание большинства математиков было сосредоточено на обосновании собственно математики, менее многочисленная группа занялась критическим пересмотром логики. Выдающихся успехов в этом направлении добился профессор математики Куинз-колледжа в Корке (Ирландия) Джордж Буль (1815–1864).¹⁵

В своей работе Буль, несомненно, вдохновлялся примером общей (или абстрактной) алгебры, основы которой были заложены кембриджской группой – Пикоком, Грегори и де Морганом (гл. VII). Хотя использованный этими авторами принцип перманентности форм в действительности не мог служить обоснованием алгебраических операций, производимых над буквенными коэффициентами с вещественными или комплексными значениями, Пикок, Грегори и де Морган косвенно способствовали возникновению нового взгляда на алгебру как на науку о символах и операциях, которые могут иметь любую природу и представлять любые объекты. Работа Гамильтона о кватернионах (1843) показала, что возможны другие алгебры, отличные от привычной алгебры вещественных и комплексных чисел. Обобщение алгебраических рассуждений в форме так называемой алгебры операторов предложил в 1844 г. Буль. Его также беспокоила мысль о том, что алгебра не обязательно должна заниматься рассмотрением одних лишь чисел и что законы алгебры не обязательно должны совпадать с законами арифметики вещественных и комплексных чисел. Упомянув об этом в начале своей работы «Математический

¹⁴ **Яглом:** Принадлежащие Лейбницу фрагменты «логического исчисления» были разработаны достаточно глубоко; однако они не удовлетворяли Лейбница, поскольку были весьма далеки от поставленной им (и, видимо, неразрешимой) задачи «свести любое рассуждение к вычислению», создать такое положение, при котором, по утопическим мечтам Лейбница, один из спорящих всегда смог бы сказать другому: «Вы утверждаете одно, я – другое; ну что же, проверим, кто из нас прав: вычислим, милостивый государь».

¹⁵ **Яглом:** Дж. Буль родился в очень бедной семье мелкого торговца, в силу чего он сумел окончить лишь несколько начальных классов школы для бедных, которые, разумеется, ничего не дали ему в области математики. Все свои знания Буль приобрел путем самообразования. Стремясь разобраться в математике глубже, Буль обратился к трудам классиков науки; тогда и родились у него первые самостоятельные идеи, которые он изложил в статьях, направленных в «Кембриджский математический журнал». К счастью, редактору журнала, представителю «кембриджской группы» математиков Д. Грегори, поиски Буля оказались достаточно близкими. Именно с помощью «кембриджцев» Булю удалось в конце жизни стать профессором математики во вновь открытом католическом колледже (университете) в Корке. Характерно, что первая развернутая система формальной (символической) логики принадлежит самоучке Булю – не закончив даже средней школы, он тем самым не был связан путами традиционных взглядов и установок, смог взглянуть на математику свежим взглядом и оценить ее логический статус с той ясностью и полнотой, которая позволила Б. Расселу позже сказать: «Чистую математику открыл Буль в сочинении, которое называлось «Законы мысли».

анализ логики» (1847), Буль вскоре развил алгебру логики. Шедевром по праву считается работа Буля «Исследование законов мышления» (1854). Основная идея Буля, менее претенциозная, чем идея Лейбница об универсальной алгебре, и более близкая по духу лейбницевскому *calculus ratiocinator* (логическая форма мышления), состояла в том, что существующие законы мышления представимы в символическом виде, позволяющем придать более точный смысл обычным логическим рассуждениям и упростить их применение. В своей книге Буль так сформулировал программу построения алгебры логики:

В предлагаемом вниманию читателей трактате мы намереваемся исследовать фундаментальные законы тех операций разума, посредством которых осуществляется мышление, дабы выразить их на символическом языке исчисления и на этой основе построить науку логики и ее метод.

Кроме того, Буля интересовали некоторые конкретные приложения логики, в частности к законам вероятности.

Буквенная символика обладает многими преимуществами. В ходе рассуждений тому или иному выражению иногда по ошибке можно придать смысл, отличный от первоначального, или употребить неправильное дедуктивное умозаключение. Так, при обсуждении света как оптического явления употребление выражения «повидать свет» может быть истолковано неверно (так как в обычной бытовой лексике оно означает «побывать во многих странах мира»). Но если свет как физическое явление обозначить, например, буквой *l*, то при любых преобразованиях буквенных выражений, содержащих *l*, эта буква будет означать только свет как физическое явление и ничего другого. Кроме того, все доказательства сводятся к преобразованию одних наборов символов в другие по заранее заданным правилам, заменяющим словесные формулировки законов логики. Правила преобразований выражают правильные законы логики в сжатом, четком и легко применимом виде.

Чтобы по достоинству оценить булеву алгебру логики, упомянем лишь некоторые из ее идей. Пусть символы *x* и *y* означают классы объектов, например класс собак и класс рыжих животных. Тогда *xy* означает класс объектов, принадлежащих одновременно классу *x* и классу *y*. Если *x* и *y* имеют предложенную нами интерпретацию, то *xy* означает класс рыжих собак. Равенство *xy = yx* верно при любых *x* и *y*. Если *z* – класс белых объектов и если *x = y*, то *zx = zy*. Кроме того, из самого смысла «произведения» *xy* следует, что *xx = x*.

Символ *x + y* означает класс объектов, принадлежащих либо классу *x*, либо классу *y*, либо классам *x* и *y* одновременно. (Это более поздняя модификация логических построений Буля, предложенная Уильямом Стенли Джевансом (1835–1882)¹⁶.) Так, если *x* – класс мужчин, а *y* – класс избирателей, то *x + y* – класс мужчин и избирателей (включающий в себя помимо избирателей-мужчин также и избирателей-женщин). Нетрудно доказать, что если, скажем, *z* – класс людей старше 35 лет, то

$$z(x + y) = zx + zy.$$

Если *x* – некоторый класс объектов, то $1 - x$ (или $\neg x$) – множество всех объектов, не принадлежащих классу *x*. Так, если 1 – множество всех объектов, *x* – множество собак, то $1 - x$ (или $\neg x$) – множество всех объектов, не являющихся собаками. Соответственно $\neg(\neg x)$ означает множество собак. Равенство

$$x + (1 - x) = 1$$

означает, что все объекты либо относятся к собакам, либо нет. А это есть не что иное, как закон исключенного третьего для классов. Буль показал, как с помощью таких чисто алгебраических операций проводить рассуждения в самых различных областях.

Буль заложил также основы исчисления высказываний, хотя начало этой области логики восходит к стоикам (IV в. до н.э.). В интерпретации этого исчисления *p*, например, означает «Джон – человек». Утверждать *p* означает утверждать, что высказывание «Джон – человек» истинно. Тогда $1 - p$ (или $\neg p$) означает, что высказывание «Джон – человек» не истинно. Аналогично высказывание $\neg(\neg p)$ означает: «Неверно, что Джон не человек», т.е. «Джон – человек». Закон исключенного третьего для высказываний, гласящий, что любое высказывание либо истинно, либо ложно, Буль записывал в виде $p + (\neg p) = 1$, где 1 соответствует истине.

¹⁶ **Яглом:** У самого Буля сумма *x + y* обозначала класс объектов, принадлежащих либо *x*, либо *y*, но не *x* и *y* одновременно; сегодня в этом случае говорят не о сумме, а о «симметричной разности» *x* и *y* и пишут $x \Delta y$.

Произведение pq истинно, когда истинны оба высказывания p и q , а сумма $p+q$ истинна, если истинно либо p , либо q (либо истинны оба высказывания).

Другое новшество было внесено де Морганом. В своем главном труде «Формальная логика» (1847) де Морган высказал идею о том, что логика должна заниматься изучением отношений в общем виде. Так, аристотелева логика занималась изучением отношения «быть» (x есть y). Классический пример: «Все люди смертны». Но аристотелева логика, по словам де Моргана, не в состоянии вывести из утверждения «Лошадь – животное» утверждение «Голова лошади – голова животного»: для этого необходимо ввести дополнительную посылку о том, что у всех животных есть головы. В сочинениях Аристотеля также есть фрагменты, посвященные логике отношений, хотя писал он о них довольно невразумительно и сжато. Кроме того, многие труды Аристотеля и обобщения, сделанные средневековыми учеными, были безвозвратно утеряны к XVII в. В необходимости логики отношений убедиться нетрудно. Так, следующее рассуждение, построенное только на отношении «быть», как легко видеть, ложно:

А есть p ;

В есть p .

Следовательно, А и В суть p .

Действительно, рассуждение

Джон – брат,

Питер – брат;

следовательно, Джон и Питер братья

(каждый доводится братом другому)

вполне может привести к неправильному заключению, если понятие «брат» расширить, включив в него и двоюродного брата. Аристотелевой логике не удалось построить логику отношений. На этот ее недостаток обращал внимание еще Лейбниц.

Отношения далеко не всегда удается перевести на язык субъекта и предиката, когда предикат лишь утверждает, что субъект принадлежит к задаваемому предикатом классу. Часто бывает необходимо рассматривать и такие утверждения, как «2 меньше 3» или «Точка Q лежит между точками P и R ». Для подобных высказываний также необходимо определять, что означает их отрицание, т.е. обратное утверждение, сложное высказывание, составленное из нескольких таких высказываний, и т.д.

Логика отношений была развита в серии статей, опубликованных в 1870–1893 гг. Чарлзом Сандерсом Пирсом (1839–1914), и систематизирована Эрнстом Шредером (1841–1902). Пирс ввел специальную символику для обозначения высказываний, выражающих отношения. Так, символ I_{ij} означает, что i любит j . Построенная Пирсом алгебра была сложной и малополезной. Позднее мы увидим; как рассматривает отношения современная математическая логика.

Пирс внес в науку логики еще одно важное дополнение, которое лишь слегка затронул Буль: он подчеркнул важность пропозициональных функций (функций-высказываний). Подобно тому, как в математике мы рассматриваем функции, например $y = 2x$, отличая их от утверждений о конкретных числовых равенствах типа $10 = 2 \cdot 5$, так высказывание «Джон – человек» вполне конкретно, а высказывание « x – человек» означает пропозициональную функцию, зависящую от переменной x . Пропозициональные функции могут зависеть от двух и большего числа переменных: такова, например, функция « x любит y ». Результаты Пирса позволили расширить логику и на пропозициональные функции.

Пирс ввел в логику и так называемые кванторы. Обычный язык неоднозначен по отношению к кванторам. В двух высказываниях:

Американец возглавлял войну за независимость;

Американец верит в демократию

субъект «американец» используется в двух различных смыслах: в первом высказывании речь идет о вполне конкретном лице – Джордже Вашингтоне, во втором – о любом американце. Обычно неоднозначность можно уменьшить, сославшись на контекст, в котором используется предложение, но в строгом логическом мышлении такая неоднозначность недопустима. Смысл высказывания должен быть ясен без всяких ссылок на контекст. Кванторы позволяют достичь однозначности высказываний. Мы можем утверждать, что какая-то пропозициональная функция истинна для всех индивидуумов из определенного класса, например для всех граждан США. В этом случае высказывание «Для всех x , x – люди» означает «Все граждане США – люди». Слова «для всех x » – квантор. Но мы можем также утверждать: существует по крайней мере один x , такой, что x – человек из США. В этом случае квантор – это слова «существует по крайней мере

один x , такой, что». Каждый из этих типов кванторов имеет специальное обозначение: в первом случае $\forall x$; (квантор общности), во втором $\exists x$ (квантор существования).

Включение в логику отношений пропозициональных функций и кванторов позволило существенно расширить ее. Охватив те типы рассуждений, которые используются в математике, логика стала более полной.

Последний шаг в математизации логики в XIX в. был сделан профессором математики Йенского университета Готлобом Фреге (1848–1925). Его перу принадлежит несколько фундаментальных трудов: «Исчисление понятий» (1879), «Основания арифметики» (1884) и «Основные законы арифметики» (т. I – 1893, т. II – 1903). Восприняв идеи логики высказываний, логики отношений, пропозициональные функции и кванторы, Фреге внес свой вклад в развитие математической логики. Он ввел различие между простым утверждением высказывания и утверждением, что данное высказывание истинно. В последнем случае Фреге ставил перед высказыванием знак $\cdot$. Фреге проводил также различие между объектом x и множеством $\{x\}$, содержащим только x , между элементом, принадлежащим множеству, и включением одного множества в другое.

Фреге формализовал более широкое понятие импликации – так называемую материальную импликацию, хотя следы этого понятия в неформализованной, словесной форме можно проследить вплоть до Филона из Мегары (около III в. до н.э.)¹⁷. Логика имеет дело с рассуждениями относительно высказываний и пропозициональных функций, и весьма важная роль в этих рассуждениях отводится импликации. Так, если мы знаем, что Джои мудр и что мудрые люди живут долго, то с помощью импликации заключаем, что Джон будет жить долго.

Материальная импликация несколько отличается от обычно используемой импликации. Когда мы говорим, например, «Если пойдет дождь, то я отправлюсь в кино», между двумя высказываниями «Пойдет дождь» и «Я отправлюсь в кино» существует не просто какое-то отношение, а именно импликация: если антецедент (высказывание, стоящее в условном высказывании между «если» и «то») истинен, то из него с необходимостью следует консеквент (высказывание, стоящее в условном высказывании после «то»). Но в материальной импликации антецедентом p и консеквентом q могут быть любые высказывания. Между ними не обязательно должна существовать причинно-следственная связь и даже вообще какое бы то ни было отношение. Так, ничто не мешает нам рассматривать материальную импликацию «Если x – нечетное число, то я пойду в кино». Эта импликация ложна только в том случае, если x – нечетное число, а я всё равно не отправлюсь в кино.

На более формальном языке это означает, что если p и q – высказывания и p истинно, то из истинности импликации «Если p , то q » («из p следует q », или « p влечет за собой q ») мы вправе заключить, что q также истинно. Если же p ложно, то независимо от того, ложно или истинно q , материальная импликация «Если p , то q » считается истинной. И только в том случае, если p истинно, а q ложно, импликация считается ложной. Понятие материальной импликации расширяет привычное употребление связки «если..., то...». Но такое расширение не приводит к каким-либо затруднениям, так как обычно мы используем импликацию «если p , то q », только когда знаем, что p истинно. Кроме того, материальная импликация в какой-то мере согласуется с тем смыслом, который мы обычно вкладываем в условные высказывания «Если..., то...». Рассмотрим предложение «Если Гарольд получит сегодня жалованье, то он купит продукты». Здесь p – высказывание «Гарольд получит сегодня жалованье», q – высказывание «Он купит продукты». Но Гарольд может купить продукты, даже если он не получит сегодня жалованье. Следовательно, импликацию «Если p , то q » мы можем считать истинной и в том случае, когда p ложно, а q истинно. Другим, возможно еще лучшим, примером разумности такого решения может служить условное предложение «Если бы дерево было металлом, то дерево было бы ковким». Мы знаем, что оба высказывания (и антецедент, и консеквент) ложны, тем не менее вся импликация в целом истинна. Следовательно, если p ложно и q ложно, то импликацию «Если p , то q » также надлежит считать истинной. Понятие материальной импликации находит важное применение, позволяя судить об истинности q по истинности p и импликации «Если p , то q ».

¹⁷ **Яглом:** Выше уже указывалось, что логические сочинения Аристотеля (аристотелева силлогистика) формализовали в основном логическое отношение (не операцию, а именно отношение) следования; у Аристотеля можно найти также отчетливые фрагменты учения о кванторах. Полагают, что элементы логического исчисления – разумеется, не без влияния Аристотеля – были созданы в несколько более поздних стоической и мегарской школах, от которых до нас, однако, не дошли сколько-нибудь существенные письменные памятники мысли.

Обобщение на случай, когда p ложно, удобно для математической логики и представляется наиболее разумным из всех вариантов.

Поскольку если p ложно, то q следует из p независимо от того, истинно ли q или ложно, в случае материальной импликации из ложного высказывания может следовать что угодно – консеквент может быть любым. Упреки тех, кто видит в этом неисправимый «порок» материальной импликации, можно было бы отвергнуть, сославшись на то, что в непротиворечивой системе математики и логики не должно быть ложных высказываний. Тем не менее возражения против понятия материальной импликации всё же выдвигались. Так, Пуанкаре иронически заметил: «Но кто исправлял плохую кандидатскую математическую работу, тот мог заметить, насколько правильно смотрит на дело Рассел. Кандидат часто много трудится для того, чтобы найти первое ложное уравнение; но лишь только он его получил, для него уже не представляет никакого труда сделать из него самые неожиданные выводы, из которых иные могут оказаться и точными» ([1]¹⁸, с. 379). Но, несмотря на все попытки усовершенствовать понятие импликации, именно материальная импликация стала стандартным понятием, по крайней мере в математической логике, используемой как основа всей современной математики.

Фреге внес в развитие логики еще один вклад, важность которого была по достоинству оценена много позднее. В логике известно много принципиальных схем рассуждений. Их можно сравнить с многочисленными утверждениями евклидовой геометрии о треугольниках, прямоугольниках, окружностях и других фигурах. В результате пересмотра других областей математики, произведенного в конце XIX в., многие утверждения геометрии были выведены из небольшого числа основных утверждений – аксиом. То же самое Фреге сделал в логике. Его обозначения и аксиомы были достаточно сложными, и мы ограничимся лишь словесным описанием предложенного Фреге аксиоматического подхода к логике (см. также гл. X). Вряд ли кто-нибудь усомнится принять за аксиому утверждение «Если p , то p или q », так как высказывание « p или q » истинно, если истинно по крайней мере одно из входящих в него высказываний, p или q , а если p истинно, то одно из высказываний, p или q , заведомо истинно.

Можно принять также за аксиому, что если какое-то высказывание (или комбинация высказываний) A истинно и если из A следует B , где B – другое высказывание (или комбинация высказываний), то B истинно. Эта аксиома, называемая правилом вывода, позволяет нам выводить новые высказывания и утверждать, что они истинны.

Из приведенных аксиом мы можем, например, вывести

p истинно или p ложно,

т.е. закон исключенного третьего.

Можно также вывести закон противоречия, словесная формулировка которого гласит: не верно, что p и не p оба истинны (истинным может быть только одно из двух высказываний: либо p , либо не p). Закон противоречия часто используется в математике в так называемых доказательствах от противного. В доказательствах такого рода мы, предположив, что p истинно, заключаем, что p ложно. Но тогда p и не p истинны одновременно, что невозможно. Следовательно, p ложно. Иногда доказательство от противного проводится несколько иначе. Предположив, что p истинно, мы доказываем, что из p следует q . Но о высказывании q известно, что оно ложно. Следовательно, по одному из законов логики должно быть ложным и p . Многие другие законы логики, широко используемые в математических доказательствах, также выводимы из аксиом. Начало дедуктивному построению логики было положено Фреге в его работе «Исчисление понятий» и продолжено им в «Основных законах арифметики».

Фреге поставил перед собой и более претенциозную задачу, о которой пойдет речь в дальнейшем (гл. X). Пока же, не вдаваясь в подробности, заметим, что Фреге стремился своими трудами по логике заложить новую основу арифметики, алгебры и математического анализа – более строгую, чем удалось создать за последние десятилетия XIX в., ознаменовавшиеся критическим движением в области оснований математики.

Значительную роль в использовании математической логики для достижения большей математической строгости сыграл Джузеппе Пеано. Занимаясь преподаванием математики, Пеано, как до него Дедекин, обнаружил недостаточность строгости существовавших до него доказательств и посвятил всю свою жизнь усовершенствованию оснований математики. Символику математической логики Пеано применил для записи не только законов логики, но и математических аксиом, а также для вывода теорем из аксиом с помощью преобразования по

¹⁸ Пуанкаре А. О науке. – М.: Наука, 1983.

правилам математической логики комбинаций символов, выражающих аксиомы. Пеано открыто и со всей определенностью говорил о необходимости отказаться от интуитивных представлений. Достичь намеченной цели можно было, лишь используя буквенную символику, так как при этом интерпретация символов не влияла на математическое доказательство. Символика позволяла избежать обращения к интуитивным ассоциациям, связанным с обычными словами.

Для обозначения понятий, кванторов и таких связей, как «и», «или» и «не», Пеано ввел собственные символы. Его символическая логика была весьма рудиментарной, но тем не менее Пеано оказал огромное влияние на развитие работ по основаниям математики. Он был основателем и главным редактором журнала *Revista di Matematica* (1891–1906) и пятитомного «Формуляра математики» (1894–1908). Именно в «Формуляре» Пеано впервые опубликовал уже упоминавшуюся нами аксиоматику целых чисел. Пеано основал школу математических логиков, в то время как работы Пирса и Фреге, по существу, оставались незамеченными, пока Бертран Рассел не «открыл» в 1901 г. труды Фреге. О работах Пеано Рассел узнал в 1900 г. и считал символику Пеано более удачной, чем символика Фреге.

От Буля до Шредера, Пирса и Фреге все нововведения в логике сводились к применению математического метода: символики и дедуктивного вывода логических законов из логических аксиом. Вся эта работа по созданию формальной или символической логики была благосклонно встречена логиками и математиками, так как использование символики позволило избегать психологических, теоретико-познавательных и метафизических смысловых неоднозначностей и ассоциаций.

Систему логики, включающую пропозициональные функции, отношения типа «х любит у» или «точка *A* лежит между точками *B* и *C*», ныне принято называть исчислением предикатов первой ступени. Хотя, по мнению некоторых логиков, такое исчисление охватывает не все типы рассуждений, используемых в математике, например оно не включает математическую индукцию, современные логики отдают предпочтение именно этой логической системе.¹⁹

Распространение логики на все типы рассуждений, используемых в математике, придание утверждениям большей точности за счет проведения различия между высказываниями и пропозициональными функциями, введение кванторов, несомненно, способствовали повышению математической строгости, к которой так стремились математики XIX в. Аксиоматизация логики полностью отвечала духу времени.

Имея в виду наш последующий анализ логической структуры математики, подчеркнем, что как в самой математике, так и в алгебре установление высоких стандартов строгости стало возможным благодаря аксиоматическому подходу, впервые использованному Евклидом. Движение за аксиоматизацию в XIX в. позволило выяснить некоторые особенности аксиоматического подхода. Рассмотрим их подробнее.

Одна из особенностей аксиоматического подхода – необходимость неопределяемых понятий. Математика строится независимо от остальных областей человеческого знания, поэтому одно математическое понятие приходится определять через другие. Но тогда возникла бы бесконечная цепочка определений. Выход из создавшегося затруднения состоит в том, что основные понятия должны быть неопределяемыми. Но как пользоваться неопределяемыми понятиями? Откуда мы знаем, что о них можно утверждать? Ответ на этот вопрос и дает аксиоматика: аксиомы содержат утверждения о неопределяемых (и определяемых) понятиях. Следовательно, аксиомы говорят нам, что можно утверждать о неопределяемых понятиях. Так, если точка и прямая неопределяемы, то аксиома о том, что две точки задают прямую и притом только одну, и аксиома о том, что три точки задают плоскость и притом только одну, служат теми утверждениями, которые мы можем использовать при выводе новых утверждений о точке, прямой и плоскости. Хотя Аристотель в «Органоне», Паскаль в «Трактате о геометрическом духе» и Лейбниц в «Монадологии» подчеркивали необходимость неопределяемых понятий, математики по непонятным причинам прошли мимо этих предупреждений и продолжали давать определения, не имевшие смысла. Еще в начале XIX в. Жозеф Диас Жергонн (1771–1859) высказал со всей определенностью важную мысль: аксиомы говорят нам всё, что мы можем

¹⁹ По мнению некоторых логиков, чтобы охватить все типы рассуждений, используемых в математике, потребовалось бы ввести так называемое исчисление предикатов второй ступени, в котором кванторы применяются к предикатам. Так, чтобы выразить отношение равенства $x=y$, мы должны были бы утверждать дополнительно применимость к y всех предикатов, применимых к x , и для этого ввести квантор предикатов либо словесно («для всех предикатов»), либо с помощью символов $x=y \leftrightarrow (F)(F(x) \leftrightarrow F(y))$.

утверждать о неопределяемых понятиях, т.е. как бы содержат неявные определения таких понятий. Но математики всерьез восприняли эту идею лишь после того, как в 1882 г. Мориц Паш вновь подтвердил необходимость неопределяемых понятий.

Осознание того, что любая дедуктивная система должна содержать неопределяемые понятия, которые можно интерпретировать как угодно, лишь бы вводимые объекты удовлетворяли аксиомам, подняло математику на новый уровень абстракции. Это весьма рано понял Герман Грассман, отметивший в своей «Теории линейной протяженности» (1844), что геометрия не сводится исключительно к изучению реального, физического, пространства. Геометрия – конструкция чисто математическая. Она применима для описания реального пространства, но отнюдь не исчерпывается этой своей интерпретацией. Творцы аксиоматики, работавшие позднее, Паш, Пеано и Гильберт, всячески подчеркивали абстрактность геометрии. Тем не менее, отчетливо сознавая существование неопределяемых понятий, смысл которых ограничен лишь аксиомами, Паш в своих работах мысленно следовал единому образцу геометрии. Пеано, знавший работы Паша, в статье от 1889 г. высказал мысль о возможности многих других интерпретаций геометрии. Гильберт в «Основаниях геометрии» (1899) [50]²⁰ заявил, что, хотя мы используем такие слова, как точка, прямая, плоскость и т.д., вполне можно было бы говорить о пивных кружках, стульях и любых других предметах, лишь бы они удовлетворяли аксиомам. То, что одна дедуктивная система допускает множество интерпретаций, можно расценивать как весьма благоприятное обстоятельство, позволяющее расширить круг возможных приложений, но вместе с тем оно приводит, как мы увидим в дальнейшем (гл. XII), и к некоторым неприятным последствиям.

Паш великолепно понимал современную аксиоматику. Именно ему принадлежит замечание (важность которого в конце XIX в. не была по достоинству оценена) о том, что во всех случаях необходимо дать доказательство **непротиворечивости** любой рассматриваемой системы аксиом, т.е. доказательство того, что выбранная система аксиом не порождает противоречащих друг другу теорем. Проблема непротиворечивости возникла в связи с неевклидовыми геометриями и была для них удовлетворительно разрешена. Однако неевклидова геометрия оставалась для многих довольно непривычной областью математики. Что же касается таких старых фундаментальных ее разделов, как арифметика или евклидова геометрия, то всякие сомнения в их непротиворечивости казались чисто академическими. Тем не менее Паш считал необходимым установить непротиворечивость и этих систем аксиом. Ему вторил Фреге, писавший в «Основаниях арифметики» (1884):

Обычно поступают так, будто принятие постулатов само по себе достаточно для того, чтобы все постулаты выполнялись. Мы постулируем, что операция вычитания, деления или извлечения корня всегда выполняема, и считаем, что этого вполне достаточно. Но почему мы не постулируем, что через любые три точки можно провести прямую? Почему мы не постулируем, что все законы сложения и умножения остаются в силе для комплексных чисел с тремя единицами точно так же, как они выполняются для вещественных чисел? Это происходит потому, что такого рода постулаты содержат противоречие. Прекрасно! Но тогда первое, что нам необходимо сделать, – это доказать непротиворечивость наших остальных постулатов. А пока это не будет сделано, вся строгость, к которой мы так стремимся, останется столь же зыбкой и призрачной, как лунное сияние.

Пеано и его школа в 90-х годах XIX в. также стали несколько серьезнее относиться к проблеме непротиворечивости. Пеано был уверен в том, что методы, позволяющие доказывать непротиворечивость аксиом, не замедлят появиться.

Над проблемой непротиворечивости математики вполне могли бы задуматься еще древние греки. Почему же она выступила на передний план лишь в конце XIX в.? Как мы уже говорили, создание неевклидовой геометрии в значительной мере способствовало осознанию того, что геометрия является творением человека и лишь приближенно описывает происходящее в реальном мире. При всех неоспоримых достоинствах этого описания его нельзя считать истинным в том смысле, что оно не адекватно внутренней структуре окружающего мира и, следовательно, не обязательно непротиворечиво. Движение за аксиоматизацию математики в конце XIX в. заставило математиков понять, сколь глубокая пропасть отделяет математику от реального мира. Каждая аксиоматическая система содержит неопределяемые понятия, свойства которых задаются только аксиомами. Смысл неопределяемых понятий не зафиксирован раз и

²⁰ Гильберт Д. Основания геометрии. – М.–Л.: Гостехиздат, 1948.

навсегда, хотя интуитивно мы представляем себе, что такое точки или прямые. Разумеется, предполагается, что аксиомы выбраны так, чтобы задаваемые ими свойства находились в согласии с теми, которые мы интуитивно с ними связываем. Но можем ли мы быть уверенными в том, что нам удалось выбрать аксиомы именно таким образом, что, формулируя их, мы не привнесли некоторое нежелательное свойство (или же оно следует из принятых нами аксиом), которое может привести к противоречию?

Паш отметил еще одну особенность аксиоматического метода. В любой области математики желательно, чтобы аксиомы были независимыми, т.е. чтобы любую из принятых аксиом нельзя было вывести из остальных, так как аксиома, выведенная из других, является уже не аксиомой, а теоремой. Метод доказательства независимости той или иной аксиомы состоит в указании интерпретации или построении модели, в которой все аксиомы, кроме проверяемой на независимость, выполняются, а проверяемая аксиома не выполняется. (Такая интерпретация не обязательно должна быть совместимой с отрицанием проверяемой аксиомы.) Так, для доказательства независимости аксиомы Евклида о параллельных от остальных аксиом евклидовой геометрии можно воспользоваться интерпретацией гиперболической неевклидовой геометрии, в которой выполняются все аксиомы евклидовой геометрии, кроме аксиомы о параллельных, а сама аксиома о параллельных не выполняется. Интерпретация, удовлетворяющая проверяемой аксиоме и противоположной аксиоме, не была бы непротиворечивой. Следовательно, прежде чем воспользоваться для доказательства независимости какой-либо аксиомы интерпретацией, или моделью, необходимо убедиться в том, что эта интерпретация, или модель, непротиворечива. Так, независимость аксиомы Евклида о параллельных была доказана на модели гиперболической евклидовой геометрии, реализуемой на поверхности в евклидовом пространстве.

В дальнейшем мы расскажем о сомнениях, неадекватностях и глубоких проблемах, которые породила аксиоматизация математики; однако в начале XX в. аксиоматический метод считался идеалом математической строгости. Никто не превозносил аксиоматический метод больше, чем Гильберт, ставший к тому времени признанным лидером мировой математики. В статье «Аксиоматическое мышление» (1918) он утверждал:

Всё, что может быть предметом математического мышления, коль скоро назрела необходимость в создании теории, оказывается в сфере действия аксиоматического метода и тем самым математики. Проникая во всё более глубокие слои аксиом... мы получаем возможность всё дальше заглянуть в сокровенные тайны научного мышления и постичь единство нашего знания. Именно благодаря аксиоматическому методу математика, по-видимому, призвана сыграть ведущую роль во всем нашем знании.

Аналогичные мысли Гильберт высказывал и в 1922 г.:

Аксиоматический метод поистине был и остается подходящим и неоценимым инструментом, в наибольшей мере отвечающим духу каждого точного исследования, в какой бы области оно ни проводилось. Аксиоматический метод логически безупречен и в то же время плодотворен; тем самым он гарантирует полную свободу исследования. В этом смысле применять аксиоматический метод – это значит действовать, понимая, о чем идет речь. Если ранее, до аксиоматического метода, приходилось действовать наивно, слепо веря в существование определенных отношений, то аксиоматический метод устраняет подобную наивность, сохраняя все преимущества уверенности.

Возможно, создается впечатление, что математики приветствовали установление прочной, строгой основы своей науки. Однако математикам ничто человеческое не чуждо. И далеко не все математики с энтузиазмом приветствовали точную формулировку таких основных понятий, как иррациональное число, непрерывность, производная и интеграл. Многие не поняли новой терминологии и сочли точные определения своего рода причудами, отнюдь не обязательными для понимания математики и даже для строгих доказательств. Те, кто так считал, полагались на свою интуицию, несмотря на сюрпризы, преподнесенные открытием непрерывных, но не дифференцируемых функций и других логически правильных, но противоречащих интуиции математических объектов. Так, в 1904 г. Эмиль Пикар (1856–1941), говоря о строгости в теории дифференциальных уравнений с частными производными, заметил: «Истинная строгость плодотворна и этим отличается от другой строгости, чисто формальной и утомительной, бросающей тень на затрагиваемые ею проблемы». Шарль Эрмит (1822–1901) в письме к Томасу Яну Стильтесу от 20 мая 1893 г. признавался: «С чувством непреодолимого отвращения я отшатываюсь от достойного всякого сожаления зла – непрерывных функций, не имеющих про-

изводных». Пуанкаре (1854–1932), с чьей философией математики нам предстоит познакомиться в следующей главе, жаловался: «В прежние времена новые функции вводились для того, чтобы их можно было применять. Ныне же строят функции, чтобы прийти в противоречие с выводами наших предшественников. Такие функции не годятся ни для чего иного».

Многие авторы тех определений и доказательств, ошибочность которых стала очевидной, принялись утверждать, будто имели в виду именно тот смысл, к которому привела строгая теория. К подобному приему прибегал даже такой выдающийся математик, как Эмиль Борель. Другие возражали против, как они говорили, «выискивания блох». В одной из своих работ, опубликованной в 1934 г., Годфри Гарольд Харди назвал строгость неотъемлемым элементом математики. Другие математики не понимали природы математической строгости и, опасаясь неприятностей, поносили ее. Некоторые даже поговаривали об анархии в математике. Новые идеи, в частности те, которые способствовали установлению математической строгости, математики воспринимали ничуть не менее предвзято, чем обычно люди воспринимают любые новшества.

Успехи в области оснований математики обнаружили еще одну сторону математических творений. Строгость не только удовлетворяла потребностям математики XIX в., но и позволила нам кое-что понять в развитии математики. Предполагалось, что обоснованные по последнему слову «математической техники» строгие структуры гарантируют «доброкачественность» математики, но эти гарантии оказались необоснованными. Ни одна теорема арифметики, алгебры или евклидовой геометрии не была изменена в результате пересмотра оснований, и только некоторые теоремы математического анализа пришлось сформулировать точнее. Например, прежде чем воспользоваться производной непрерывной функции, современным математикам приходится вводить дополнительную гипотезу о том, что эта функция дифференцируема. В действительности все новые аксиоматические структуры и строгость лишь подтвердили то, в чем и без того не сомневались математики. Аксиомы позволили доказать уже известные, а не какие-то новые теоремы, так как «старые» теоремы в подавляющем большинстве были правильными. В целом это означало, что в основе математики лежит не логика, а здравый смысл и интуиция. Строгость, по выражению Жака Адамара, лишь освящает то, что завоевано интуицией. Герман Вейль назвал строгость гигиеной, с помощью которой математик поддерживает здоровье и силу своих идей.

Как бы то ни было, к началу XX в. строгость снова стала играть заметную роль в математике и служить, хотя и с большим запозданием, гарантией прочности и обоснованности достижений, накопленных математикой за много столетий. Математики могли наконец во всеуслышание заявить, что исполнили свой долг по отношению к стандарту, установленному древними греками, и не без облегчения отметить, что, за исключением незначительных поправок, здание, построенное ими на эмпирической или интуитивной базе, теперь было в основном подкреплено логикой. При мысли об этом математиков охватывало ликование и даже самодовольство. Оглядываясь в прошлое, они могли указать несколько кризисных ситуаций (иррациональные числа, математический анализ, неевклидова геометрия, кватернионы) и поздравить себя с тем, что всякий раз им удавалось успешно разрешить возникавшую проблему.

На II Международном конгрессе математиков, состоявшемся в 1900 г. в Париже, с докладом на пленарном заседании выступил Анри Пуанкаре, соперничающий тогда с Гильбертом в борьбе за лидерство в математике. Несмотря на скептическое отношение к ценности некоторых усовершенствований в основаниях математики Пуанкаре не без гордости заметил:

Достигли ли мы абсолютной строгости? Ведь на каждой стадии эволюции наши предки также верили в то, что достигли ее. Если они ошибались, то не ошибаемся ли и мы, подобно им?.. В новейшем анализе – если мы пожелаем взять на себя труд быть строгими – находят место силлогизмы и обращения к этой интуиции чистого числа, единственной интуиции, которая не может обмануть нас. Можно сказать, что ныне достигнута абсолютная строгость. ([1]²¹, с. 163–164.)

Пуанкаре повторил эти преисполненные гордости слова в одном из очерков, составивших его книгу «Ценность науки» (1905) [1]. И эта гордость вполне понятна, если учесть, какая проницательность потребовалась, чтобы добиться строгости в различных разделах математики.

²¹ Пуанкаре А. О науке. – М.: Наука, 1983.

Наконец-то математика обрела основания, которые с радостью приняли все, за исключением нескольких тугодумов. Математикам было чему радоваться.

Один из персонажей «Кандида» Вольтера философ доктор Панглосс даже в ожидании повешения утверждает о «лучшем из миров». Так и математики, не ведая, что вскоре их ожидает взрыв ими же заложенного сокрушительного заряда, с энтузиазмом рассуждали о том, что достигли наилучшего из возможных состояний. Между тем тучи уже сгущались, и если бы математики, собравшиеся в 1900 г. на конгресс, не были так поглощены заздравными тостами, то они без труда бы заметили их.

Но и среди участников достопамятного конгресса 1900 г. нашелся человек, который прекрасно понимал, что в основаниях математики разрешены далеко не все проблемы. На этом конгрессе Давид Гильберт выступил с знаменитым докладом, где перечислил 23 проблемы [51]²², решение которых, по его мнению, девятнадцатое столетие завещало двадцатому. Первая из названных проблем состояла из двух частей. Георг Кантор ввел трансфинитные числа для обозначения мощности (числа элементов) бесконечных множеств. В этой связи Гильберт предложил доказать, что трансфинитное число, выражающее мощность множества всех вещественных чисел, является ближайшим к трансфинитному числу, выражающему мощность множества всех целых чисел. К этой проблеме мы вернемся в гл. IX.

Во второй части первой проблемы Гильберта говорилось о необходимости поиска метода, который позволил бы переупорядочить вещественные числа, чтобы их множество стало вполне упорядоченным. С понятием вполне упорядоченного множества мы подробнее познакомимся в дальнейшем, а пока достаточно лишь сказать, что если множество всех вещественных чисел вполне упорядочено, то в любой извлеченной из него подпоследовательности должен существовать первый элемент. При обычном упорядочении вещественных чисел это требование не выполняется: например, если мы рассмотрим все числа, которые больше, например, 5, то в этом подмножестве первый элемент отсутствует.

Вторая проблема Гильберта была более очевидной и имела более широкое значение. Мы уже упоминали о проблеме непротиворечивости, поднятой в связи с неевклидовыми геометриями, и о доказательствах их непротиворечивости, исходивших из предположения о непротиворечивости евклидовой геометрии. Используя аналитическую геометрию, Гильберт показал, что евклидова геометрия непротиворечива, если непротиворечива арифметика. И содержание второй проблемы Гильберта составляло требование дать доказательство непротиворечивости арифметики.

Обе части первой проблемы Гильберта были известны еще Кантору. Паш, Пеано и Фреге обращали внимание также и на проблему непротиворечивости. Но только Гильберт в своем докладе 1900 г. в полной мере продемонстрировал фундаментальный, непреходящий характер этих проблем. Большинство математиков, слушавших доклад Гильберта, несомненно, считали проблемы непротиворечивости тривиальными, несущественными, своего рода математическими курьезами и придавали большее значение другим проблемам, сформулированным Гильбертом. Что же касалось непротиворечивости арифметики, то она ни у кого не вызывала сомнений. То, что многие сомневались в непротиворечивости неевклидовой геометрии, вполне понятно, если учесть, сколь необычной и даже противоречащей интуиции была эта геометрия. Но вещественные числа находились в обращении более пяти тысяч лет, и о них было доказано бесчисленное множество теорем. Никаких противоречий при этом обнаружено не было. Аксиомы вещественных чисел приводили к хорошо известным теоремам. Как же система аксиом вещественных чисел могла быть противоречивой?

Но всякие сомнения в том, насколько мудро поступил Гильберт, включив названные выше проблемы в число 23 наиболее важных проблем и, более того, отведя им почетные первые места, вскоре рассеялись. Тучи, собравшиеся над математикой, закрыли теперь весь горизонт. Началась гроза, и некоторые математики слышали раскаты грома. Но даже Гильберт не мог предвидеть всё неистовство бури, обрушившейся на здание математики.

²² Проблемы Гильберта. – М.: Наука, 1969.

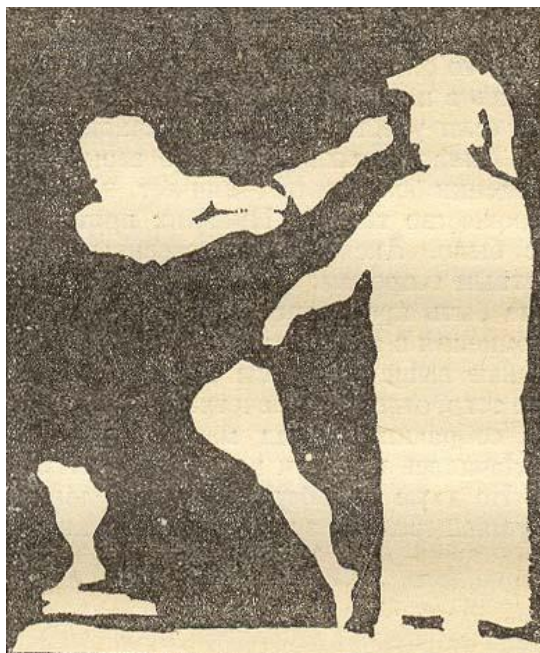
IX. Изгнание из рая: новый кризис оснований математики

В математике нет настоящих противоречий.

Гаусс

Логика – это искусство уверенно совершать ошибки.

Неизвестный автор



Итак, после многовековых блужданий в тумане математикам как будто бы удалось к началу XX в. придать своей науке ту идеальную структуру, которая была декларирована Аристотелем и, казалось, осуществлена Евклидом в его «Началах». Математики наконец-то полностью осознали необходимость неопределяемых понятий; определения были очищены от неясных или вызывавших какие-либо возражения терминов; некоторые области математики были построены на строгой аксиоматической основе; на смену умозаключениям, опиравшимся на интуитивные соображения или эмпирические данные, пришли надежные, строгие, дедуктивные доказательства. Даже законы логики были расширены настолько, что охватывали теперь те типы рассуждений, которые ранее математики использовали неформально и порой неявно, хотя, как показывал опыт, эти рассуждения всегда приводили к правильным результатам. Как уже говорилось, в начале XX в. у математиков были поводы торжествовать. Но пока они праздновали свои победы, уже назревали события, которые в дальнейшем лишили математиков покоя в гораздо большей степени, чем создание неевклидовой геометрии и кватернионов в первой половине XIX в. По меткому замечанию Фреге, «едва здание было достроено, как фундамент рухнул».

Случившееся нельзя было считать полной неожиданностью: еще Гильберт обратил внимание математиков на то, что некоторые проблемы в основаниях математики оставались нерешенными (гл. VIII). Самой важной из этих проблем, по мнению Гильберта, была проблема установления непротиворечивости тех или иных аксиоматизируемых разделов математики. Гильберт отчетливо понимал, что аксиоматический метод базируется на исходном списке неопределяемых понятий, а также аксиом, которым эти понятия должны удовлетворять. Интуитивно смысл всех фигурирующих в математической теории понятий и аксиом был вполне ясен. Такие математические понятия, как точка, прямая и плоскость, имеют вполне конкретные физические аналоги, а аксиомы евклидовой геометрии содержат некоторые физически ясные утверждения, касающиеся этих понятий. Тем не менее, как подчеркивал Гильберт, абстрактная, чисто логическая схема евклидовой геометрии не требует, чтобы понятия точки, прямой и плоскости были привязаны к какой-то одной, например «физической», интерпретации. Что же касается аксиом, то их формулируют, вкладывая в них как можно меньше, с тем, чтобы извлечь из них возможно больше. И хотя аксиомы принято формулировать так, чтобы их физический смысл не вызывал сомнений, тем не менее существует опасность, что сформулированные даже самым тщательным образом аксиомы могут оказаться противоречивыми, т.е. привести к противоречию. Паш, Пеано и Фреге сознавали эту опасность, и в своем докладе на II Международном математическом конгрессе 1900 г. Гильберт также обратил внимание математиков на это обстоятельство.

Слабости абстрактной формулировки понятий, отношений и фактов, заимствованных из физической реальности, можно проиллюстрировать на таком примере, конечно весьма грубо

отражающем суть дела. Представим себе, что было совершено какое-то преступление (многие, возможно, согласились бы с тем, что математика – это преступление). Следовательно, которому поручено раскрыть преступление, располагает неопределяемыми понятиями: преступник, время совершения преступления и т.д. Все обнаруживаемые в ходе следствия факты следователь скрупулезно записывает. Это его аксиомы. Затем следователь начинает делать логические выводы в надежде, что это позволит ему выдвинуть какие-то версии. Весьма вероятно, что его выводы, хотя они и основаны на правдоподобных предположениях относительно происходивших событий, окажутся противоречивыми, так как исходные предположения либо не соответствуют подлинным событиям, либо недостаточно точно их отражают. В реальной же (физической) ситуации никаких противоречий нет и быть не может. Было совершено преступление, был преступник. Но логические выводы могут привести следователя, скажем, к заключению, что преступник одновременно и низкого роста (около 1,5 м), как следует из анализа следов преступления, и высокого роста (около 1,8 м), как показывает кто-то из свидетелей.

Вряд ли математики сочли бы ключевой проблемой доказательство непротиворечивости нескольких аксиоматических структур, если бы не дальнейшее развитие событий. К началу XX в. математики отчетливо сознавали, что в вопросах непротиворечивости они не могут полагаться на «физическую реализуемость» математики. Ранее, когда евклидова геометрия считалась геометрией реального физического пространства, мысль о том, что непрерывная дедуктивная цепочка теорем может когда-нибудь привести к противоречию, казалась дикой. Но к началу XX в. стало ясно, что евклидова геометрия представляет собой лишь логическую структуру, возведенную на фундаменте из примерно двадцати аксиом, не данных нам богом или природой, а сформулированных человеком. В такой системе вполне могли быть и противоречащие друг другу теоремы. Подобное открытие обесценивало многое из того, что было достигнуто ранее: достаточно было где-нибудь оказаться двум взаимно исключающим теоремам, как их могли использовать для доказательства новых противоречий и полученные в таком случае новые теоремы не имели бы смысла. Гильберт отверг столь страшную возможность, доказав, что евклидова геометрия непротиворечива, если непротиворечива логическая структура арифметики, т.е. система вещественных чисел. Предложенное Гильбертом доказательство в тот период еще не вызывалось насущной необходимостью и потому не привлекло особого внимания математиков (гл. VIII).

Но к всеобщему ужасу в самом начале XX в. противоречия были обнаружены в теории, лежащей в основе наших представлений о числе и далеко простирающейся за пределы арифметики. К 1904 г. выдающийся математик Альфред Принсхейм (1850–1914) имел все основания утверждать, что истина, поиском которой занимается математика, – это не больше и не меньше как непротиворечивость. И когда в работе 1918 г. Гильберт вновь подчеркнул важность проблемы непротиворечивости, у него были теперь для этого гораздо более веские доводы, чем в 1900 г.

Новой теорией, которая привела к противоречиям и открыла многим глаза на противоречия, существовавшие в более старых областях математики, была теория бесконечных множеств. Наведение математической строгости в анализе привело к необходимости учитывать различие между сходящимися (т.е. имеющими конечную сумму) и расходящимися бесконечными рядами. Некоторые из таких рядов, например бесконечные ряды тригонометрических функций, названные рядами Фурье – в честь активно использовавшего их Жозефа Фурье, стали играть важную роль, и при попытке строгого обоснования анализа породили немало проблем. К решению этих проблем и приступил Георг Кантор (1845–1918). Логика исследования привела его к рассмотрению теории числовых множеств, в частности к введению мощностей таких бесконечных множеств, как множество всех нечетных чисел, множество всех рациональных чисел (включающее в себя положительные и отрицательные целые числа, а также дроби) и множество всех вещественных чисел.

Кантор порвал с многовековой традицией уже тем, что рассматривал бесконечные множества как единые сущности, притом сущности, доступные человеческому разуму. Начиная с Аристотеля математики проводили различие между актуальной бесконечностью объектов и потенциальной бесконечностью. Чтобы пояснить эти понятия, рассмотрим возраст Вселенной. Если предположить, что Вселенная возникла в какой-то момент времени в далеком прошлом и будет существовать вечно, то ее возраст потенциально бесконечен: в любой момент времени возраст Вселенной конечен, но он продолжает возрастать и в конце концов превзойдет любое число лет. Множество (положительных) целых чисел также потенциально бесконечно: оборвав

счет, например, на миллионе, мы всегда можем затем прибавить к нему 1, 2 и т.д. Но если Вселенная существовала в прошлом всегда, то ее возраст в любой момент времени актуально бесконечен. Аналогично множество целых чисел, рассматриваемое в «готовом виде» как существующая совокупность, актуально бесконечно.

Вопрос о том, следует ли считать бесконечные множества актуально или потенциально бесконечными, имеет длинную историю. Аристотель в своей «Физике» ([6]²³, т. 3, с. 59–221) утверждал: «Остается альтернатива, согласно которой бесконечное имеет потенциальное существование... Актуально бесконечное не существует». По мнению Аристотеля, актуальная бесконечность не нужна математике. Греки вообще считали бесконечность недопустимым понятием. Бесконечность – это нечто безграничное и неопределенное. Последующие дискуссии нередко лишь затемняли существо дела, так как математики говорили о бесконечности как о числе, не давая явного определения понятия бесконечности и не указывая свойства этого понятия. Так, Эйлер довольно легкомысленно утверждал в своей «Алгебре» (1770), что $1/0$ – бесконечность, хотя и не счел нужным определить, что такое бесконечность, а лишь ввел для нее обозначение ∞ . Без тени сомнения Эйлер утверждал также, что $2/0$ вдвое больше, чем $1/0$. Еще больше недоразумений возникало в тех случаях, когда речь шла об использовании символа ∞ для записи пределов при n , стремящемся к бесконечности (например, для записи того, что предел $1/n$ при n , стремящемся к ∞ , равен 0). В подобных случаях символ ∞ означает лишь, что n неограниченно возрастает и может принимать сколь угодно большие (но конечные!) значения, при которых разность между 0 и $1/n$ становится сколь угодно малой. Необходимость в обращении к актуальной бесконечности при таких предельных переходах не возникает.

Большинство математиков (Галилей, Лейбниц, Коши, Гаусс и другие) отчетливо понимали различие между потенциально бесконечными и актуально бесконечными множествами и исключали актуально бесконечные множества из рассмотрения. Если им приходилось, например, говорить о множестве всех рациональных чисел, то они отказывались приписывать этому множеству число – его мощность. Декарт утверждал: «Бесконечность распознаваема, но не познаваема». Гаусс писал в 1831 г. Шумахеру: «В математике бесконечную величину никогда нельзя использовать как нечто окончательное; бесконечность – не более чем *façon de parler* [манера выражаться], означающая предел, к которому стремятся одни величины, когда другие бесконечно убывают».

Таким образом, введя актуально бесконечные множества, Кантор выступил против традиционных представлений о бесконечности, разделяемых великими математиками прошлого. Свою позицию Кантор пытался аргументировать ссылкой на то, что потенциальная бесконечность в действительности зависит от логически предшествующей ей актуальной бесконечности. Кантор указывал также на то, что десятичные разложения иррациональных чисел, например числа $\sqrt{2}$, представляют собой актуально бесконечные множества, поскольку любой конечный отрезок такого разложения дает лишь конечное приближение к иррациональному числу. Сознывая, сколь резко он расходится во взглядах со своими предшественниками, Кантор с горечью признался в 1883 г.: «Я оказался в своего рода оппозиции к общепринятым взглядам на математическую бесконечность и к нередко отстаиваемым суждениям о природе числа».

В 1873 г. Кантор не только занялся изучением бесконечных множеств как «готовых» (т.е. реально существующих) сущностей, но и поставил задачу классифицировать актуально бесконечные множества ([15*]²⁴, [53]²⁵). Введенные Кантором определения позволяли сравнивать два актуально бесконечных множества и устанавливать, содержат ли они одинаковое «число элементов» или нет. Основная идея Кантора сводилась к установлению взаимно-однозначного соответствия между множествами. Так, 5 книгам и 5 шарам можно сопоставить одно и то же число 5 потому, что книги и шары можно разбить на пары, каждая из которых содержит по одной, и только одной книге, и по одному, и только одному, шару. Аналогичное разбиение на пары Кантор применил, устанавливая взаимно-однозначное соответствие между элементами бесконеч-

²³ Аристотель. Сочинения в 4-х томах. – М.: Мысль, 1976 (т.1), 1981 (т. 3).

²⁴ Cantor G. Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers. – New York: Dover Inc., 1955. [Немецкий оригинал: в кн.: Cantor G. Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts. – Heidelberg Springer, 1980; русский перевод (неполный): Кантор Г. Теория ансамблей. – Спб.: Образование, 1914 («Новые идеи в математике», вып. 6).]

²⁵ Даубен Д.-У. Георг Кантор и рождение теории трансфинитных множеств. – В мире науки, 1983, № 8, с. 76–78. **МОИ**. См. [МОИ 05](#).

ных множеств. Например, взаимно-однозначное соответствие между положительными целыми числами и четными числами можно установить, объединив те и другие в пары:

1 2 3 4 5 ...
2 4 6 8 10 ...

Каждому целому числу при этом соответствует ровно одно четное число (равное удвоенному целому), а каждому четному числу соответствует ровно одно целое число (равное половине четного). Следовательно, в каждом из двух бесконечных множеств – множестве целых чисел и множестве четных чисел – элементов **столько же**, сколько в другом множестве. Установленное соответствие (то, что всё множество целых чисел можно поставить во взаимно-однозначное соответствие с частью этого множества) казалось неразумным предшественникам Кантора²⁶ и заставляло их отвергать все попытки рассмотрения бесконечных множеств. Но это не испугало Кантора. С присущей ему проницательностью он понял, что бесконечные множества могут подчиняться новым законам, не применимым к конечным совокупностям или множествам, подобно тому как, например, кватернионы подчиняются законам, не применимым к вещественным числам. И Кантор **определил** бесконечное множество как такое множество, которое можно поставить во взаимно-однозначное соответствие со своим собственным (т.е. отличным от всего множества) подмножеством.

Идея взаимно-однозначного соответствия привела Кантора к неожиданному результату: он показал, что можно установить взаимно-однозначное соответствие между точками прямой и точками плоскости (и даже точками n -мерного пространства). По поводу этого результата он писал в 1877 г. своему другу Рихарду Дедекинду: «Я вижу это, но не могу в это поверить». Тем не менее Кантор поверил в правильность полученного им результата и, следуя принципу взаимно-однозначного соответствия, установил для бесконечных множеств отношение эквивалентности, или равенства («равномощности» двух множеств).

Кантор выяснил также, в каком смысле следует понимать, что одно бесконечное множество **больше** другого²⁷: если множество A можно поставить во взаимно-однозначное соответствие с частью или собственным подмножеством множества B , а множество B невозможно поставить во взаимно-однозначное соответствие с множеством A или собственным подмножеством множества A , то множество B по определению больше множества A . Это определение по существу обобщает на бесконечные множества то, что непосредственно очевидно в случае конечных множеств. Если у нас имеется 5 шаров и 7 книг, то между шарами и частью книг можно установить взаимно-однозначное соответствие, но невозможно установить взаимно-однозначное соответствие между всеми книгами и всеми шарами или частью шаров. Используя свои определения равенства и неравенства бесконечных множеств, Кантор сумел получить поистине удивительный результат: множество целых чисел равно («равномощно») множеству рациональных чисел (всех положительных и отрицательных целых чисел и дробей), но меньше множества всех вещественных (рациональных и иррациональных) чисел.

Подобно тому, как количество элементов в конечных множествах мы обозначаем числами 5, 7, 10 и т.д., Кантор предложил ввести специальные символы n для обозначения количеств элементов в бесконечных множествах. Множество целых (или натуральных) чисел и множества, которые можно поставить во взаимно-однозначное соответствие с этим множеством, содержат одинаковое количество (или «число») элементов, которое Кантор обозначил символом $\aleph_0$ (алеф-нуль; алеф – первая буква алфавита на иврите). Так как, по доказанному, множество всех вещественных чисел больше множества целых чисел, Кантор обозначил количество элементов в множестве всех вещественных чисел новым символом – c .

²⁶ **Яглом:** Впрочем, еще Галилей, исходя из сходных соображений, утверждал, что квадратов натуральных чисел имеется столько же, сколько и самих натуральных чисел.

²⁷ **Яглом:** Фундаментом идущей от Кантора «иерархии бесконечностей» является (ныне широкоизвестная и в ряде стран включаемая даже в школьные учебники математики) *теорема Кантора–Бернштейна*, согласно которой если два множества A и B таковы, что существует взаимно-однозначное соответствие между A и частью (подмножеством) B и между B и частью A , то можно установить также и взаимно-однозначное соответствие между A и B ; таким образом, любые два множества либо «одинаковы» (эквивалентны, равномощны), либо одно из них «больше» другого. Кантор хорошо понимал важность этой теоремы, но доказательство ее долго ему не давалось. О своих затруднениях он сообщил Р. Дедекинду, который познакомил с поставленной Кантором задачей своих студентов, после чего (в первой половине 90-х годов XIX в.) соответствующая теорема была очень быстро доказана совсем еще юным учеником Дедекинда, студентом Гёттингенского университета Феликсом Бернштейном.

Кантору удалось доказать, что для любого заданного множества всегда найдется множество, большее исходного. Так, множество всех подмножеств данного множества всегда больше первого множества. Не вдаваясь в подробности доказательства этой теоремы, продемонстрируем разумность этого результата на примере конечных множеств. Если множество состоит из 4 элементов, то из них можно составить 4 различных подмножества, содержащих по 1 элементу; 6 различных подмножеств, содержащих по 2 элемента; 4 различных подмножества, содержащих 3 элемента; наконец, 1 множество, содержащее 4 элемента. Если добавить сюда еще пустое множество, совсем не содержащее элементов, то общее число подмножеств окажется равным $16 = 2^4$, что, разумеется, больше 4. В соответствии с результатом, имеющим место для конечных множеств, Кантор обозначил количество подмножеств (бесконечного!) множества, содержащего α элементов (где α – трансфинитное число), через 2^α ; его результат гласил: $2^\alpha > \alpha$. Рассматривая все возможные подмножества множества целых чисел, Кантор сумел показать, что $2^{\aleph_0} = c$, где c – «число» всех вещественных чисел.

Когда Кантор в 70-х годах XIX в. приступил к созданию теории бесконечных множеств и еще много лет спустя, эта теория находилась на периферии математической науки. Доказанные им теоремы о тригонометрических рядах не были столь уж фундаментальными. Но к началу XX в. канторовская теория множеств нашла широкое применение во многих областях математики. Кантор и Рихард Дедекинд понимали, сколь важна теория множеств для обоснования теории целых чисел (конечных, или «финитных», и трансфинитных), для анализа понятий линии или размерности и даже для оснований математики. Другие математики, в частности Эмиль Борель и Анри Леон Лебег, к тому времени уже работали над обобщением интеграла, в основу которого была положена канторовская теория бесконечных множеств.

Поэтому, когда сам Кантор обнаружил, что его теория множеств сопряжена с определенными трудностями, это было далеко не маловажным событием. Как уже говорилось, Кантор установил, что существуют всё большие бесконечные множества, т.е. всё большие трансфинитные числа. Но в 1895 г. у Кантора возникла идея рассмотреть множество всех множеств. Мощность такого «сверхмножества» должна была бы быть самой большой из возможных. Но еще ранее Кантор доказал, что множество всех подмножеств любого заданного множества должно обладать трансфинитным числом, которое превосходит трансфинитное число, отвечающее исходному множеству. Следовательно, заключил Кантор, должно существовать трансфинитное число, превосходящее наибольшее из трансфинитных чисел. Придя к столь нелепому выводу, Кантор сначала растерялся; однако затем он решил, что все множества можно разбить на противоречивые и непротиворечивые, и в 1899 г. сообщил об этом Дедекинду. Таким образом, множество всех множеств и соответствующее ему трансфинитное число попадали в разряд «противоречивых» – и тем самым исключались из рассмотрения.

Когда Бертран Рассел (1872–1970) впервые узнал о выводе, к которому пришел Кантор по поводу множества всех множеств, он усомнился в правильности рассуждений Кантора. В 1901 г. Рассел писал в своей работе, что Кантор, должно быть, «совершил очень тонкую логическую ошибку, которую я [Рассел] надеюсь объяснить в одной из следующих работ». Ясно, продолжал Рассел, что наибольшее трансфинитное число должно существовать, так как если взято всё, то не останется ничего и, следовательно, ничего нельзя добавить. Рассел принялся размышлять над этой проблемой – и лишь пополнил арсенал проблем своим собственным «парадоксом», с которым мы вскоре познакомимся. Когда шестнадцать лет спустя статья Рассела была перепечатана в сборнике «Мистицизм и логика», он счел нужным добавить к ней подстрочное примечание, в котором извинился за допущенную ранее ошибку, ибо объяснить парадокс Кантора ему так и не удалось.

Помимо уже описанных количественных трансфинитных чисел, названных кардинальными, Кантор ввел также порядковые трансфинитные (ординальные) числа. Различие между ними достаточно тонко. Если мы рассматриваем, например, множество монет одинакового достоинства, то обычно имеет значение лишь количество монет, но никак не порядок, в котором они расположены. Но если требуется упорядочить студентов по успеваемости, то всегда найдется первый, второй, третий студент и т.д. Если в группе десять студентов, то занимаемые ими места в таком перечне образуют множество от первого до десятого. Это и есть множество ординальных чисел. Хотя в некоторых ранее существовавших цивилизациях и проводилось различие между кардинальными и ординальными числами, количество элементов в упорядоченном множестве из десяти элементов обычно обозначалось тем же символом, что и количество элементов в неупорядоченном множестве из десяти элементов. Так же поступали и в

дальнейшем; подобным образом действуем и мы. Действительно, установив, кто занял десятое место, мы тем самым находим, что число людей, которых мы предварительно расставили по ранжиру, или упорядочили, равно десяти, и обозначаем количество элементов как в упорядоченном, так и в неупорядоченном множестве из десяти людей одним и тем же символом 10. В случае бесконечных множеств различие между кардинальными и ординальными числами более существенно, и поэтому для обозначения их применяют различные символы. Так, Кантор обозначал ординальное число, соответствующее упорядоченному множеству целых чисел 1, 2, 3, ..., буквой ω . Упорядоченному множеству

1, 2, 3, ..., 1, 2, 3 (или, если угодно, 4, 5, 6, ..., 1, 2, 3)

в обозначениях Кантора (сохранившихся и поныне) соответствовал символ $\omega+3$. Кантор ввел иерархию трансфинитных ординальных чисел. Эта иерархия простиралась до $\omega \cdot \omega$, ω^n , ω^ω и далее (ср. [53]²⁸).

Разработав теорию трансфинитных ординальных чисел, Кантор в 1895 г. понял, что с этими числами также связана определенная трудность, о чем и сообщил Гильберту в том же году. Первым, кто указал на эту трудность в опубликованной (1897) работе, был Чезаре Бурали-Форти (1861–1931). Кантор считал, что множество ординальных чисел можно упорядочить подходящим образом по аналогии с тем, как упорядочены по величине хорошо знакомые всем вещественные числа. Но одна из теорем о трансфинитных ординальных числах утверждает, что ординальное число множества всех ординальных чисел от 1 и вплоть до любого ординального числа α (включая и само число α) больше α . Например, ординальное число множества ординальных чисел 1, 2, 3, ..., ω равно $\omega+1$. А это в свою очередь означает, что множество всех ординальных чисел должно иметь ординальное число, превышающее самое большое число этого множества. Действительно, заметил Бурали-Форти, даже и к самому большому ординальному числу мы всегда можем прибавить единицу и получить еще большее ординальное число. Возникает противоречие, так как рассматриваемое множество, по предположению, содержит **все** ординальные числа. Из этого Бурали-Форти заключил, что ординальные числа допускают только частичное упорядочение.

Столкнувшись всего лишь с этими двумя проблемами, большинство математиков, несомненно, могли бы и дальше пребывать в том состоянии безмятежности, которое они обрели в результате пересмотра оснований математики в XIX в. Над вопросом о том, существует ли наибольшее кардинальное и ординальное числа, они предпочитали не задумываться. Ведь не существует же наибольшего целого числа – и никого это никогда не беспокоило!

Тем не менее канторовская теория бесконечных множеств вызвала бурю протестов. Несмотря на то, что эта теория нашла, как уже говорилось, применение во многих областях математики, некоторые ученые по-прежнему отказывались принимать актуально бесконечные множества и всё, что с ними связано. Леопольд Кронекер, испытывавший к тому же личную антипатию к Кантору, называл того шарлатаном. Анри Пуанкаре называл теорию множеств тяжелой болезнью и считал ее своего рода математической патологией. «Грядущие поколения, – заявил он в 1908 г., – будут рассматривать теорию множеств как болезнь, от которой они излечились». Даже в 20-х годах XX в. многие математики стремились избегать использования трансфинитных чисел (гл. X). Кантор выступил в защиту своей теории. Он утверждал, что разделяет философию Платона и верит, что в окружающем нас мире идеи существуют независимо от человека. И чтобы осознать реальность этих идей, необходимо лишь задуматься над ними. Парируя критические замечания философов, Кантор приводил метафизические и даже богословские доводы.²⁹

К счастью, у теории Кантора были не только противники, но и сторонники. Рассел назвал Кантора одним из великих мыслителей XIX в. В 1910 г. Рассел писал: «Решение проблем, издавна окутывавших тайной математическую бесконечность, является, вероятно, величайшим достижением, которым должен гордиться наш век». Расселу вторил Гильберт: «Никто не изгонит нас из рая, созданного Кантором». В 1926 г. Гильберт так отозвался о трудах Кантора: «Мне

²⁸ Даубен Д.-У. Георг Кантор и рождение теории трансфинитных множеств. – В мире науки, 1983, № 8, с. 76–78. **МОИ:** См. [МОИ 05](#).

²⁹ **Яглом:** Являясь в соответствии с семейной традицией ревностным христианином (лютеранином), Кантор охотно использовал в своих высказываниях религиозные аргументы; но значение соображений такого рода для его научного творчества не было существенным (в литературе оно нередко преувеличивается). Однако с течением времени, когда творческая сила Кантора-математика пошла на убыль, его обращения к теологии стали более частыми.

представляется, что это самый восхитительный цветок математической мысли и одно из величайших достижений человеческой деятельности в сфере чистого мышления».

Причину споров, которые породила теория множеств, очень тонко и точно охарактеризовал Феликс Хаусдорф в «Основаниях теории множеств» (1914)³⁰. Теорию множеств он метко назвал «областью, где ничто не является очевидным, где истинные утверждения нередко звучат парадоксально, а правдоподобные зачастую оказываются ложными».

Большинство математиков были обеспокоены вытекавшими из теории Кантора следствиями по совершенно иной причине, нежели приемлемость или неприемлемость бесконечных множеств различной мощности. Противоречия, вскрытые Кантором при попытке сопоставить (трансфинитное) число множеству всех множеств и множеству всех ординальных чисел, заставили математиков осознать, что они используют аналогичные понятия не только в новых, но и в, казалось бы, хорошо обоснованных традиционных областях математики. Обнаруженные противоречия математики предпочитали называть парадоксами, так как парадокс может быть объяснен, а математиков не покидала надежда, что все встретившиеся трудности им в конце концов удастся разрешить. (В наше время то, что раньше называли парадоксами, чаще называют «антиномии».)

Приведем некоторые из парадоксов. Нематематическим примером парадоксов теории множеств может служить высказывание «Из всех правил имеются исключения». Само это высказывание является правилом. Следовательно, для него можно найти по крайней мере одно исключение. Но это означает, что существует правило, не имеющее ни одного исключения. Такого рода высказывания содержат ссылку на самих себя и отрицают самих себя.

Наибольшей известностью из нематематических парадоксов пользуется так называемый парадокс лжеца. Его разбирали Аристотель и многие другие логики, жившие позднее. В классическом варианте парадокса лжеца речь идет о высказывании «Это утверждение ложно». Обозначим предложение, стоящее в кавычках, через S . Если S истинно, то истинно то, что оно утверждает. Следовательно, S ложно. Если S ложно, то ложно то, что оно утверждает. Следовательно, S истинно.

Парадокс лжеца существует во многих вариантах. Например, комментируя какое-то свое высказывание, человек может заметить: «Всё, что я говорю, – ложь». Является ли высказывание «Всё, что я говорю, – ложь» истинным или ложным? Если человек действительно лжет, то, утверждая, что он лжет, он говорит правду, а если человек говорит правду, то, утверждая, что он лжет, он действительно лжет. В некоторых вариантах парадокса лжеца ссылка на себя менее очевидна. Так, два высказывания: «Следующее за этим утверждение ложно», «предыдущее утверждение истинно» – содержат противоречие, так как если второе утверждение истинно, то тогда заведомо ложно первое утверждение, сообщаемое нам о том, что второе утверждение ложно. Если же второе утверждение, как и говорится в первом утверждении, ложно, то значит, первое утверждение ложно и, следовательно, второе утверждение должно быть истинным.

Курту Гёделю (1906–1978), величайшему логике XX в., принадлежит несколько иной вариант парадокса с противоречивыми высказываниями. 4 мая 1934 г. A произносит единственную фразу: «Любое высказывание, которое A сделает 4 мая 1934 г., ложно». Это высказывание не может быть истинным, так как утверждает о самом себе, что оно ложно. Но оно не может быть и ложным, так как, для того, чтобы оно было ложным, A должен был бы высказать 4 мая 1934 г. хоть одну истину, – а A сказал в этот день лишь одну фразу.

³⁰ **Яглом:** Автор первого в мировой литературе учебника теории множеств Феликс Хаусдорф (1868–1942) долгие годы был одним из признанных лидеров берлинской математической школы. Его учебник по теории множеств имел два варианта, настолько резко различающиеся между собой, что их вполне можно считать самостоятельными книгами: «Основы теории множеств» (Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig, Teubner, 1914) и «Теория множеств» (Mengenlehre, Leipzig, Teubner, 1927). Совершенно самостоятельным произведением мировой математической литературы является русский вариант той же книги [54: Хаусдорф Ф. Теория множеств. – М.: Л.; Гостехиздат, 1937], в которой редакторы П.С. Александров и А.Н. Колмогоров предприняли (весьма удачную) попытку совместить все достоинства и первого и второго вариантов книги Хаусдорфа, одновременно доработав отдельные части книги, с тем, чтобы привести их в соответствие с новейшими достижениями науки. При этом устаревшие разделы «Основ теории множеств» были заменены новым текстом, заимствованным из написанных П.С. Александровым разделов книги [55: Alexandroff P.S., Hopf H. Topologie. – Berlin: Springer, 1935], которые пришлось несколько переработать, с тем, чтобы сохранить стиль Хаусдорфа.

Первые математические противоречия, чреватые серьезными неприятностями, обнаружил Бертран Рассел и сообщил о них Готлобу Фреге в 1902 г. Фреге в то время занимался подготовкой к печати второго тома «Основных законов арифметики», в котором изложил новый подход к обоснованию числовой системы. (Подробнее о развитии Фреге подходе мы расскажем в следующей главе.) Свой подход Фреге в значительной мере основывал на теории множеств, или классов, – той самой теории, где Рассел обнаружил противоречие, о котором сообщил в письме Фреге и поведал математическому миру в книге «Принципы математики» (1903). Рассел занимался изучением парадокса Кантора о множестве всех множеств – и предложил свой вариант этого парадокса.

Парадокс Рассела относится к классам. Класс книг не является книгой и поэтому не содержит самого себя, но класс идей есть идея и содержит сам себя. Каталог каталогов – каталог. Следовательно, одни классы содержат (или включают) самих себя, другие не содержат. Пусть N – класс классов, не содержащих самих себя. К какой разновидности классов принадлежит N ? Если N принадлежит N , то, по определению, N не должен принадлежать N . Если же N не принадлежит N , то по определению N должен принадлежать N . Когда Рассел впервые открыл это противоречие, он решил, что трудность здесь кроется в логике, а не в самой математике. Но обнаруженное противоречие ставит под удар само понятие множества, или класса объектов, широко используемое во всей математике. По словам Гильберта, парадокс Рассела был воспринят математическим миром как катастрофа.

В 1918 г. Рассел предложил популярный вариант своей антиномии, получивший название парадокс браздобрей. Один деревенский браздобрей объявил, что он бреет всех жителей деревни, которые не бреются сами, но, разумеется, не бреет тех жителей, которые бреются сами. Браздобрей похвастался, что в парикмахерском деле ему нет равных, но однажды задумался над вопросом, должен ли он брить самого себя. Если он не бреется сам, то первая половина его утверждения (а именно та, в которой говорится, что браздобрей бреет всех, кто не бреется сам) требует, чтобы он самого себя брил. Но если браздобрей бреется сам, то вторая половина его утверждения (та, в которой говорится, что всех тех, кто бреется сам, он не бреет), требует, чтобы он самого себя не брил. Таким образом, браздобрей оказался в безвыходном положении – он не мог ни брить себя, ни не брить.

Другой парадокс, дающий представление о тех трудностях, с которыми столкнулись математики, был впервые сформулирован в 1908 г. математиками Куртом Греллингом (1886–1943) и Леонардом Нельсоном (1882–1927). Этот парадокс относится к прилагательным, описывающим самих себя и не описывающим самих себя. Такие прилагательные, как, например, «короткий» (-ая, -ое, -ие) или «русский» (-ая, -ое, -ие) описывают самих себя, т.е. применимы к себе, в то время как прилагательные «длинный» или «французский» к себе неприменимы (ведь прилагательное «длинный» вовсе не является длинным, а прилагательное «французский», конечно, русское, а не французское). Аналогично прилагательное «многосложное» является многосложным, но прилагательное «односложное» односложным не является. Назовем прилагательные, применимые к самим себе, автологическими, а прилагательные, неприменимые к самим себе, – гетерологическими. Если прилагательное «гетерологический» гетерологично, то оно применимо к самому себе и, следовательно, автологично. Если прилагательное «гетерологический» автологично, то оно не гетерологично. Но автологичное прилагательное по определению применимо к самому себе. Следовательно, прилагательное «гетерологический» гетерологично. Таким образом, какое бы допущение мы ни приняли, оно неизменно приводит к противоречию. В символической записи парадокс Греллинга–Нельсона гласит: x гетерологичен, если x есть «не x ».

В 1905 г. Жюль Ришар (1862–1956), используя тот же метод, которым Кантор доказал, что вещественных чисел больше, чем целых, изобрел еще один «парадокс». Рассуждения Ришара довольно сложны, но противоречие, к которому он приходит, в упрощенном варианте содержится в парадоксе, о котором Дж.Дж. Берри из Бодлеанской библиотеки сообщил Бертрану Расселу (Рассел опубликовал этот парадокс в 1906 г.). Парадокс Берри получил название парадокса слов. Каждое целое число допускает множество различных словесных описаний. Например, число «пять» можно задать одним словом «пять» или фразой «число, следующее за числом четыре». Рассмотрим теперь все возможные описания, состоящие не более чем из 100 букв русского алфавита. Таких описаний не больше чем 33^{100} ; поэтому существует лишь конечное множество целых чисел (не большее чем 33^{100}), задаваемых всеми возможными

описаниями.³¹ Следовательно, существуют какие-то целые числа, не задаваемые описаниями, состоящими не более чем из 100 букв. Рассмотрим «наименьшее число, не задаваемое описанием, которое содержит не более ста букв». Но мы только что привели описание такого числа, содержащее менее 100 букв (оно содержит всего 65 букв).

Многие математики в начале XX в. попросту отмахивались от парадоксов, не придавая им особого значения, так как парадоксы относились к теории множеств – тогда еще новой области математики, лежащей далеко не в центре интересов математического мира. Но их оставшиеся в меньшинстве более проницательные коллеги понимали, что парадоксы затрагивают не только классическую математику, но и логику, и это их серьезно тревожило. Кое-кто пытался следовать совету, который Уильям Джеймс дал в своем «Прагматизме»: «Если вам встретится противоречие, введите более тонкое различие». Некоторые логики, начиная с Френка Пламптона Рамсея (1903–1930), пытались проводить различие между семантическими и истинными (т.е. логическими) противоречиями. «Парадокс слов», «гетерологический парадокс» и «парадокс лжеца» они относили к семантическим парадоксам, так как все эти парадоксы затрагивали такие понятия, как истинность и определяемость (или неоднозначность) того или иного словоупотребления. Предполагалось, что строгое определение таких понятий позволит разрешить семантические парадоксы. С другой стороны, парадокс Рассела, парадокс Кантора о множестве всех множеств и парадокс Бурали-Форти были отнесены к логическим противоречиям. Сам Рассел не проводил различия между семантическими и логическими противоречиями. По его мнению, все парадоксы возникают из-за одной логической ошибки, которую он назвал принципом порочного круга и описал следующим образом; «То, что содержит всё множество, не должно быть элементом множества». Принцип Рассела можно сформулировать иначе: «Если для того, чтобы определить множество, необходимо использовать всё множество, то определение не имеет смысла». Так в 1905 г. Рассел объяснил принцип порочного круга. В 1906 г. его объяснение принял Пуанкаре, предложивший специальный термин «непредикативное определение» (определение, в котором некий объект задается (или описывается) через класс объектов, содержащий определяемый объект). Такие определения незаконны.

Рассмотрим пример, приведенный Расселом в «Основаниях математики» (*Principia Mathematica* [95*]³², гл. X). Закон исключенного третьего утверждает, что каждое высказывание является либо истинным, либо ложным. Но закон исключенного третьего сам также является высказыванием. Следовательно, вопреки нашим намерениям сформулировать всегда истинный закон логики мы получили высказывание, которое, как и любое другое высказывание, может быть истинным, но может быть и ложным. «Такая формулировка логического закона, – заявил Рассел, – лишена смысла».

Приведем еще несколько примеров. Может ли всемогущее существо создать неразрушимый предмет? Разумеется, может – на то оно и всемогущее. Но коль скоро оно всемогущее, то ему ничего не стоит разрушить что угодно, в том числе и неразрушимый предмет. В этом примере слово «всемогущее» принимает значение из недопустимого множества. Такого рода парадоксы, как отметил логик Альфред Тарский, будучи семантическими, бросают вызов языку в целом.

Предпринимались и другие попытки разрешить названные парадоксы. Противоречие, заключенное в высказывании «Из всех правил имеются исключения», отвергалось некоторыми как лишенное смысла. Существуют предложения, поясняли они, построенные по всем правилам грамматики и тем не менее лишенные смысла, т.е. ложные, как, например, фраза «Это предложение состоит из пяти слов». Аналогично первоначальный вариант парадокса Рассела (предложенный самим Расселом) отвергался на том основании, что класс всех классов, не содержащих самих себя, не имеет смысла или не существует. Парадокс брадобрея «решался» либо ссылкой на то, что такого брадобрея не существует, либо требованием, согласно которому брадобрей должен исключить себя как из класса тех, кого он бреет, так и из класса тех, кого он не бреет (утверждение «Учитель обучает всех, кто ходит к нему на занятия», поясняли

³¹ **Яглом:** Обычно считают, что русский алфавит содержит 33 буквы (при этом буквы е и ё отождествляются, считаются за одну); поэтому общее число «100-буквенных последовательностей», где каждая буква имеет одно из указанных 33 «значений», равно 100³³. (Разумеется, большинство из составленных таким образом «фраз», разбиение которых на отдельные «слова», если только оно возможно, производится «по смыслу», не будут выражать ничего или не будут описывать никакого числа.)

³² Whitehead A.N., Russell B. *Principia Mathematica*, 3 vols. – New York: Cambridge University Press., 1st ed., 1910–1913; 2nd ed., 1925–1927.

сторонники такого решения парадокса брадобрея, не распространяется на самого учителя). Рассел отверг подобное объяснение. В работе 1908 г. он так выразил свое мнение по этому поводу: «Всякий волен в беседе с человеком, у которого длинный нос, заметить: «Говоря о носах, я отнюдь не имею в виду слишком длинные носы». Вряд ли, однако, такое замечание можно считать успешной попыткой обойти больной вопрос».

Слово «все» действительно многозначно. По мнению некоторых логиков и математиков, несколько семантических парадоксов обязаны своим происхождением употреблению слова «все». Так, в парадоксе Бурали-Форти речь идет о классе всех ординальных чисел. Включает ли этот класс ординальное число, соответствующее всему классу? Аналогичным образом гетерологический парадокс определяет некий класс слов. Включает ли этот класс само слово «гетерологический»?

Возражение Рассела–Пуанкаре против непредикативных определений стало общепринятым. К сожалению, такие определения использовались в классической математике. Наибольшие тревожения вызвало понятие наименьшей верхней границы. Рассмотрим множество всех чисел x , заключенных между 3 и 5, но не достигающих этих границ: $3 < x < 5$. Верхними границами, т.е. числами, превосходящими все принадлежащие множеству числа, являются числа 5, $5\frac{1}{2}$, 6, 7, 8 и т.д. Среди них существует наименьшая верхняя граница – число 5. Следовательно, наименьшая верхняя граница определена через класс верхних границ, содержащий ту самую границу, которая подлежит определению. Другой пример непредикативного определения – определение максимального значения (максимума) функции на заданном интервале. Максимальное значение – наибольшее из значений, принимаемых функцией на заданном интервале. Наименьшая верхняя граница, как и максимум функции, – фундаментальные понятия математики, и в математическом анализе избавиться от них нелегко. Кроме того, немало непредикативных определений используется и в других случаях.

Хотя непредикативные определения, встречающиеся в парадоксах, действительно приводят к противоречиям, чувство неудовлетворенности не оставляло математиков, так как, насколько они могли видеть, далеко не все непредикативные определения приводили к противоречиям. Такие высказывания, как «Джон – самый высокий игрок в своей команде» или «Это предложение – короткое», заведомо безобидны в этом отношении, хотя они и непредикативны. То же можно сказать и о предложении «Самое большое число в множестве чисел 1, 2, 3, 4, 5 равно 5». Непредикативные предложения используются буквально на каждом шагу. Так, задав класс всех классов, содержащих более пяти элементов, мы тем самым задаем класс, содержащий самого себя. Множество S всех множеств, определяемых не более чем 25 словами, также содержит S . Безусловно, обилие в математике непредикативных определений не могло не тревожить ученых.

К сожалению, мы не располагаем критерием, который позволил бы распознавать, приводит ли данное непредикативное определение к противоречию или не приводит. Следовательно, всегда существует опасность, что вновь обнаруженные непредикативные определения приведут к противоречиям. Эта проблема стояла очень остро с самого начала, когда Эрнст Цермело и Анри Пуанкаре впервые взяли за нее. Пуанкаре предложил наложить запрет на непредикативные определения. Один из выдающихся математиков первой половины XX в. Герман Вейль, сознавая, что некоторые непредикативные определения приводят к противоречиям, приложил немало усилий, пытаясь переформулировать определение наименьшей верхней границы таким образом, чтобы это позволило избежать непредикативности. Усилия Вейля не увенчались успехом. Обеспокоенный постигшей его неудачей, Вейль пришел к выводу, что математический анализ логически не обоснован и что некоторыми его разделами необходимо пожертвовать. Наложенный Расселом запрет («Мы не можем при определении множеств исходить из произвольных условий, а затем разрешать всем построенным множествам без разбора быть элементами других множеств») заведомо не давал ответа на вопрос, какие из непредикативных определений можно считать допустимыми.

Хотя первопричина возникших противоречий казалась вполне очевидной, проблема построения математики, свободной от противоречий, оставалась открытой. Более того, у математиков отнюдь не было уверенности в том, что в будущем не появятся новые противоречия. Всё это позволяет понять, почему в начале XX в. проблема непротиворечивости стала весьма острой. Математики рассматривали эти противоречия как парадоксы теории множеств. Но именно теория множеств открыла математикам глаза на то, что противоречия возможны и в классических разделах математики.

На фоне непрекращающихся попыток подвести прочный фундамент под здание математики доказательство непротиворечивости переросло в острейшую проблему. Но в начале XX в. математики поняли, что с точки зрения обоснования уже полученных результатов существуют и другие проблемы, не уступающие по своей значимости проблемам непротиворечивости. Критический дух математиков окреп и закалился в конце XIX в., и, вступив в двадцатое столетие, они подвергли безжалостному пересмотру всё, что легко принимали на веру их предшественники. Им удалось обнаружить совершенно невинное на первый взгляд утверждение, которое ранее кочевало из доказательства в доказательство, не привлекая внимания. Утверждение это состояло в следующем: если имеется любой набор (конечный или бесконечный) множеств, то всегда можно, выбрав из каждого множества по одному элементу, составить из этих элементов новое множество. Так, от каждого штата из пятидесяти штатов США можно выбрать по одному жителю и составить из них группу из 50 человек.

То, что это утверждение в действительности составляет специальную аксиому – так называемую **аксиому выбора**, математики осознали из работы Эрнста Цермело (1871–1953), опубликованной в 1904 г. В этой связи весьма уместно обратиться к истории вопроса [56]³³. Когда Кантор задумал расположить трансфинитные числа по величине, ему понадобилась теорема о том, что любое множество вещественных чисел может быть вполне упорядочено. Всякое вполне упорядоченное множество прежде всего линейно упорядочено. Это означает, что если a и b – любые два (разные!) элемента множества, то, как и в множестве вещественных чисел или точек прямой, либо a предшествует b , либо b предшествует a . Кроме того, если a предшествует b и b предшествует c , то a предшествует c . Множество вполне упорядочено, если в любом его подмножестве, каким бы способом оно ни было выбрано, всегда существует первый элемент. Например, множество положительных целых чисел, расположенных в обычной последовательности, вполне упорядочено. Множество вещественных чисел, расположенных в обычной последовательности, линейно упорядочено, а не вполне упорядочено, так как в подмножестве, состоящем из всех чисел, которые больше нуля, нет первого элемента. В 1883 г. Кантор высказал предположение, что каждое множество можно вполне упорядочить, и этой гипотезой он пользовался, так и не сумев ее доказать. Напомним, что в своем докладе на II Международном математическом конгрессе 1900 г. Гильберт назвал среди прочих проблему доказательства полной упорядочиваемости множества вещественных чисел. В 1904 г. Цермело доказал, что каждое множество может быть вполне упорядочено (см., например, [54]³⁴), и в ходе доказательства особо отметил, что он использует аксиому выбора.

Как уже неоднократно случалось в прошлом, математики использовали аксиому выбора бессознательно и лишь гораздо позднее не только поняли, что применяют эту аксиому, но и докопались до причин, побудивших их ее принять. Кантор неявно использовал аксиому выбора в 1887 г. для доказательства теоремы о том, что любое бесконечное множество содержит подмножество с кардинальным числом $\aleph_0$. Кроме того, аксиома выбора неявно использовалась при доказательствах многих теорем топологии, теории меры, алгебры и функционального анализа. Например, аксиома выбора находит применение при доказательстве теоремы о том, что в любом ограниченном множестве чисел всегда можно выбрать последовательность, сходящуюся к предельной точке множества. Аксиома выбора используется также для доказательства фундаментальных утверждений, например при построении вещественных чисел из аксиом Пеано для целых чисел. Аксиома выбора применяется и при доказательстве теоремы о конечности множества всех подмножеств конечного множества. В 1923 г. Гильберт назвал аксиому выбора общим принципом, который необходим и не оценим как один из первых элементов теории математического вывода. Пеано первым обратил внимание на аксиому выбора. Еще в 1890 г. он писал, что нельзя бесконечно применять произвольное правило, позволяющее отбирать по одному элементу из каждого множества, сколько бы их ни было. Пеано сформулировал правило выбора для частного случая, т.е. для той задачи (интегрируемости дифференциальных уравнений), рассмотрением которой он занимался, и тем самым устранил возникшую трудность. То, что аксиома выбора действительно является аксиомой, понял в 1902 г. Бенно Леви, а Цермело узнал об этом от Эрхардта Шмидта в 1904 г.

Явное использование Цермело аксиомы выбора вызвало бурю протестов в следующем же номере (за 1904 г.) авторитетного журнала *Mathematische Annalen*. С критикой аксиомы выбора

³³ Медведев Ф.А. Ранняя история аксиомы выбора. – М.: Наука, 1982.

³⁴ Хаусдорф Ф. Теория множеств. – М.–Л.: Гостехиздат, 1937.

выступили Эмиль Борель (1871–1956) и Феликс Бернштейн (1878–1956). Вслед за их критическими выступлениями последовал обмен письмами между ведущими математиками того времени Эмилем Борелем, Рене Бэр (1874–1932), Анри Лебегом (1875–1941) и Жаком Адамаром (1865–1963); эти письма были опубликованы на страницах журнала *Bulletin de la Société Mathématique de France* за 1905 г.

Суть критики сводилась к тому, что если не указано правило, по которому из каждого множества выбирается по элементу, то реально выбор не производится и поэтому в действительности новое множество не образуется. В ходе доказательства выбор может изменяться, поэтому доказательство утрачивает силу. По выражению Бореля, выбор без правил представляет собой акт веры; поэтому аксиома выбора лежит за пределами математики. Поясним сказанное на примере, предложенном в 1905 г. Берtrandом Расселом. Предположим, что у меня есть сто пар обуви и я из каждой пары выбираю левый ботинок. Правило, которым я руководствуюсь при выборе в этом случае, ни у кого не вызовет сомнений. Но предположим, что у меня имеется сто пар носков и из каждой пары я выбираю по одному носку. В этом случае невозможно указать, какой носок (правый или левый) был выбран из каждой пары, т.е. нельзя сформулировать правило, по которому был произведен выбор. Те, кто отстаивал аксиому выбора, признавали, что правила выбора может и не быть, но не считали его необходимым. По их мнению, акты выбора определены просто тем, что их считают определенными.

Против аксиомы выбора выдвигались и другие возражения. Так, Пуанкаре принимал аксиому выбора, но отвергал предложенное Цермело доказательство полной упорядоченности, поскольку в этом доказательстве используются непредикативные утверждения. Бэр и Борель возражали не только против аксиомы, но и против доказательства, так как из него не видно, как осуществляется полное упорядочение, — доказывалось лишь, что оно осуществимо. Брауэр, со взглядами которого на основания математики мы познакомимся в дальнейшем (гл. X), возражал потому, что считал неприемлемыми актуально бесконечные множества. Возражение Рассела сводилось к тому, что множество естественно определять свойством, которым обладают все элементы этого множества, и только они. Так, например, множество людей, носящих зеленую шляпу, можно было бы определить свойством «носящие зеленую шляпу». Но аксиома выбора **не требует**, чтобы выбранные элементы обладали каким-нибудь определенным свойством. Она лишь утверждает, что каждый элемент выбран из одного из заданных множеств по одному элементу на каждое множество. Сам Цермело довольствовался интуитивным понятием множества, и поэтому у него не вызывало сомнений, что при любом выборе из каждого множества по одному элементу образуется новое множество.

Единственным стойким защитником Цермело был Адамар. Он утверждал, что аксиома выбора приемлема по тем же причинам, какие он приводил, отстаивая теорию множеств Кантора. По мнению Адамара, для того, чтобы утверждать существование объектов, отнюдь не требуется их описывать. Если одного утверждения о том, что объект существует, достаточно для прогресса математики, то это утверждение приемлемо.

В ответ на критические замечания Цермело дал второе доказательство полного упорядочения, также основанное на использовании аксиомы выбора (в действительности Цермело показал, что оба доказательства эквивалентны). Цермело отстаивал использование аксиомы выбора и утверждал, что до тех пор, пока эта аксиома не приводит к противоречию, ее использование в математике вполне допустимо. По словам Цермело, аксиома выбора «имеет исключительно объективный характер, который сразу же ясен». Он признал, что аксиома выбора не вполне самоочевидна, так как в ней говорится о выборе из бесконечно многих множеств, но она научно необходима, поскольку используется для доказательства важных теорем.

Было предложено много эквивалентных вариантов аксиомы выбора. Если аксиому выбора принять наряду с другими аксиомами теории множеств, то эти варианты представляют собой теоремы. Но все попытки заменить аксиому выбора менее спорной аксиомой оказались безуспешными. Маловероятно, что удастся найти удачную замену аксиомы выбора, приемлемую для всех математиков.

Споры вокруг аксиомы выбора по существу сводились к одной главной проблеме: как следует понимать существование в математике? Одни математики склонны считать «существующим» любое понятие, оказавшееся полезным, если оно не приводит к противоречиям, например обычную замкнутую поверхность, площадь которой бесконечна. Для других математиков «существование» означает четко распознаваемое определение или такое понятие, которое позволяет отождествить или по крайней мере описать его. Одной лишь возможности

выбора недостаточно. В дальнейшем эти взаимоисключающие точки зрения стали еще более непримиримыми – мы поговорим о них в следующих главах. Пока же заметим только, что аксиома выбора стала яблоком раздора между математиками.

И тем не менее десятилетия спустя, когда математика значительно расширила свои границы, многие ученые продолжали использовать аксиому выбора. Не утихали и споры по поводу того, можно ли считать аксиому выбора и доказываемые с ее помощью теоремы законной, вполне приемлемой математикой.³⁵ Аксиома выбора стала предметом активного обсуждения и уступала в этом отношении лишь аксиоме Евклида о параллельных. По замечанию Лебега, оппонентам не оставалось ничего другого, как поносить друг друга, ибо прийти к соглашению они не могли. Сам Лебег, несмотря на отрицательное и скептическое отношение к аксиоме выбора, всё же пользовался ею, по его собственному выражению, «дерзко и осторожно», полагая, что будущее покажет, кто прав.

Но в первые же годы XX в. математиков стала беспокоить еще одна проблема. Сначала она не представлялась достаточно фундаментальной, но по мере распространения канторовской теории трансфинитных кардинальных и ординальных чисел становилась всё более острой и настоятельно требовала своего решения.

В своих последних работах Кантор построил теорию трансфинитных кардинальных чисел на основе теории ординальных чисел. Например, кардинальное число множества всех возможных конечных множеств (точнее, множество всех конечных ординальных чисел) равно $\aleph_0$. Кардинальное число всех возможных множеств ординальных чисел, содержащих лишь счетное число ($\aleph_0$) элементов, равно $\aleph_1$. Продолжая эту последовательность, Кантор получал всё большие кардинальные числа, которые обозначил $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \dots$. Кроме того, каждое очередное кардинальное число непосредственно следовало за предыдущим (было ближайшим к предыдущему кардинальным числом). Но в самом начале своих работ по трансфинитным числам Кантор показал, что множество всех вещественных чисел насчитывает $2^{\aleph_0}$ членов (эту величину принято кратко обозначать c) и что $2^{\aleph_0}$ больше, чем $\aleph_0$. Вопрос, который тогда же поставил Кантор, заключался в следующем: с каким членом последовательности алефов совпадает c ? Так как кардинальное число $\aleph_1$ следует непосредственно за $\aleph_0$, кардинальное число c больше или равно $\aleph_1$. Кантор высказал предположение, что $c = \aleph_1$. Это предположение, впервые сформулированное в 1884 г. и опубликованное в том же году, получило название гипотезы континуума.³⁶ Эта гипотеза допускает также другую, несколько более простую формулировку: не существует трансфинитного числа, заключенного между $\aleph_0$ и c (кардинальное число любого бесконечного подмножества множества вещественных чисел либо равно $\aleph_0$, либо равно c)³⁷. В первые десятилетия XX в. вокруг гипотезы континуума развернулась бурная дискуссия, но проблема так и не была решена. Помимо того, что гипотеза континуума дала возможность доказать новые теоремы, она приобрела особое значение, так как позволила глубже понять бесконечные множества, взаимно-однозначное соответствие и аксиому выбора и тем самым способствовала лучшему обоснованию теории множеств.

Итак, в начале XX в. перед математиками встало несколько трудных проблем. Требовалось устранить уже обнаруженные противоречия. Но еще более важным представлялось доказать непротиворечивость всей математики, ибо без этого нельзя было гарантировать, что в будущем не возникнут новые противоречия. Все эти проблемы имели решающее значение для судеб математики. Многие ученые продолжали считать неприемлемой аксиому выбора и ставили под сомнение доказанные на ее основе теоремы. «Нельзя ли доказать те же теоремы, исходя из более

³⁵ **Яглом:** Сомнения по этому поводу подогревались рядом полностью противоречащих нашей интуиции (или очень сильных и «слишком просто» доказываемых) результатов, получаемых с использованием аксиомы выбора Цермело. Наиболее известна здесь, пожалуй, эффектная работа Ф. Хаусдорфа, результат которой, несколько огрубляя, можно описать так: пусть Π – обыкновенный шар трехмерного евклидова пространства; Хаусдорф разбивает этот шар на четыре множества I, II, III и IV так, что сложив по-другому множества I и II, мы получим из них шар Π_1 , равный Π ; из множеств III и IV также можно сложить равный Π шар Π_2 . (Ср. гл. XII).

³⁶ Можно взять множество с кардинальным числом $\aleph_1$ и рассмотреть множество всех его подмножеств, кардинальное число которого обозначается через $2^{\aleph_1}$. Как доказал Кантор, $2^{\aleph_1} > \aleph_1$. Можно предположить, что $2^{\aleph_1} = \aleph_2$ и что $2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}$. Такое предположение называется обобщенной гипотезой континуума.

³⁷ Вариант гипотезы континуума, приведенный в скобках, не требует обращения к аксиоме выбора.

приемлемой аксиомы, и полностью отказаться от аксиомы выбора?» – этот вопрос беспокоил умы. Необходимо было также доказать или опровергнуть гипотезу континуума, важность которой по мере развития математики становилась всё более очевидной.

Проблемы, с которыми столкнулись математики в начале XX в., были весьма серьезными, однако при других обстоятельствах они вряд ли вызвали бы столь сильные потрясения. Правда, противоречия в любом случае пришлось бы разрешать, но выявленные к началу XX в. противоречия относились к теории множеств – новому разделу математики, и математиков не оставляла надежда, что в свое время его удастся строго обосновать. Что же касается опасений обнаружить в классической математике новые противоречия, возможно связанные с использованием непредикативных определений, то к началу XX в. проблему непротиворечивости удалось свести к проблеме непротиворечивости арифметики, а то, что арифметика непротиворечива, ни у кого не вызывало сомнений. Вещественные числа находились в обращении более пяти тысяч лет, и относительно их было доказано огромное число теорем; при этом никаких противоречий никогда обнаружено не было. То обстоятельство, что какая-то аксиома, в данном случае аксиома выбора, использовалась неявно и что ее продолжали применять, подавляющее большинство математиков не беспокоило. Движение за аксиоматизацию, развернувшееся в конце XIX в., обнаружило, что многие аксиомы использовались неявно. Гипотеза континуума была в то время не более чем деталью теории Кантора, а некоторые математики целиком отвергали канторовскую теорию множеств. Математикам приходилось сталкиваться и с гораздо более серьезными трудностями, но они никогда не теряли присутствия духа. Например, в XVIII в., полностью сознавая принципиальный характер трудностей, возникших при попытках обосновать математический анализ, математики тем не менее продолжали создавать на основе дифференциального и интегрального исчисления новые обширные разделы математики и лишь впоследствии подвели под свои построения прочный фундамент, в основе которого лежало понятие числа. Проблемы теории множеств можно было бы сравнить с запалом, который приводит к воспламенению заряда, вызывающего взрыв бомбы. Некоторые всё еще верили, что математика представляет собой свод незыблемых истин. Они надеялись доказать это, и Фреге предпринял попытку осуществить подобные намерения. Кроме того, возражения против аксиомы выбора были вызваны не только тем, что утверждает сама аксиома. Математики, в частности Кантор, вводили всё новые абстрактные понятия, обладавшие, по их утверждениям, той же степенью достоверности, какой обладает, например, понятие треугольника. Другие отвергали абстрактные понятия, считая их далекими от реальности и потому неспособными нести сколько-нибудь полезную нагрузку. Дискуссия по поводу теории множеств Кантора, аксиомы выбора и аналогичных понятий свелась к основному вопросу: в каком смысле можно утверждать, что математические понятия **существуют**? Должны ли они соответствовать реальным физическим объектам, являясь их идеализацией? Эту проблему рассматривал еще Аристотель. Он, как и большинство греческих мыслителей, считал, что математические понятия непременно должны иметь реальные прототипы. Именно из-за отсутствия физических реализаций Аристотель отвергал и существование бесконечного множества как «готовой» совокупности элементов и правильный семиугольник, который не удавалось построить циркулем и линейкой, что заставляло античных математиков считать его «непостроимым», т.е. в определенном смысле «не существующим». С другой стороны, последователи Платона – а Кантор был одним из них – полагали, что идеи существуют в некоем объективном «мире идей» и не зависят от человека. Человек лишь открывает эти идеи.

Другой гранью проблемы существования был смысл доказательств существования. Например, Гаусс доказал, что любое алгебраическое уравнение n -й степени с вещественными или комплексными коэффициентами имеет по крайней мере один (комплексный, а может, и вещественный) корень. Но из приведенного Гауссом доказательства не было ясно, каким образом можно **вычислить** этот корень. Аналогично Кантор доказал, что вещественных чисел больше, чем алгебраических (корней алгебраических уравнений с целыми коэффициентами). Следовательно, должны существовать трансцендентные иррациональные числа, не являющиеся алгебраическими. Но такое доказательство существования не позволяло назвать и тем более вычислить хотя бы одно трансцендентное число. Некоторые математики начала XX в. (Борель, Бэр, Лебег) считали чистые доказательства существования бессмысленными. По их мнению, доказательство существования должно позволять математикам вычислять существующие величины с любой степенью точности. Такие доказательства существования получили название конструктивных.

Некоторых математиков беспокоило еще одно обстоятельство. Аксиоматизация математики была осуществлена как формальный ответ на интуитивное принятие многих очевидных фактов. Правда, аксиоматизация помогла избавиться от противоречий и неясностей, в частности в математическом анализе. Но сторонники аксиоматизации настаивали также на явных определениях, формулировках аксиом и доказательствах того, что было очевидно на интуитивном уровне – настолько очевидно, что прежде никто даже не осознавал, в какой мере те или иные рассуждения опираются на интуицию (гл. VIII). Возникшие в результате аксиоматизации дедуктивные построения оказались весьма сложными и громоздкими. Так, построение теории рациональных и в особенности иррациональных чисел на основе аксиоматики целых чисел изобиловало множеством деталей и отличалось большой сложностью. Всё это вызывало тягостное чувство у некоторых математиков, в частности у Леопольда Кронекера (1823–1891), считавшего все эти новомодные теории излишне сложными и искусственными. Кронекер первым из выдающихся математиков своего времени пришел к заключению, что с помощью логических средств невозможно создать разумную теорию, выходящую за рамки интуиции, подсказываемой здравым смыслом.

Другим камнем преткновения стала математическая логика, бурное развитие и всё расширяющиеся границы которой заставили математиков осознать, что обращение к законам логики не может оставаться неформальным и осуществляться лишь от случая к случаю. Работы Пеано и Фреге показали математикам необходимость тонко различать понятия, используемые в математических рассуждениях, например, проводить различия между элементом, принадлежащим какому-то классу, и классом, входящим в другой класс.³⁸ Проведение такого рода различий современники Фреге считали чрезмерным педантизмом. По их мнению, эти различия скорее затрудняли, чем облегчали, работу математика.

Гораздо более важным было то, что многие математики начали сомневаться в неограниченной применимости принципов логики, хотя в конце XIX в. эти сомнения еще никто не высказывал явно. Что гарантирует применимость принципов логики к бесконечным множествам? Если принципы логики есть продукт человеческого опыта, то нельзя не спросить, распространяются ли они на те чисто рациональные построения, которые не имеют опытной основы.

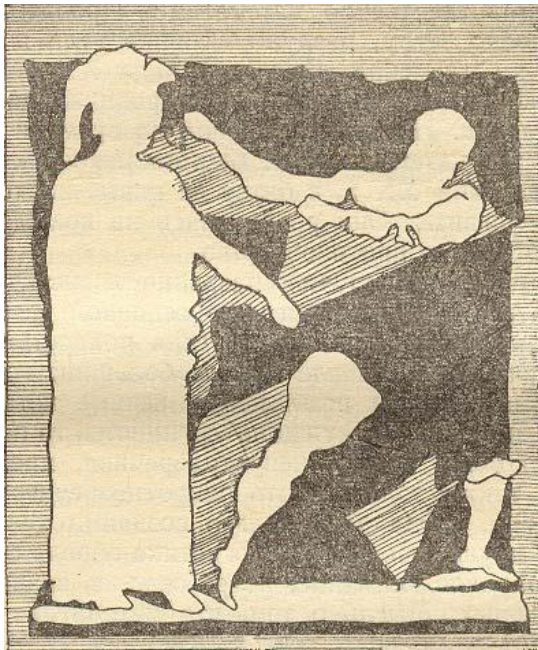
Разногласия между математиками по поводу затронутых нами проблем начались задолго до наступления XX в. Новые парадоксы лишь усугубили уже существовавшие расхождения в мнениях. Через многие годы математики с тоской вспомнят о коротком, но счастливом периоде, предшествовавшем появлению противоречий, – периоде, о котором Поль Дюбуа-Реймон отозвался как о времени, когда математики «еще жили в раю».

³⁸ **Яглом:** Сегодня это различие отражается в существовании двух разных символов: $\in$ (например, $x \in A$) и $\subset$ ($B \subset A$), используемых уже и в школьных учебниках математики.

Х. Логицизм против интуиционизма

Логистика не бесплодна, она порождает антиномии.³⁹

Анри Пуанкаре



Оснований собственно математики. Проблемы, о которых идет речь, подобно ветру, раздули тлевшие угли и заставили их вспыхнуть ярким пламенем. Еще до начала XX в. было провозглашено и даже разработано несколько радикально новых подходов к математике. Но поскольку они до времени оставались в тени, большинство математиков не восприняли их всерьез. Однако в первые десятилетия XX в. в битву за новые подходы к математике вступили гиганты. Они разделились на враждующие лагеря и вступили в открытое противоборство.

Одно из направлений получило название «логистическая школа». Если не вдаваться в подробности, то основной тезис логицистов сводился к утверждению, что математика полностью может быть выведена из логики. В начале XX в. большинство математиков видели в законах логики незыблемые, вечные истины. Но если законы логики истинны, рассуждали логицисты, то истинна и математика. А поскольку истина непротиворечива, продолжали они, то математика также должна быть непротиворечивой.

Как и обычно, когда речь идет о создании нового большого направления в науке, прежде чем логистика обрела строгую форму и привлекла широкое внимание, потребовались значительные усилия многих ученых. Мысль о том, что математика выводима из логики, восходит по меньшей мере к Лейбницу. Лейбниц различал истины основания (или необходимые истины) и истины факта (или случайные истины) (гл. VIII). Суть этого различия он пояснил в письме к своему другу Костё. Истина именуется необходимой, если противоположное утверждение приводит к противоречию. Если же истина не является необходимой, то она называется случайной. Утверждения о том, что бог существует⁴⁰, что все прямые углы равны между собой и т.д., – необходимые истины. Утверждения о том, что я сам существую, или о том,

³⁹ Пуанкаре А. О науке. – М.: Наука, 1983, с. 400.

⁴⁰ **Яглом:** Мы уже указывали на своеобразный характер религиозности Лейбница, для которого бог играл роль гаранта истинности логики, но, «создав однажды» Вселенную, далее никак не вмешивался в ее функционирование. (Разумеется, Лейбниц и не подозревал, что возможных логических систем существует много; осознание этого обстоятельства заставило бы его полностью пересмотреть всю свою религиозно-философскую систему.)

что в природе встречаются тела, в которых можно указать углы, в точности равные 90° , – случайные истины. Эти утверждения могут быть как истинными, так и ложными – и в том и в другом случае Вселенная не перестанет существовать. Господь бог, по мнению Лейбница, выбрал из бесконечно многих возможностей ту, которую счел наиболее подходящей. Поскольку математические истины необходимы, они должны быть выводимы из логики, принципы которой также необходимы и незыблемо истинны во всех возможных мирах.

Лейбниц не осуществил программу вывода математики из логики, как не осуществили ее в течение последующих почти двухсот лет все те, кто высказывал аналогичные убеждения. Так, Рихард Дедекинду голословно утверждал, что число невыводимо из интуитивных представлений о пространстве и времени, а является «непосредственной эманацией законов чистого разума». По мнению Дедекинда, из числа мы выводим точные понятия пространства и времени. Дедекинду начал развивать свой тезис, но не особенно преуспел в этом [47]⁴¹.

Наконец, за осуществление основного тезиса логицизма принялся находившийся под влиянием идей Дедекинда Готлоб Фреге, который внес немалый вклад в развитие математической логики (гл. VIII). Фреге относил математические законы к числу так называемых аналитических суждений. Такие суждения утверждают не более того, что неявно заложено в принципах логики, являющихся априорными истинами. Математические теоремы и их доказательства позволяют нам выявить это неявное. Не вся математика применима к реальному миру, но вся математика заведомо состоит из необходимых истин. Построив в своей работе «Исчисление понятий» (1879) логику на основе явно сформулированных аксиом, Фреге в «Основаниях арифметики» (1884) и в двухтомном сочинении «Основные законы арифметики» (1893–1903) приступил к выводу из логических посылок арифметических понятий, определений и правил. В свою очередь из законов арифметики можно вывести алгебру, математический анализ и даже геометрию, так как аналитическая геометрия позволяет выразить геометрические понятия и свойства геометрических фигур на языке алгебры. К сожалению, символика Фреге была чрезвычайно сложной и непривычной для математиков, в силу чего работы Фреге оказали слабое влияние на современников. Известна история о том, что как раз в то время, когда Фреге завершил работу над вторым томом «Основных законов арифметики» (1902), он получил (такова ирония судьбы!) письмо от Бертрانا Рассела. В этом письме Рассел писал, что, к сожалению, Фреге использовал в своем труде понятие (множество всех множеств), применение которого недопустимо, ибо оно приводит к противоречию. В конце второго тома Фреге отметил: «Вряд ли с ученым может приключиться что-нибудь худшее, чем если у него из-под ног выбьют почву в тот самый момент, когда он завершит свой труд. Именно в таком положении оказался я, получив письмо от Бертрана Рассела, когда моя работа уже была почти закончена». Фреге ничего не знал о парадоксах, обнаруженных за то время, пока он писал свою книгу.

Бертран Рассел независимо наметил ту же программу и, работая над ее осуществлением, узнал о работах Фреге. В своей «Автобиографии» (1951) Рассел признает также, что на него оказали влияние взгляды Пеано, с которым он встретился на II Международном конгрессе математиков в Париже в 1900 г.:

Конгресс стал поворотным пунктом в моей интеллектуальной жизни, потому что на нем я встретил Пеано. Я уже знал его имя и некоторые из его работ... Мне стало ясно, что используемые им обозначения представляют собой тот самый инструмент анализа, на поиск которого я затратил не один год, и что, изучив обозначения Пеано, я обрел новый мощный аппарат, о создании которого давно мечтал.

В «Принципах математики» (1-е изд. – 1903) Рассел говорит прямо: «Тот факт, что вся математика есть не что иное, как символическая логика, – величайшее открытие нашего века».

В начале XX в. Рассел, как и Фреге, надеялся, что если фундаментальные законы математики удастся вывести из логики, то поскольку логика, несомненно, является сводом нетленных истин, математические законы также окажутся истинными – и тем самым проблема непротиворечивости будет разрешена. В книге «Мое философское развитие» (1959) Рассел писал, что стремился прийти к «совершенной математике, не оставляющей места для сомнений».

Разумеется, Расселу было известно, что Пеано вывел свойства вещественных чисел из аксиом для целых чисел. Знал он и о том, что Гильберт предложил систему аксиом для всей

⁴¹ Дедекинду Р. Что такое числа и для чего они служат. – Казань: Изд-во Императорского университета, 1905.

системы вещественных чисел. Однако во «Введении в математическую философию» (1919) Рассел заметил по поводу аналогичного подхода Дедекинда: «Метод постулирования того, что нам требуется, обладает многими преимуществами, но такими же преимуществами обладает воровство перед честным трудом». В действительности Рассел был озабочен тем, что постулирование десяти или пятнадцати аксиом о числах отнюдь не гарантирует их непротиворечивость и истинность. По выражению Рассела, постулируя, мы излишне полагаемся на счастливый случай. В то время как Рассел в начале XX в. не сомневался, что принципы логики – истины и поэтому они непротиворечивы, Уайтхед в 1907 г. предостерегал: «Невозможно формально доказать непротиворечивость самих логических посылок».

Многие годы Рассел считал, что принципы логики и объекты математического знания существуют независимо от разума и лишь воспринимаются разумом. Знание объективно и неизменно. Свою позицию Рассел ясно изложил в книге «Проблемы философии» (1912).

Когда дело касалось проблемы истины в математике, Рассел готов был пойти еще дальше, чем Фреге. В юности Рассел был убежден, что математика служит источником истин о реальном мире. Рассел не мог указать, какая из конфликтующих геометрий (евклидова или неевклидова) истинна, – тем более что обе соответствуют реальному миру (гл. IV), – но в «Очерке оснований геометрии» (1898) ему удалось найти несколько математических законов (например, закон, согласно которому физическое пространство должно быть однородно, т.е. должно всюду обладать одинаковыми свойствами), являющихся, по его мнению, истинами. В то же время трехмерность пространства Рассел считал эмпирическим фактом. Тем не менее существует объективный реальный мир, о котором мы можем получать точные знания. Поэтому-то Рассел и пытался найти математические законы, которые вместе с тем должны быть физическими истинами. Эти математические законы должны были следовать из логических принципов.

В «Принципах математики» Рассел обобщил свои взгляды в отношении физической истинности математики. По его словам, «все утверждения относительно всего реально существующего, например пространства, в котором мы живем, относятся к экспериментальной или эмпирической науке, а не к математике; утверждения, относящиеся к прикладной математике, возникают в тех случаях, когда в утверждениях, относящихся к чистой математике, одно или несколько переменных полагают равными некоторым константам...» Даже в этом варианте Рассел продолжал верить, что какие-то основополагающие физические истины содержатся в математике, выводимой из логики. В ответ на замечания скептиков, утверждавших, что абсолютных истин не существует, Рассел заявил: «Математика служит вечным укором подобному скептицизму, ибо ее здание, возведенное из истины, противостоит непоколебимо и неприступно всему оружию сомневающегося цинизма».

Идеи, в общих чертах намеченные Расселом в «Принципах математики», были подробно развиты им совместно с Алфредом Нортон Уайтхедом⁴² (1861–1947) в трехтомном труде «Основания математики» (*Principia Mathematica* [95*]⁴³, 1-е изд. – 1910–1913 гг.). Так как именно в этом фундаментальном труде содержался окончательный вариант изложения позиции логистической школы, ознакомимся хотя бы бегло с его содержанием.

Авторы начинают с построения самой логики. Они тщательно формулируют аксиомы логики и выводят из них теоремы, используемые в последующих рассуждениях. Как и подобает любой аксиоматической теории (гл. VIII), построение логики начинается с неопределяемых понятий. Назовем некоторые из них: понятие элементарного высказывания, присвоение элементарному высказыванию значения истинности, отрицание высказывания, конъюнкция и дизъюнкция двух высказываний, понятие пропозициональной функции.

Рассел и Уайтхед снабдили неопределяемые понятия пояснениями, хотя и подчеркнули, что эти пояснения не входят в логическое построение теории. Под высказыванием и пропозициональной функцией они понимали то же, что и Пирс. Например, «Джон – человек» – высказывание, « x – человек» – пропозициональная функция. Под отрицанием понималось высказывание «Неверно, что ...», в котором многоточием обозначено отрицаемое высказывание; так, если p есть высказывание «Джон – человек», то под его отрицанием, обозначаемым символом $\sim p$, понимается высказывание «Не верно, что Джон – человек» или «Джон не человек».

⁴² **Яглом:** Рассчитанное на самого широкого читателя изложение взглядов А. Уайтхеда (а частично и Б. Рассела) на математику можно найти в (к сожалению, сейчас уже труднодоступной) книге [57: Уайтхед А.Н. Введение в математику. – Пгд.: Физика, 1916.].

⁴³ Whitehead A.N., Russell B. *Principia Mathematica*, 3 vols. – New York: Cambridge University Press., 1st ed., 1910–1913; 2nd ed., 1925–1927.

Под конъюнкцией двух высказываний p и q , обозначаемой $p \cdot q$, Рассел и Уайтхед понимали составное высказывание « p и q », а под дизъюнкцией p и q , обозначаемой $p \vee q$, – составное высказывание « p или q ». Смысл связки «или» здесь такой же, как в объявлении «Обращаться по телефону 22-22-38 или 22-22-39», означающем, что обращаться можно либо по телефону 22-22-38, либо по телефону 22-22-39, но можно и по тому, и по другому (неисключающее «или»). В предложении «Это лицо – мужчина или женщина» связка «или» имеет иной, более привычный, смысл: либо мужчина, либо женщина, но, разумеется, никак не мужчина и женщина одновременно (исключающее «или»). Математики используют «или» в первом (неисключающем) смысле, хотя иногда «или» употребляется только во втором смысле.⁴⁴ Например, в предложении «Треугольник ABC – равнобедренный или четырехугольник $PQRS$ – параллелограмм» связка «или», как правило, неисключающая, а в предложении «Каждое отличное от нуля вещественное число положительно или отрицательно» связка «или» исключаящая – ведь имеющиеся у нас дополнительные сведения о положительных и отрицательных числах говорят нам, что одно и то же число не может быть одновременно и положительным, и отрицательным. Итак, в «Основаниях математики» высказывание « p или q » означает, что p и q оба истинны, или что p ложно, а q истинно, или что p истинно, а q ложно.

Наиболее важное **отношение** между высказываниями – отношение следования, или импликация, означающая, что из истинности одного элементарного высказывания вытекает истинность другого.⁴⁵ В работе Рассела и Уайтхеда импликация обозначается символом $\supset$; при этом под записью (импликацией) $p \supset q$ (« p влечет q » или «из p следует q ») они понимают примерно то же, что Фреге понимал под материальной импликацией (гл. VIII): утверждение « p влечет q » (из p следует q) означает, что если p истинно, то и q обязано быть истинным, а если p ложно, то q может быть истинно или ложно, т.е. из ложного высказывания следует всё что угодно. Такое понятие следования (импликации)⁴⁶ высказываний, по крайней мере в некоторых случаях, представляется вполне естественным. Например, если верно, что a – четное число, то и число $2a$ должно быть четным. Но если не верно, что a – четное число, то $2a$ может быть как четным, так и нечетным (в случае, если a не целое, скажем дробное, число). Иначе говоря, если высказывание « a – четное число» ложно, то из него может следовать **любое** заключение.

Разумеется, для того чтобы выводить логические **теоремы**, необходимо перечислить аксиомы логики. Приведем примеры нескольких таких аксиом:

- А) Любое следствие истинного элементарного высказывания⁴⁷ является истинным.
- В) Если истинно высказывание «истинно p или p », то p истинно.
- С) Если q истинно, то « p или q » истинно.
- Д) Высказывание « p или q » влечет за собой высказывание « q или p ».
- Е) Из « p или (q или r)», следует « q или (p или r)».

Сформулировав аксиомы, Рассел и Уайтхед приступили к выводу теорем логики. Обычные правила силлогистики Аристотеля (см., например, [58]⁴⁸ и [59]⁴⁹) вошли в систему «Оснований математики» как теоремы.

⁴⁴ **Яглом:** Создатель современной алгебраической структуры математической логики Дж. Буль в качестве основных операций над высказываниями использовал конъюнкцию и исключающую дизъюнкцию (которую сегодня чаще называют «симметрической разностью» высказываний p и q).

⁴⁵ **Яглом:** Здесь терминология (и символика) авторов «Оснований математики» несколько расходится с принятой в нашей литературе. Следует различать (бинарное) отношение *следования* между высказываниями, которое может иметь или не иметь место (в абстрактной форме – подмножество декартова квадрата $P \times P$, где P – множество высказываний; отношение «из p следует q » записывают как $p \supset q$, но иногда и наоборот – как $p \subset q$), и *импликацию* – (бинарную) операцию алгебры высказываний, сопоставляющую двум высказываниям p и q третье высказывание $p \Rightarrow q$, которое, как и любое высказывание, может быть истинным или ложным; при этом истинность импликации $p \Rightarrow q$ равносильна тому, что (в обозначениях Рассела–Уайтхеда) $p \supset q$.

⁴⁶ **В.Э.:** Здесь Яглом еще раз ссылается на свое предыдущее примечание.

⁴⁷ **Яглом:** Под «истинным элементарным высказыванием» здесь понимается то, что у нас часто называют «тождественно истинным высказыванием», т.е. такое высказывание, которое ни в каком случае не может быть ложным.

⁴⁸ Калбертсон Дж.Т. Математика и логика цифровых устройств. – М.: Просвещение, 1965 (гл. V).

⁴⁹ Лукасевич А. Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. – М.: ИЛ, 1959.

Чтобы лучше понять, каким образом логика была формализована и сделана дедуктивной, рассмотрим несколько первых теорем из «Оснований математики» Рассела и Уайтхеда. Одна из теорем утверждает: если из предположения об истинности высказывания p следует, что p ложно, то p ложно. Это не что иное, как принцип *reductio ad absurdum* (приведения к абсурду, основа доказательства от противного). Другая теорема гласит: если r следует из q , то при условии, что q следует из p , r следует из p . (Это один из силлогизмов Аристотеля.) Основная теорема начальной части «Оснований математики» – принцип исключенного третьего: если p – любое высказывание, то p либо истинно, либо ложно.

Построив логику высказываний, авторы приступили к пропозициональным функциям. Последние представляют собой классы, или множества: вместо того, чтобы называть элементы класса «поштучно», пропозициональная функция указывает их отличительное свойство. Например, пропозициональная функция « x красный» задает множество всех красных предметов. Такой способ задания класса позволяет определять бесконечные множества с такой же легкостью, как и конечные. Определение класса по отличительному признаку называется интенциональным (или дискретным) в отличие от экстенциональных (прямых) определений, перечисляющих элементы множества.

Рассел и Уайтхед, разумеется, стремились избежать парадоксов, возникающих в тех случаях, когда определяемое множество содержит само себя в качестве элемента. Эту проблему они разрешили, введя требование: «То, что содержит все элементы множества, не должно быть элементом того же множества». Чтобы удовлетворить этому требованию, Рассел и Уайтхед ввели теорию типов.

Хотя сама теория типов довольно сложна, в основе ее лежит простая идея. Индивидуумы, например Джон или какая-то вполне конкретная книга, имеют тип 0. Любое утверждение о свойстве индивидуума имеет тип 1. Всякое утверждение о свойстве свойства индивидуума имеет тип 2 и т.д. Каждое утверждение принадлежит более высокому типу, чем те, о которых в нем что-то утверждается. На языке теории множеств суть теории типов можно было бы сформулировать так: индивидуальные объекты принадлежат типу 0, множество индивидуальных объектов – типу 1, множество множеств индивидуумов – типу 2 и т.д. Так, если a принадлежит b , то b должно быть более высокого типа, чем a . Кроме того, нельзя говорить о множестве, принадлежащем самому себе. При переходе к пропозициональным функциям теория типов становится несколько сложнее. Ни один из аргументов пропозициональной функции (ни одно из значений входящих в нее переменных) не должен определяться через саму функцию. Если это требование соблюдено, то функция считается принадлежащей к более высокому типу, чем входящие в нее переменные. Рассмотрев на основе теории типов все известные парадоксы, Рассел и Уайтхед показали, что теория типов позволяет их избегать.

Это несомненное достоинство теории типов (то, что она позволяет избегать противоречий) станет более наглядным, если воспользоваться следующим нематематическим примером. Рассмотрим парадокс, связанный с высказыванием «Из всех правил есть исключения» (гл. IX). Это высказывание относится ко всякого рода конкретным правилам, например к правилу «Во всех книгах имеются опечатки». При обычной интерпретации высказывание «Из всех правил есть исключения» применимо и к самому высказыванию, вследствие чего возникает противоречие. Но в теории типов общее правило принадлежит к более высокому типу, и всё, что в нем утверждается о конкретных правилах, к нему самому неприменимо. Следовательно, из общего правила исключений может не быть.

Аналогичным образом гетерологический парадокс (слово называется гетерологическим, если оно неприменимо к самому себе) есть не что иное, как определение всех гетерологических слов, и поэтому принадлежит к более высокому типу, чем любое гетерологическое слово. Следовательно, вопрос о том, гетерологично ли само прилагательное «гетерологический», попросту неправилен.

В рамках теории типов находит свое решение и парадокс лжеца. Рассел излагает это решение следующим образом. Высказывание «Я лгу» означает «Существует утверждение, которое я высказываю, и оно ложно», или «Я высказываю утверждение p , и p ложно». Если p принадлежит к n -му типу, то утверждение относительно p принадлежит к более высокому типу. Следовательно, если утверждение относительно p истинно, то само p ложно, и если утверждение относительно p ложно, то p истинно. Никакого противоречия не возникает. Аналогичным образом теория типов разрешает и парадокс Ришара: суть решения сводится к тому, что

высказывание более высокого типа содержит некое утверждение о высказывании более низкого типа.

Ясно, что теория типов предполагает тщательную классификацию высказываний по типам. Но если попытаться положить теорию типов в основу строгого обоснования математики, то все построения становятся чрезвычайно сложными. Например, в «Основаниях математики» Рассела и Уайтхеда два предмета a и b считаются равными, если любое высказывание или любая пропозициональная функция, применимые к a (или истинные для a), применимы к b и наоборот. Но различные высказывания принадлежат, вообще говоря, к **различным** типам. Следовательно, понятие равенства становится необычайно сложным. Аналогичные трудности возникают и в связи с понятием числа: так как иррациональные числа определяются через рациональные, а рациональные – через положительные целые числа, то иррациональные числа принадлежат к более высокому типу, чем рациональные, а те в свою очередь – к более высокому типу, чем целые числа. Система вещественных чисел оказывается состоящей из чисел различных типов. Следовательно, вместо того, чтобы сформулировать одну теорему для всех вещественных чисел, мы должны формулировать теоремы для каждого типа в отдельности, поскольку теорема, применимая к одному типу, автоматически на другой тип не переносится.

Теория типов вносит осложнение и в понятие наименьшей верхней границы ограниченного множества вещественных чисел (гл. IX). Наименьшая верхняя граница, по определению, есть минимальная из всех верхних границ. Мы видим, что в определении наименьшей верхней границы фигурирует множество вещественных чисел, и поэтому наименьшая верхняя граница должна принадлежать к более высокому типу, чем вещественные числа, а значит, сама она вещественным числом не является.

Чтобы избежать подобных осложнений, Рассел и Уайтхед ввели весьма тонкую **аксиому сводимости** (или аксиому редукции). Аксиома сводимости для высказываний гласит: любое высказывание более высокого типа эквивалентно одному из высказываний первого типа. Аксиома сводимости для пропозициональных функций утверждает, что любая функция одного переменного или двух переменных эквивалентна некоторой функции типа 1 от того же числа переменных, к какому бы типу ни принадлежали переменные. Аксиома сводимости была необходима Расселу и Уайтхеду и для обоснования используемой в их «Основаниях математики» математической индукции.

Рассмотрев пропозициональные функции, авторы переходят к теории отношений. Отношения представимы с помощью пропозициональных функций двух или большего числа переменных. Так, пропозициональная функция « x любит y » выражает отношение. После теории отношений Рассел и Уайтхед излагают явную теорию классов, или множеств, определяемых с помощью пропозициональных функций. Теперь уже всё готово к введению понятия натурального (целого положительного) числа.

Определение натурального числа представляет значительный интерес. Оно зависит от введенного ранее отношения взаимно-однозначного соответствия между классами. Два класса называются эквивалентными, если между ними можно установить взаимно-однозначное соответствие. Все эквивалентные классы обладают одним общим свойством – числом, отвечающим этим классам (т.е. числом их элементов). Но возможно, что эквивалентные классы обладают и более чем одним общим свойством. Рассел и Уайтхед обошли эту трудность так же, как Фреге, – определив отвечающее классу число как класс всех классов, эквивалентных данному классу. Например, число 3 – это класс всех классов, содержащих по 3 элемента. Все такие классы обозначаются символом $\{x, y, z\}$, где $x \neq y \neq z$. Поскольку определение числа предполагает понятие взаимно-однозначного соответствия (обратите внимание на выражение «однозначное»!), может показаться, что здесь мы попадаем в порочный круг. Но отношение между элементами является взаимно-однозначным, если из того, что x и x' находятся в рассматриваемом отношении к y , следует, что x и x' совпадают, а из того, что x находится в этом отношении и к y , и к y' , вытекает, что совпадают y и y' . Следовательно, несмотря на употребленное в названии этого понятия выражение, реально взаимно-однозначное соответствие не определяется без апелляции к числу 1.⁵⁰

Имея натуральные числа, можно построить системы вещественных и комплексных чисел, теорию функций и весь математический анализ. Используя координаты и уравнения кривых,

⁵⁰ **В.Э.:** «...не определяется без апелляции к числу 1!» Так определяется же БЕЗ апелляции к числу 1! (Видимо, ошибка перевода, пропущенная Ягломом).

можно через арифметику ввести геометрию. Но для этого Расселу и Уайтхеду понадобились две дополнительные аксиомы. Программа состояла в том, чтобы сначала определить (с помощью пропозициональных функций) натуральные числа, а затем последовательно ввести более сложные рациональные и иррациональные числа. Чтобы включить в эту схему трансфинитные числа, Рассел и Уайтхед ввели аксиому существования бесконечных классов (классов, надлежащим образом определенных с точки зрения логики) и аксиому выбора (гл. IX), необходимую для теории типов.

Такова была грандиозная программа логистической школы. Долго рассказывать о том, что значила эта программа для самой логики, – мы ограничимся здесь лишь беглым перечислением основных пунктов программы. Для математики же (и это необходимо подчеркнуть особо) логистическая программа сводилась к тезису о построении (или возможности построения) всей математической науки на фундаменте логики. Математика становилась не более чем естественным продолжением логических законов и предмета логики.

Логистический подход к математике подвергся резкой критике. Сильные возражения вызвала аксиома сводимости, которая многим математикам казалась совершенно произвольной. Некоторые считали ее счастливой случайностью, а не логической необходимостью. Френк Пламpton Рамсей, сочувственно относившийся к логицизму, так охарактеризовал аксиому сводимости: «Такой аксиоме не место в математике, и всё, что не может быть доказано без нее, вообще не должно считаться доказанным». Другие ученые называли аксиому сводимости «жертвоприношением, в котором роль жертвы отведена разуму». Безоговорочно отвергал аксиому сводимости Герман Вейль. Иные критики утверждали, что она снова вводит в обращение непредикативные определения. Наиболее важными были вопросы о том, является ли аксиома сводимости аксиомой логики и, следовательно, подкрепляет ли она тезис о том, что математика выводима из логики.

Пуанкаре заявил в 1909 г., что аксиома сводимости более спорна и менее ясна, чем доказываемый с ее помощью принцип математической индукции. Аксиома сводимости, по его словам, представляет собой замаскированную форму математической индукции. Итак, с одной стороны, математическая индукция – это составная часть математики, а с другой стороны, она оказывается необходимой для обоснования математики. Следовательно, мы не можем доказать непротиворечивость математики.

В первом издании «Оснований математики» (1910) Рассел и Уайтхед обосновывали аксиому сводимости ссылкой на то, что она необходима для доказательства некоторых результатов. Аксиома их явно беспокоила. В защиту ее они приводили следующие доводы:

Что же касается аксиомы сводимости, то она убедительно подкрепляется интуитивными соображениями, так как и допускаемые ею рассуждения, и результаты, к которым она приводит, во всяком случае выглядят правильными. Но хотя маловероятно, чтобы эта аксиома оказалась ложной, она вполне может оказаться выводимой из некоторых других, более фундаментальных и более очевидных аксиом.

В последующие годы применение аксиомы сводимости вызывало у Рассела всё большую озабоченность. Во «Введении в математическую философию» (1919) Рассел был вынужден признать:

С чисто логической точки зрения я не вижу оснований считать аксиому сводимости необходимой, т.е. тем, о чем принято говорить, что оно истинно во всех возможных мирах. Следовательно, включение этой аксиомы в систему логики является дефектом, даже если аксиома эмпирически правильна.

Во втором издании «Оснований математики» (1926) Рассел сформулировал аксиому сводимости иначе. Но и в новой формулировке она порождала немало трудностей: запрет на бесконечности высоких порядков, вынужденный отказ от теоремы о наименьшей верхней границе, трудности при использовании математической индукции. Во втором издании «Оснований математики» Рассел так же, как и в первом, выразил надежду вывести аксиому сводимости из более наглядных аксиом и снова назвал ее логическим дефектом. По словам авторов «Оснований математики», «эта аксиома имеет чисто прагматическое обоснование. Она приводит к желаемым и ни к каким другим результатам. В то же время ясно, что она не принадлежит к такого рода аксиомам, на которые можно спокойно положиться». Рассел и

Уайтхед понимали, что ссылка на правильность выводов, получаемых с помощью аксиомы сводимости, не является убедительным аргументом. Были предприняты различные попытки свести математику к логике без столь спорной аксиомы, но никому в этом отношении не удалось продвинуться сколько-нибудь далеко, а некоторые попытки подверглись суровой критике, так как они основывались на неверных доказательствах.

Другое направление в критике логистической школы было связано с аксиомой бесконечности. По общему убеждению, структура всей арифметики существенно зависела от этой аксиомы, в то время как не было ни малейших оснований считать ее истинной и, что еще хуже, не было способа, позволившего бы установить, истинна ли она или нет. Оставался открытым и вопрос о том, является ли эта аксиома аксиомой логики.

Справедливости ради заметим, что Рассел и Уайтхед испытывали сомнения относительно того, включать или не включать аксиому бесконечности в число аксиом логики. Их беспокоило, что содержание аксиомы выглядит «фактообразно». Сомнения возникали не только по поводу принадлежности аксиомы к логике, но и относительно ее истинности. Согласно одной из интерпретаций термина «индивидуум», предложенной Расселом и Уайтхедом, под «индивидуумами» понимались мельчайшие частицы, или элементы, составляющие Вселенную. Создавалось впечатление, что, хотя аксиома бесконечности сформулирована на языке логики, она по существу сводится к вопросу о том, конечно или бесконечно число мельчайших частиц во Вселенной, т.е. к вопросу, ответ на который может дать только физика, но никак не математика и не логика. Но если мы хотим рассматривать бесконечные множества или показать, что математические теоремы, при выводе которых была использована аксиома бесконечности, принадлежат к числу теорем логики, то нам, по-видимому, не остается ничего другого, как считать аксиому бесконечности аксиомой логики. Короче говоря, если мы хотим «свести» математику к логике, то логика, очевидно, должна включать в себя аксиому бесконечности.

Рассел и Уайтхед использовали также аксиому выбора (гл. IX), которую они называли мультипликативной аксиомой: если задан класс непересекающихся (взаимно исключающих) классов, ни один из которых не является нулевым (или пустым), то существует класс, содержащий ровно по одному элементу из каждого класса и не содержащий других элементов. Как мы знаем, аксиома выбора породила больше дискуссий и споров, чем любая другая аксиома, за исключением, может быть, аксиомы Евклида о параллельных. Аксиома выбора вызывала сомнения и у Рассела и Уайтхеда, которые так и не смогли убедить самих себя признать ее логической истиной наравне с другими аксиомами логики. Тем не менее, если мы хотим свести к логике те разделы классической математики, для построения которых необходима аксиома выбора, то эту аксиому, вероятно, также необходимо считать составной частью логики.

Использование этих трех аксиом (сводимости, бесконечности и выбора) поставило под сомнение основной тезис логицизма о возможности вывести всю математику из логики. Где провести границу между логикой и математикой? Сторонники логистического тезиса утверждали, что логика, используемая Расселом и Уайтхедом, была «чистой», или «очищенной». Другие, помятуя о трех спорных аксиомах, ставили под сомнение «чистоту» этой логики. Тем самым они отрицали, что вся математика или даже какая-то важная часть ее может быть сведена к логике. Некоторые математики и логики были склонны расширить термин «логика» так, чтобы он охватывал аксиомы сводимости, бесконечности и выбора.

Рассел, отстаивавший логистический тезис, по-прежнему защищал всё, что было сделано им и Уайтхедом в первом издании «Оснований математики». В работе «Введение в математическую философию» ([79*]⁵¹, 1919) он приводил следующие доводы:

При доказательстве этого тождества [математики и логики] всё упирается в детали; начав с посылок, относящихся, по всеобщему признанию, к логике, и придя с помощью дедукции к результатам, заведомо принадлежащим математике, мы обнаружим, что нигде не возможно провести четкую границу, слева от которой находилась бы логика, а справа – математика. Если кто-нибудь вздумает отвергать тождество логики и математики, то мы можем оспорить его мнение, попросив указать то место в цепи определений и дедуктивных выводов «Оснований математики», где, по его мнению, заканчивается логика и начинается математика, и тогда сразу станет ясно, что любой ответ совершенно произволен.

⁵¹ Russell B. Introduction to Mathematical Philosophy. – London: George Allen & Unwin, 1919.

Разногласия по поводу теории Кантора и аксиом выбора и бесконечности достигли в начале XX в. столь большой остроты, что Рассел и Уайтхед не стали включать две последние аксиомы в число аксиом своей системы, хотя и использовали их (во втором издании, 1926) при доказательстве некоторых теорем, каждый раз особо оговаривая, что вывод теорем опирается на «посторонние» аксиомы. Но аксиомы выбора и бесконечности оказались необходимыми для вывода значительной части классической математики. Во втором издании своих «Принципов математики» ([81*]⁵², 1937) Расселу пришлось пойти на еще большие уступки. По его собственному признанию, «весь вопрос о том, что считать принципами логики, становится в значительной степени произвольным». Аксиомы бесконечности и выбора «можно доказывать или опровергать, лишь исходя из эмпирических данных». Тем не менее Рассел продолжал настаивать на единстве логики и математики.

Но и подобные признания не смогли заставить критику умолкнуть. В своей книге «Философия математики и естественных наук» ([93*]⁵³, 1949) Герман Вейль писал о том, что Рассел и Уайтхед возвели математику на основе

...не просто логики, а своего рода рая для логиков, мира, снабженного всем необходимым «инвентарем» весьма сложной структуры... Кто из здравомыслящих людей осмелится утверждать, что верит в этот трансцендентальный мир?... Эта сложная структура требует от нас не меньшей веры, чем учения отцов церкви или средневековых философов-схоластов.

Критика логицизма имела и другой характер. Хотя в трех томах «Оснований математики» Рассела и Уайтхеда не нашлось места для последовательного построения геометрии, ни у кого не вызывало сомнений, что такое построение вполне осуществимо, если воспользоваться, как об этом уже говорилось, аналитической геометрией. Тем не менее, иные критики утверждали, что авторы, сведя к логике систему аксиом целых чисел, тем самым свели к логике арифметику, алгебру и математический анализ, но не свели к логике «неарифметические» разделы математики, например геометрию, топологию и абстрактную алгебру. Такого мнения придерживался, в частности, логик Карл Гемпель, считавший, что хотя в случае арифметики неопределяемым, или первичным, понятиям оказалось возможным придать обычный смысл с помощью «чисто логических понятий», «аналогичная процедура неприменима к тем математическим дисциплинам, которые обязаны своим появлением на свет не арифметике». Коллега Гемпеля Уиллард Ван Орман Куайн, по мнению которого «вся математика сводится к логике», считал, что для геометрии существует «готовый метод, позволяющий свести ее к логике» и что топология и абстрактная алгебра «укладываются в общую структуру логики». Сам Рассел сомневался, что всю геометрию удастся вывести только из логики.

Философы также подвергли логистическое направление серьезной критике, суть которой сводилась к следующему. Если основной тезис логицизма верен, то вся математика является чисто формальной, логико-дедуктивной наукой, теоремы которой следуют из законов мышления. Казалось необъяснимым, каким образом с помощью дедуктивного вывода одни лишь законы мышления могут привести к описанию неисчерпаемого разнообразия явлений природы, к различным применениям чисел, геометрии пространства, акустике, электромагнетизму и механике. Именно так и следует понимать критическое замечание Вейля: «Из ничего и следует ничто».

Пуанкаре, со взглядами которого мы познакомимся подробнее в дальнейшем, также критически относился к тому, что считал бесплодными манипуляциями логическими символами. В работе «Наука и метод» (1906), опубликованной в то время, когда Рассел и Гильберт уже успели неоднократно изложить свои программы, Пуанкаре утверждал по поводу логицизма:

Эта наука [математика] не имеет единственной целью вечное созерцание своего собственного пупа; она приближается к природе, и раньше или позже она придет с ней в соприкосновение; в этот

⁵² Russell B. The Principles of Mathematics, 2nd ed. London: George Allen & Unwin, 1937.

⁵³ Weyl H. Philosophy of Mathematics and Natural Sciences. – Princeton: University Press, 1949. [Немецкий оригинал: Weyl H. Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaften. – München: Oldenberg, 1922; русский перевод (частичный): Вейль Г. О философии математики. – М.: Гостехиздат, 1934, с. 34–91; 2-е изд. доп. и перераб. München: Leibniz Verlag, 1950; русский перевод отрывков – в кн.: Прикладная математика (под ред. Э. Беккенбах.) – М.: Мир, 1968, с. 309–361.]

момент необходимо будет отбросить чисто словесные определения, которыми нельзя будет довольствоваться. ([1]⁵⁴, с. 393.)

В той же книге (с. 397) Пуанкаре говорил:

Как бы там ни было, логистика должна быть переделана, и неизвестно, что в ней может быть спасено. Бесполезно прибавлять, что на карту поставлены только канторизм и логистика. Истинные математические науки, т.е. те, которые чему-нибудь служат, могут продолжать свое развитие только согласно свойственным им принципам, не заботясь о тех бурях, которые бушуют вне их; они будут шаг за шагом делать свои завоевания, которые являются окончательными и от которых им никогда не будет нужды отказываться.

Другое серьезное критическое замечание по поводу логистической программы состояло в том, что в процессе развития математики новые понятия, как выводимые, так и не выводимые непосредственно из опыта, формируются на основе чувственной или образной интуиции. Впрочем, как же иначе может возникать новое знание? Между тем в «Основаниях математики» все понятия сводятся к логическим. Формализация не дает сколько-нибудь реального представления о математике: это лишь шелуха, а не зерно. Высказывание Рассела: «Математика – такой предмет, в котором мы никогда не знаем ни того, о чем говорим, ни насколько верно то, что мы говорим» – вполне может быть адресовано логицизму.

На вопросы о том, каким образом могут входить в математику новые идеи и как математика может описывать реальный мир, если ее содержание целиком выводимо из логики, ответить нелегко, и Рассел и Уайтхед не дали на них никакого ответа. Один из возможных ответов состоял в том, что логицизм не ставит своей задачей объяснить, почему математика применима к реальному миру. На это можно было бы возразить, что математика применима к наиболее фундаментальным физическим принципам. По отношению к реальности их можно рассматривать как логические посылки. Математические методы позволяют извлекать из этих посылок такие заключения, как, например, $pV = \text{const}$ (закон Бойля–Мариотта) или $F = ma$ (третий закон Ньютона). Но эти заключения применимы к реальному миру. Возникает проблема соответствия реального мира «математической вселенной», базирующейся не на эмпирических фактах, а на дедуктивных выводах.⁵⁵ К этому вопросу мы вернемся в дальнейшем (гл. XV).

Рассел продолжал размышлять над логистической программой и после выхода в свет второго издания «Оснований математики». В книге «Мое философское развитие» (1959) он признавал, что эта программа заключалась в постепенном отходе от «евклидианства» в сочетании с намерением по возможности сохранить максимум определенности. Критика логистической философии, несомненно, сказалась на позиции, занятой Расселом в конце 20-х годов XX в. Приступая к работе над «Основаниями математики» в самом начале XX в., Рассел считал аксиомы логики истинами. В издании «Принципов математики» 1937 г. он отказался от таких взглядов. Теперь уже Рассел не был убежден, что принципы логики являются априорными истинами. Следовательно, выводимую из логики математику также нельзя считать априори истинной.

Но если аксиомы логики не принадлежат к числу истин, то логицизм оставляет без ответа фундаментальный вопрос о непротиворечивости математики. Еще в большей степени непротиворечивость ставится под угрозу сомнительной аксиомой сводимости. Использование аксиомы сводимости в первом и во втором изданиях «Оснований математики» Рассел оправдывал неубедительной ссылкой на то, что, во-первых, «из нее следует много высказываний, истинность которых почти не вызывает сомнений», и, во-вторых, «если бы эта аксиома была ложной, не существовало бы столь же правдоподобного объяснения, почему истинны

⁵⁴ Пуанкаре А. О науке. – М.: Наука, 1983.

⁵⁵ **Яглом:** По этому поводу см. статьи выдающихся физиков, лауреатов Нобелевской премии Е.П. Вигнера [96*: Wigner E.P. The Unreasonable Effectiveness of Mathematics. Com. Pure and Appl. Math., 1960, 13, 1–14. [Русский перевод: Вигнер Е. Непостижимая эффективность математики в естественных науках. – В кн.: Вигнер Е. Этюды о симметрии. – М.: Мир, 1971, 182–198; также: УФН, т. 94, вып. 3, 1968, с. 535–546; в кн.: Проблемы современной математики. – М.: Знание, 1971, с. 22–33.]], Ч. Янга [60: Янг Ч. Эйнштейны и физика второй половины XX века. – Успехи физических наук, 132, вып. 1, 1980, с. 169–175] и В. Гейзенберга [61: Гейзенберг В. Смысл и значение красоты в точных науках. – Вопросы философии, 1979, № 12, с. 49–60]; цитируемые в гл. XV высказывания А. Эйнштейна и названные там его статьи, а также [4: Манин Ю.И. Математика и физика. – М.: Знание, 1979].

выведенные из нее высказывания и почему из нее не следует ни одного высказывания, которое было бы ложным». Принятая в «Основаниях математики» (и во многих других логических системах) материальная импликация может быть истинной, даже если ее первый член ложен. Следовательно, если бы в число аксиом входило ложное высказывание p и импликация «если p , то q » была бы истинной, то и высказывание q могло бы быть истинным. Поэтому ссылка на то, что из аксиомы сводимости следуют высказывания, истинность которых не вызывает сомнений, не достигает цели, так как в логической системе «Оснований математики» любое «бесспорно истинное» высказывание вполне может следовать из ложной аксиомы.⁵⁶

Работу Рассела и Уайтхеда критиковали и по многим другим причинам, которые мы не затрагивали. Как обнаружилось в дальнейшем, иерархия типов оказалась разумной и полезной, но, по-видимому, всё же не полностью соответствующей своему назначению. Типы были введены как предохранительная мера против антиномий, и они действительно помогли разрешить антиномии теории множеств и логики. Однако не исключено, что возникнут новые антиномии, против которых иерархия типов окажется бессильной.

Тем не менее некоторые выдающиеся логики и математики, например, Уиллард Ван Орман Куайн и Алонсо Черч, по-прежнему выступают в защиту логицизма, хотя в его современном состоянии относятся к нему критически. Многие авторы трудятся над восполнением тех или иных изъянов логицизма. Некоторые логики и математики, разделяющие не все тезисы логицизма, настаивают на том, что логика и, следовательно, математика аналитичны, т.е. представляют собой обобщенные варианты того, что утверждается в аксиомах. Итак, у логической программы имеются убежденные сторонники, стремящиеся ликвидировать причины возражений и сделать менее громоздкими некоторые построения. Другие ученые склонны видеть в логицизме несбыточную мечту. Находятся и такие, которые, как мы увидим, выступают с резкой критикой, считая логицизм абсолютно ложной концепцией математики. В целом, если учесть спорные аксиомы и длительное, сложное развитие, нельзя не признать, что у критиков были все основания утверждать, что логицизм выводит заранее известные заключения из необоснованных посылок.

Своим фундаментальным трудом Рассел и Уайтхед способствовали прогрессу еще одного направления математической мысли. Математизация логики началась в конце XIX в. (гл. VIII). Рассел и Уайтхед осуществили всю аксиоматизацию в чисто символическом виде, тем самым значительно продвинув развитие математической логики.

По-видимому, последнее слово о логицизме было сказано Расселом в его книге «Портреты по памяти» (1958):

Я жаждал определенности примерно так же, как иные жаждут обрести религиозную веру. Я полагал, что найти определенность более вероятно в математике, чем где-либо еще. Выяснилось, однако, что математические доказательства, на принятие которых мной мои учителя возлагали такие надежды, изобилуют грубыми логическими ошибками и что определенность, если и кроется в математике, то заведомо в какой-нибудь новой области, обоснованной более надежно, чем традиционные области с их, казалось бы, незыблемыми истинами. В процессе работы у меня из головы не выходила басня о слоне и черепахе: воздвигнув слона, на котором мог бы покоиться математический мир, я обнаружил, что этот слон шатается, — тогда и мне пришлось создать черепаху, которая не давала бы слону упасть. Но и черепаха оказалась ничуть не более надежной, чем слон, — и через каких-нибудь двадцать лет напряженных усилий и поисков я пришел к выводу, что не могу сделать ничего более, дабы придать математическому знанию неоспоримый характер.

В книге «Мое философское развитие» (1959) Рассел признавался: «Восхитительная определенность, которую я всегда надеялся найти в математике, затерялась в путанице понятий и выводов ... Это оказался поистине запутанный лабиринт, выхода из которого не было видно». Трагедия постигла не только Рассела.

Еще в то время, когда логицизм переживал период становления, группа математиков, называвших себя интуиционистами, предложила совершенно иной подход к математике, диаметрально противоположный логицизму. Один из интереснейших парадоксов в истории математики состоял в том, что в то время как логицисты в поисках надежных оснований математики всё более полагались на изощренную логику, их основные соперники отворачива-

⁵⁶ **Яглом:** Разумеется, из (ложной!) «аксиомы» $2 \times 2 = 100$ следует (истинная!) теорема « 2×2 – четное число» (как, впрочем, и теорема « 2×2 – нечетное число», если только следование предложений понимать в соответствии с определением материальной импликации).

лись от логики и даже в каком-то отношении отказались от нее (ср., впрочем, с. 282). Но цель, которую преследовали логицисты и интуиционисты, была единой. В конце XIX в. математика утратила свои претензии на истинность как выражение законов, присущих структуре реального мира. Логика, главным образом Фреге и Рассел, первоначально считали, что логика является сводом незыблемых истин и поэтому основанная на логике математика также будет собранием истин; однако впоследствии они отошли от исходной позиции к логическим принципам, имевшим лишь прагматическое обоснование. Интуиционисты также пытались обосновать истинность собственно математики, ссылаясь непосредственно на человеческий разум. Выводы из логических принципов интуиционисты считали менее надежными, чем непосредственно интуитивные соображения. Открытие парадоксов не только укрепило недоверие к логическим принципам, но и ускорило процесс формулировки основных представлений интуиционизма.

Интуиционизм в широком смысле слова восходит по крайней мере к Декарту и Паскалю. Так, в «Правилах для руководства ума» Декарта говорится следующее⁵⁷:

Для того, чтобы в дальнейшем не подвергать себя подобному заблуждению, мы рассмотрим здесь все те действия нашего интеллекта, посредством которых мы можем прийти к познанию вещей, не боясь никаких ошибок. Возможны только два таких действия, а именно: интуиция и дедукция.

Под интуицией я разумею не веру в шаткое свидетельство чувств и не обманчивое суждение беспорядочного воображения, но понятие ясного и внимательного ума, настолько простое и отчетливое, что оно не оставляет никакого сомнения в том, что мы мыслим, или, что одно и то же, прочное понятие ясного и внимательного ума, порождаемое лишь естественным светом разума и благодаря своей простоте более достоверное, чем сама дедукция, хотя последняя и не может быть плохо построена человеком, как я уже говорил выше.

Так например, всякий может интуитивно постичь умом, что он существует, что он мыслит, что треугольник ограничивается только тремя линиями, что шар имеет только одну поверхность, и подобные этим истины, гораздо более многочисленные, чем это замечает большинство людей вследствие того, что не считает достойными внимания такие простые вещи.

Может возникнуть сомнение, для чего мы добавляем к интуиции еще и этот другой способ познания, заключающийся в дедукции, посредством которой мы познаем всё, что необходимо выводится из чего-либо достоверно известного. Это нужно было сделать потому, что есть много вещей, которые хотя и не являются самоочевидными, но доступны достоверному познанию, если только они выводятся из верных и понятных принципов путем последовательного и нигде не прерывающегося движения мысли при зоркой интуиции каждого отдельного положения. Подобно этому мы узнаем, что последнее кольцо длинной цепи соединено с первым, хотя мы и не можем охватить одним взглядом все находящиеся между ними кольца, которые обуславливают это соединение, лишь бы мы последовательно проследили их и вспомнили, что каждое из них, от первого до последнего, соединено с соседним. Итак, мы различаем здесь интуицию ума от правильной дедукции в том отношении, что под дедукцией подразумевается именно движение или последовательность, чего нет в интуиции; кроме того, дедукция не нуждается в наличной очевидности, как интуиция, но скорее как бы заимствует свою достоверность у памяти. Отсюда следует, что положения, непосредственно вытекающие из первого принципа, можно сказать, познаются как интуитивным, так и дедуктивным путем, в зависимости от способа их рассмотрения, сами же принципы – только интуитивным, как и, наоборот, отдаленные их следствия – только дедуктивным путем. ([15]⁵⁸, с. 57–60.)

Паскаль также глубоко верил в интуицию и в своих математических работах опирался в основном на интуицию. Он предвидел важные результаты, высказывал великолепные догадки и находил изящные, неожиданные решения. С годами Паскаль стал отдавать интуиции явное предпочтение как источнику истины. Некоторые из его высказываний на эту тему получили широкую известность: «У сердца – свои причины, о которых не знает разум»; «Логика медленный и мучительный метод, позволяющий тем, кто не знает истины, открывать ее»; «Смирить гордыню, бессильный разум».

Многие положения интуиционизма были предвосхищены Иммануилом Кантом. Будучи прежде всего философом, Кант тем не менее в 1755–1770 гг. преподавал математику и физику в

⁵⁷ **Яглом:** По поводу современных взглядов на роль интуиции и дедукции в понимании мира см., например [32: Фейнберг Е.Л. Кибернетика, логика, искусство. – М.: Радио и связь, 1981], а также [62: Асмус В.Ф. Проблема интуиции в философии и математике. – М.: Мысль, 1965].

⁵⁸ Декарт Р. Правила для руководства ума. – М.–Л.: Соцэкгиз, 1936.

Кёнигсбергском университете. Он считал, что свои ощущения мы получаем из предполагаемого внешнего мира, однако эти ощущения (или восприятия) не дают существенного знания. Все восприятия включают в качестве необходимого звена взаимодействие между тем, кто воспринимает, и воспринимаемым объектом. Разум организует восприятия, и эти организации являются интуитивными представлениями о пространстве и времени. Пространство и время не существуют сами по себе, а являются творениями нашего разума. Разум применяет свое понимание пространства и времени к данным опыта, которые лишь пробуждают разум. Знание может начинаться с опыта, но в действительности не опыт является источником знания. Знание берется из разума. Математика дает нам блестящий пример того, как далеко мы можем продвинуться в априорном (истинном) знании независимо от опыта. Математические теоремы Кант относит к разряду так называемых синтетических суждений, т.е. суждений, доставляющих нам новое знание и тем отличающихся от аналитических суждений типа, например, предложения «Все тела протяженны», не содержащих ничего нового, так как в силу самой природы тел протяженность является их неотъемлемым свойством (примером синтетического суждения может служить, скажем, утверждение о том, что отрезок прямой есть кратчайшее расстояние между двумя точками).

Хотя Кант заблуждался, приписывая евклидовой геометрии априорный синтетический характер, аналогичное заблуждение разделяли почти все философы и математики того времени. Эта ошибка дискредитировала философию Канта в глазах философов и математиков последующих поколений. Однако проведенный Кантом анализ времени как одной из форм интуиции и его общий тезис о том, что разум служит источником основных истин, имели непреходящее значение.

Если бы математики были лучше знакомы со взглядами таких мыслителей, как Декарт, Паскаль и Кант, то интуиционистское направление в основаниях математики, считавшееся, по крайней мере в первые годы после его возникновения, весьма радикальным, шокировало бы их гораздо меньше. Но, разумеется, ни Декарт, ни Паскаль, ни Кант не имели в виду интуиционистский подход ко всей математике. Как направление в основаниях математики интуиционизм – порождение нашей эпохи.

Непосредственным предшественником современного интуиционизма был Леопольд Кронекер. Широко известно его высказывание: «Господь бог создал целые числа; всё остальное – дело рук человеческих». Сложную логическую концепцию целого числа Кантора и Дедекинда, базирующуюся на теоретико-множественной основе, Кронекер считал менее надежной, чем непосредственное принятие целых чисел. По мнению Кронекера, целые числа интуитивно понятны и не нуждаются в более строгом обосновании.⁵⁹ Все остальные математические понятия следовало строить так, чтобы их смысл был интуитивно понятен. Кронекер выступал за построение системы вещественных чисел на основе целых чисел и методов, позволяющих не только доказывать общие теоремы существования, но и вычислять значения соответствующих чисел. Так, Кронекер считал вполне приемлемыми иррациональные числа, являющиеся корнями многочленов, лишь в том случае, если соответствующие корни могут быть вычислены с любой степенью точности.

Кантор доказал, что существуют трансцендентные иррациональные числа, не являющиеся корнями никаких алгебраических уравнений [с целыми коэффициентами]⁶⁰, и в 1882 г. Фердинанд Линдеман (1852–1939) доказал, что π – трансцендентное число. По поводу этой работы Кронекер заявил Линдеману: «Что толку от вашей прекрасной работы о числе π ? Стоит ли браться за исследование подобных проблем, если подобные иррациональные числа вообще не существуют?» Возражение Кронекера относилось не вообще к иррациональным числам, а к доказательствам, не позволяющим вычислять те числа, о которых идет речь. Предложенное Линдеманом доказательство трансцендентности числа π не было конструктивным. С помощью

⁵⁹ **Яглом:** Предложенное (почти одновременно и, по-видимому, независимо) Р. Дедекиндом и Дж. Пеано аксиоматическое описание целых (или целых положительных – натуральных) чисел хронологически почти совпало со смертью Кронекера (основополагающая работа Пеано вышла в свет в год смерти Кронекера); поэтому он уже не мог высказать свое мнение по поводу этой новой теории.

⁶⁰ **Яглом:** Предшествующее Кантору доказательство существования трансцендентных чисел принадлежит французскому математику Жозефу Лиувиллю (1809–1882), построившему конкретные примеры таких чисел (1851); Кантор же доказал, что в определенном смысле «почти все» вещественные числа являются трансцендентными (причем его доказательство было существенно «неконструктивным», т.е. не позволяло указать ни одного такого числа).

разложения в ряд значение π можно было вычислить с любой степенью точности – но Кронекер считал неприемлемым само использование такого (бесконечного!) ряда.

Бесконечные множества и трансфинитные числа Кронекер полностью отвергал, так как считал возможным иметь дело только с потенциальной бесконечностью. С точки зрения Кронекера, всё, что сделал в этой области Кантор, было не математикой, а мистикой. Классический анализ Кронекер называл игрой в слова. Он мог бы с успехом добавить, что если у бога есть несколько математик, то ему следовало бы оставить их при себе. Однако Кронекер лишь высказывал подобные взгляды, но не развивал их. Возможно, он и сам относился к своим столь радикальным воззрениям не слишком серьезно.

Борель, Бэр и Лебег, с чьими возражениями против аксиомы выбора мы уже познакомились, были «полуинтуиционистами». Основание всей математики они усматривали в системе вещественных чисел. Подробное изложение их взглядов представляет лишь исторический интерес, так как и эти математики, в полемике которых речь шла о специальных вопросах, последовательной философии не создали. Пуанкаре, как и Кронекер, считал, что не следует давать определения целым числам или выводить их свойства на аксиоматической основе. Наша интуиция предшествует такому выводу. Пуанкаре также считал, что математическая индукция является общим принципом, допускающим получение новых результатов. При всей своей кажущейся интуитивности метод математической индукции к логике, по его мнению, не сводится.

Сущность метода математической индукции, каким его видел Пуанкаре, заслуживает изучения, поскольку она и поныне вызывает споры. Следуя методу математической индукции, тот, кто хочет доказать, например, что при всех целых положительных n имеет место равенство

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (1)$$

должен сначала установить, что оно выполняется при $n = 1$, а затем доказать, что если оно выполняется при каком-то целом $n = k$, то выполняется и при следующем значении $n = k+1$. Следовательно, считал Пуанкаре, метод математической индукции апеллирует к бесконечному множеству аргументов: мы утверждаем, что так как равенство (1) выполняется при $n = 1$, то оно выполняется и при $n = 2$, а так как оно выполняется при $n = 2$, то оно выполняется и при $n = 3$ и т.д. при всех положительных целых n . Но ни один логический принцип не охватывает бесконечно много аргументов. Следовательно, метод математической индукции не следует из логических принципов. Тем самым, по мнению Пуанкаре, непротиворечивость математики не может быть доказана сведением математики к логике, как предлагали логицисты.

По поводу бесконечных множеств Пуанкаре утверждал: «Актуальной бесконечности не существует. То, что мы называем бесконечностью, представляет собой неограниченную возможность создания новых объектов независимо от того, сколько объектов уже существует».

Пуанкаре резко отрицательно относился к громоздким обозначениям логицистов, и в его «Науке и методе» по поводу логицизма отчетливо звучат саркастические ноты. Так, говоря о подходе к понятию целого числа, избранном Бурали-Форти в работе 1897 г., где число 1 определяется с помощью сложного лабиринта буквенных символов, Пуанкаре замечает:

Это определение в высшей степени подходит для того, чтобы дать представление о числе 1 тем лицам, которые никогда о нем ничего не слышали!.. Я слишком мало понимаю приверженцев Пеано, чтобы рискнуть его [определение числа 1] критиковать; но я опасюсь, что это определение заключает *petitio principii* [логическую ошибку «предвосхищение основания»], так как я вижу цифру 1 в левой части и изображенное буквами слово «один» (Un) – в правой части равенства. ([1]⁶¹, с. 377.)

Затем Пуанкаре обращается к определению нуля, предложенному одним из первых сторонников логицизма Луи Кутюра (1868–1914). Ноль, по Кутюра, – это «число элементов нулевого класса. А что такое нулевой класс? Это класс, который не содержит никакого элемента» ([1], с. 377). Далее Кутюра «усовершенствует» свое определение, переводя его на язык символических обозначений. Пуанкаре дает обратный перевод: «Ноль есть число предметов, удовлетворяющих такому условию, которое никогда не выполняется. Но так как «никогда» означает «ни в одном случае», то я не вижу значительного успеха в этой замене» ([1], с. 377).

⁶¹ Пуанкаре А. О науке. – М.: Наука, 1983.

Пуанкаре критикует далее предложенное Кутюра определенна числа 1: «Один, утверждает Кутюра, в сущности есть число элементов класса, два любых элемента коего тождественны... Боюсь, что если спросить у Кутюра, что такое «два», то он должен будет в ответ воспользоваться словом «один»» ([1], с. 377–378)⁶².

Предшественники интуиционизма Кронекер, Борель, Лебег, Пуанкаре и Бэр – созвездие блистательных имен! – высказывали критические замечания по поводу стандартных математических рассуждений и логического подхода, но их собственный вклад в развитие интуиционизма был фрагментарным и случайным. Их идеи вошли в окончательную версию, разработанную голландским математиком, основоположником философии интуиционизма Лейтценем Эгбертом Яном Брауэром (1881–1966). Изложение философии интуиционизма Брауэр начал в своей докторской диссертации «Об основаниях математики» (1907). Обобщенный вариант своих взглядов Брауэр изложил в серии статей, опубликованных, начиная с 1918 г., в различных журналах.

Интуиционистская позиция Брауэра в математике проистекает из его общефилософских взглядов. Математика, считает Брауэр, – это человеческая деятельность, которая начинается и протекает в разуме человека. Вне человеческого разума математика не существует. Следовательно, заключает Брауэр, математика не зависит от реального мира. Разум непосредственно постигает основные, ясные и понятные, интуитивные представления. Они являются не чувственными или эмпирическими, а непосредственно данными, достоверными представлениями о некоторых математических понятиях. К таким понятиям относятся целые числа. Фундаментальное интуитивное представление – постижение различных событий в хронологической последовательности. «Математика возникает тогда, когда сущность двойки [числа «два»], возникающая вследствие хода времени, абстрагируется от всего частного. Остающаяся пустая форма общего содержания всех двоек становится исходным интуитивным представлением математики и, повторяемая неограниченно, создает новые математические сущности». Под неограниченным повторением Брауэр понимает образование последовательных натуральных чисел. Идею о том, что понятие целого числа является производным от интуитивного представления о времени, высказывали также И. Кант, Уильям Р. Гамильтон (в статье «Алгебра как наука о времени») и философ Артур Шопенгауэр.

Математическое мышление, по Брауэру, представляет собой процесс мысленного построения, создающего свой собственный мир, не зависящий от опыта и ограниченный лишь тем, что в основе его должна лежать фундаментальная математическая интуиция. Это фундаментальное интуитивное понятие следует представлять себе не как нечто сходное по природе с неопределяемыми понятиями, встречающимися в аксиоматических теориях. Наоборот, через него должны постигаться разумом все неопределяемые идеи, используемые в различных математических системах, если они действительно призваны служить математическому мышлению. Кроме того, математика по своей природе синтетична. Она занимается составлением истин, а не выводит их из логики.

Брауэр был убежден в том, что «в этом конструктивном процессе, ограниченном неременной обязанностью отмечать по мере возникновения новых идей и повышения культуры мышления, какие тезисы приемлемы для интуиции, самоочевидны для разума, а какие неприемлемы, – единственное возможное основание, которое стремится обрести математика». Интуиция (а не опыт или логика) определяет, согласно Брауэру, правильность и приемлемость идей. Следует помнить, подчеркивал он, что это отнюдь не отрицает той исторической роли, которую сыграл опыт.

Помимо натуральных чисел Брауэр считал интуитивно ясными сложение, умножение и математическую индукцию. Кроме того, получив натуральные числа 1, 2, 3, ..., разум, используя возможность неограниченного повторения «пустой формы» – шаги от n к $n+1$, – создает бесконечные множества. Однако такие множества лишь потенциально бесконечны в том смысле, что к любому заданному конечному множеству чисел всегда можно прибавить еще большее число. Брауэр отвергал актуально бесконечные множества Кантора, все элементы которых были представлены «в готовом виде», и тем самым отрицал теорию трансфинитных чисел, аксиому выбора Цермело и те разделы анализа, которые используют актуально бесконечные множества. В докладе, прочитанном в 1912 г., Брауэр признал ординальные числа вплоть до ω и счетные

⁶² **Яглом:** По поводу полемики между Пуанкаре и Кутюра см. [63: Новые идеи в математике. Сб. 10. – Пгд.: Образование, 1915].

множества. Он также допускал существование иррациональных чисел, определяемых последовательностями рациональных чисел без какого бы то ни было закона образования последовательности — «последовательностями свободного выбора». Сколь ни расплывчато это определение, оно всё же делало возможным появление несчетного множества вещественных чисел. В то же время геометрия включает понятие пространства и поэтому, в отличие от понятия числа, не полностью контролируется нашим разумом. Синтетическая геометрия относится к физическим наукам.

В связи с интуиционистским понятием бесконечного множества интуиционист Вейль⁶³ писал в статье 1946 г.:

Последовательность чисел, которые, возрастая, превосходят любой достигнутый ими предел... есть многообразие возможностей, открывающихся перед бесконечностью; она навсегда остается в стадии сотворения, но не переходит в замкнутый мир вещей, существующих в себе. Источник наших трудностей, в том числе и антиномий [парадоксов], более фундаментален по своей природе, чем указанный принципом порочного круга Рассела, и состоит в том, что мы одно слепо превратили в другое. Брауэр открыл нам глаза и показал, как далеко классическая математика, питаемая верой в абсолютизм, превосходящий все человеческие возможности реализации, выходит за рамки утверждений, которые могут претендовать на реальный смысл и истинность, основанную на опыте.

Брауэр подверг критическому анализу отношение математики к языку. Математика — полностью автономный, находящий основание в самом себе вид человеческой деятельности. Она не зависит от языка. Слова или словесные связки используются в математике только для передачи истин. Математические идеи уходят своими корнями в человеческий разум глубже, чем в язык. Мир интуитивных математических представлений противостоит миру восприятий. К последнему, а не к математике, принадлежит язык, служащий для повседневного общения. Язык с помощью букв и звуков пробуждает в человеческом разуме копии идей. Различие между идеями и их копиями такое же, как между восхождением на гору и его словесным описанием. Но математические идеи не зависят от словесного одевания, в которое их облакает язык, и в действительности гораздо богаче. Мысли никогда невозможно выразить полностью даже на математическом языке, в том числе и на языке символов. Кроме того, язык вносит отклонения от предмета собственно математики.

Еще более решительную позицию, резко контрастирующую с логицизмом, интуиционизм занимает в отношении логики. Логика принадлежит языку. Она дает систему правил, позволяющих осуществлять дедуктивный вывод новых словесных связей, предназначенных, по предположению, для того, чтобы передавать истины. Однако эти истины не относятся к числу постигаемых непосредственно и даже постигаемых вообще. Логика не является надежным инструментом для открытия истин и не может открыть истины, не получаемые каким-то другим путем. Логические принципы — это закономерности, наблюдаемые апостериори в языке, их можно назвать удобным инструментом для манипулирования языком или считать, что они образуют теорию представлений языка. Логика — это наделенное внутренней структурой словесное построение, и не более того. Самые значительные успехи в математике достигнуты не за счет усовершенствования логической формы, а в результате изменений основной теории. Логика строится на математике, а не математика на логике. Логика обладает гораздо меньшей определенностью, чем наши интуитивные представления, и поэтому математика не нуждается в поддержке со стороны логики. Если посмотреть исторически, то принципы логики сначала были абстрагированы из опыта, накопленного в обращении с конечными множествами, после чего их объявили обладающими априорной справедливостью и в дополнение ко всему распространили на бесконечные множества.

Не признавая никаких априори обязательных логических принципов, Брауэр тем самым отвергал математическую задачу вывода заключений из аксиом. Следовательно, наряду с логицизмом Брауэр отвергал и аксиоматизацию математики, предпринятую в конце XIX в. Математика отнюдь не обязана почтительно относиться к правилам логики. Знание математики не требует знания формальных доказательств, и поэтому парадоксы несущественны, даже если бы мы приняли те математические понятия и построения, которые приводят к парадоксам. Парадоксы являются дефектом логики, а не собственно математики. Следовательно, непротиво-

⁶³ **Яглом:** Интуиционистскую платформу Вейля достаточно выразительно характеризует сборник его более ранних статей [64: Вейль Г. О философии математики. — М.—Л.: Гостехиздат, 1934].

речивость – это своего рода привидение. Она лишена плоти. Непротиворечивость возникает как следствие правильных размышлений, а о правильности размышлений мы судим интуитивно.

Но в логике существуют некоторые ясные, интуитивно приемлемые логические принципы или методы, которые можно использовать для вывода новых теорем из старых. Эти принципы входят составными частями в фундаментальную математическую интуицию. Не все из обычных логических принципов приемлемы для фундаментальной интуиции, и следует критически относиться к тому, что считалось приемлемым со времен Аристотеля. Поскольку математики излишне свободно применяли ограниченные законы Аристотеля, те породили антиномии. Что же допустимого или надежного, спрашивали интуиционисты, в математических построениях, если математики временно предали забвению интуицию и работают лишь со словесной структурой?

Итак, интуиционисты принялись анализировать логические принципы, намереваясь установить, какие из них можно принять, чтобы обычная логика соответствовала и надлежащим образом выражала правильные интуитивные представления. В качестве примера логического принципа, применявшегося излишне свободно, Брауэр привел закон исключенного третьего. Этот принцип, утверждающий, что каждое осмысленное высказывание либо истинно, либо ложно, исторически возник в рассуждениях, проводимых применительно к конечным множествам, и был абстрагирован из них. Затем закон исключенного третьего был принят как независимый и априорный принцип и необоснованно распространен на бесконечные множества. Но если для конечного множества мы можем решить, все ли его элементы обладают некоторым свойством, проверяя один за другим все элементы множества, то для бесконечного множества такая проверка становится невозможной. Может случиться так, что мы заведомо будем знать, что некий элемент бесконечного множества не обладает интересующим нас свойством, или по определению нам будет известно (или мы сумеем это доказать), что каждый элемент множества обладает требуемым свойством. Однако установить с помощью закона исключенного третьего, что каждый элемент множества обладает нужным свойством, нам не удастся никогда, ибо это потребовало бы бесконечного числа проверок.

Так, если доказано, что не все элементы бесконечного множества целых чисел четны, то заключение о существовании (а что означает сам термин «существование») среди них по крайней мере одного нечетного целого числа Брауэр отверг как основанное на применении к бесконечным множествам закона исключенного третьего. Но рассуждения такого типа широко используются в математике для доказательства существования различных сущностей, например для доказательства того, что каждое алгебраическое уравнение имеет корень (гл. IX). Следовательно, многие математические доказательства неприемлемы для интуиционистов. По их утверждениям, такие доказательства слишком неопределенны в отношении тех математических объектов, существование которых они должны доказывать. Закон исключенного третьего может быть использован лишь в тех случаях, когда множество содержит конечное число элементов. Например, если бы мы, рассматривая конечный набор целых чисел, доказали, что они не все четны, то отсюда действительно следовало бы, что по крайней мере одно из чисел нечетно.

Вейль, говоря об интуиционистском взгляде на логику, утверждал:

Согласно его [Брауэра] взглядам и свидетельствам истории, классическая логика была абстрагирована из математики конечных множеств и их подмножеств... Забыв о столь ограниченном происхождении, кто-то впоследствии ошибочно принял логику за нечто, стоящее над математикой и предшествующее всей математике, и, наконец, без всякого на то основания применил логику к математике бесконечных множеств. В этом грехопадение и первородный грех всей теории множеств, за что ее и покарала антиномии. Удивительно не то, что такие противоречия возникли, а то, что они возникли на столь позднем этапе игры.

Несколько позднее Вейль добавил: «Принцип исключенного третьего может быть верным для господ бога, как бы обзирающего единым взглядом бесконечную последовательность натуральных чисел, но не для человеческой логики».

В работе 1923 г. Брауэр привел примеры теорем, которые нельзя считать доказанными, если отрицать применение закона исключенного третьего к бесконечным множествам.⁶⁴ В

⁶⁴ Нам нет необходимости вдаваться в технические детали этих теорем. Мы упоминаем их лишь для того, чтобы привести конкретные примеры. [Отметим также, что отказ интуиционистов от закона исключенного третьего не означал еще полного отказа от какого бы то ни было логического аппарата –

частности, не доказана ни теорема Больцано–Вейерштрасса, утверждающая, что каждое ограниченное бесконечное множество имеет предельную точку, ни теорема о существовании максимума непрерывной функции на замкнутом отрезке. Отвергнутой оказалась и лемма Гейне–Бореля, согласно которой из любого множества отрезков, покрывающих отрезок (взятый вместе с его концами) можно выделить **конечную** подсистему отрезков, также покрывающих этот отрезок. Разумеется, следствия из всех этих теорем интуиционисты также не считают приемлемыми.

Однако интуиционисты не только отказались от неограниченного использования закона исключенного третьего для доказательства существования математических объектов, но и выдвинули еще одно требование. Они сочли неприемлемым задавать множество свойством, присущим всем его элементам (например, множество, задаваемое признаком «красный», присущим всем элементам этого множества). По мнению интуиционистов, математическому рассмотрению подлежат только конструктивные понятия и объекты, только о них имеет смысл утверждать, что они существуют. Иначе говоря, необходимо указывать метод, позволяющий построить объект или объекты за конечное число шагов (или вычислить с любой требуемой степенью точности)⁶⁵. Так, число π , с точки зрения интуиционистов, вполне приемлемо, так как возможно выписать любое число верных знаков его десятичной записи. Если бы нам удалось доказать, что при некотором $n > 2$ существуют целые числа x , y и z , удовлетворяющие уравнению $x^n + y^n = z^n$ (т.е. доказать великую теорему Ферма), но мы не могли бы при этом указать конкретные значения чисел n , x , y и z , то интуиционист не принял бы такого доказательства.⁶⁶ С другой стороны, определение простого числа конструктивно, так как можно указать метод, позволяющий за конечное число шагов установить, является ли то или иное число простым.

Рассмотрим еще один пример. Числами-близнецами называют простые числа вида $l-2$ и l , например 5 и 7, 11 и 13. До сих пор неизвестно, конечно или бесконечно количество пар чисел-близнецов. Пусть теперь l – **наибольшее** простое число, такое, что $l-2$ также простое число, если этому нашему определению отвечает какое-то значение l или же $l=1$, если l , описываемое первым условием, не существует. Классикист сочтет число l вполне определенным независимо от того, известно или не известно, что последняя пара чисел-близнецов существует, так как по закону исключенного третьего такая пара чисел либо имеется, либо нет, – и, значит, l определено либо первым, либо вторым ($l = 1$) способом. То, что реально мы не в состоянии вычислить l , для неинтуиционистов несущественно. Интуиционист же будет считать приведенное выше «определение» числа l лишенным смысла до тех пор, пока число l нельзя будет вычислить, т.е. пока не будет решена проблема конечности или бесконечности числа пар чисел-близнецов. Требование конструктивности относится, в частности, и к определению бесконечных множеств. Бесконечные множества, построенные с помощью аксиомы выбора, неприемлемы с точки зрения интуиционистов. Как показывают приведенные выше примеры, некоторые из доказательств существования неконструктивны. Следовательно, их необходимо отвергнуть не только потому, что в них может использоваться закон исключенного третьего, но и по другой причине.⁶⁷

По выражению Германа Вейля, неконструктивные доказательства существования извещают мир о том, что сокровище существует, не указывая при этом его местонахождение, т.е. не позволяя это сокровище использовать. Такие доказательства не могут заменить построение – подмена конструктивного доказательства неконструктивным влечет утрату смысла и значения

речь шла лишь о пересмотре фундаментальных законов логики, из числа которых отбрасывался закон исключенного третьего (ср. ниже с. 282). – *Прим. ред.*]

⁶⁵ Несколько иначе подходил к понятию «существования» математического объекта Пуанкаре. Для него, как для формалистов (гл. XI), понятие было приемлемым, если оно не приводило к противоречиям.

⁶⁶ **Яглом:** В настоящей, не рассчитанной на математиков, книге автор иногда позволяет себе пренебречь точностью ради большей выразительности. В частности, приведенный в книге пример «истинные интуиционисты», пожалуй, и не приняли бы [менее яркий, но более корректный пример: *задача об отыскании максимума функции переменных*]. Дело в том, что множество всевозможных четверок (x, y, z, n) целых (или натуральных) чисел счетно, т.е. его можно упорядочить наподобие ряда натуральных чисел (где $n > 2$). Поэтому доказательство существования решения уравнения Ферма одновременно устанавливает, что решение может быть найдено в процессе конечного (хоть и неопределенно длинного – это неважно!) перебора четверок (x, y, z, n) и проверки выполнимости равенства $x^n + y^n = z^n$ для каждой из них, а такой конечный перебор, разумеется, является вполне эффективной процедурой. **В.Э.:** Это-то разумеется, но Яглом, по-моему, не понял мысли Клайна: ЕСЛИ БЫ это доказательство не давало эффективной процедуры, ТО интуиционисты не признали бы его...

⁶⁷ **В.Э.:** Здесь Яглом повторяет ссылку на свое предыдущее примечание.

самого понятия «доказательство». Вейль указал, что приверженцы философии интуиционизма вынуждены отказаться от наиболее важных теорем существования классического анализа. Канторовскую иерархию трансфинитных чисел Вейль считал очень запутанной. Классический анализ, писал Вейль в книге «Континуум» (1918), – это дом, построенный на песке. Уверенным можно быть только в том, что доказано интуиционистскими методами.

Отрицание закона исключенного третьего приводит к возможности появления новых типов неразрешимых высказываний. В бесконечных множествах, как утверждают интуиционисты, возможна третья ситуация: могут существовать высказывания, которые нельзя ни доказать, ни опровергнуть. Интуиционисты приводили пример такого высказывания. Пусть, по определению, число k характеризуется условием, согласно которому k -е положение в десятичном разложении числа π занимает первый нуль, такой, что за ним по порядку следуют цифры от 1 до 9. По логике Аристотеля, k либо существует, либо не существует, и математики, следуя Аристотелю, исходили в своих рассуждениях лишь из этих двух возможностей. Брауэр и интуиционисты отвергли все рассуждения подобного типа на том основании, что неизвестно, удастся ли нам вообще когда-либо доказать, существует ли число k или не существует. Иначе говоря, по мнению интуиционистов, существуют вполне осмысленные и важные математические проблемы, которые могут оказаться неразрешимыми, какое бы обоснование мы ни подвели под математику⁶⁸; эти вопросы могут казаться нам разрешимыми только потому, что они касаются понятий и проблем, сходных с теми, которые нам уже приходилось решать в прошлом.

С точки зрения интуиционистов неприемлемы классическое и логическое (аксиоматическое) построения системы вещественных чисел, математический анализ, современная теория функций вещественного переменного, интеграл Лебега и многие другие понятия и теории. Брауэр и его сторонники не ограничивались критикой и пытались построить математику на конструктивной основе. Им удалось спасти некоторые разделы перечисленных выше теорий, но конструктивные варианты отличались такой сложностью, что даже разделявший философию интуиционизма Вейль сетовал по поводу невыносимой громоздкости конструктивных доказательств. Среди прочего интуиционистам удалось перестроить на конструктивной основе элементарные разделы алгебры и геометрии.

Тем не менее перестройка происходила чрезвычайно медленно. И в 1927 г. в статье «Обоснования математики» ([50]⁶⁹, с. 365–388; ср. также [50], с. 389–399) Гильберт с полным правом заявил: «Какое значение имеют жалкие остатки, немногочисленные, неполные, не связанные друг с другом единичные результаты, которые были выработаны интуиционистами по сравнению с могущественным размахом современной математики!» ([50], с. 383). Разумеется, в 1927 г. интуиционистам, по их же собственным меркам, не удалось продвинуться сколько-нибудь далеко в осуществлении своей программы перестройки классической математики. К сожалению, интуиционисты, как и логицисты, не смогли прийти к единому мнению относительно того, на какой основе производить эту перестройку. Одни считали необходимым исключить все общие теоретико-множественные понятия и ограничиться лишь теми понятиями, которые допускают эффективное определение или построение. Менее экстремистскую позицию занимали конструктивисты, не ставившие под сомнение классическую логику, а стремившиеся как можно полнее использовать ее.⁷⁰ Некоторые выделяли определенный класс математических объектов, а затем вводили конструктивные методы. Немало было и тех, кто допускал по крайней мере тот или иной класс вещественных чисел (не охватывавший весь континуум вещественных чисел). Другие допускали лишь целые числа, а из остальных чисел и функций признавали лишь вычислимые. При этом различные группы понимали вычислимость по-разному. Например, число считалось вычислимым, если к нему можно было приближаться со всё возрастающей точностью

⁶⁸ **Яглом:** Ср. с обсуждением в гл. XII современного положения с канторовской проблемой континуума.

⁶⁹ Гильберт Д. Основания геометрии. – М.–Л.: Гостехиздат, 1948.

⁷⁰ **Яглом:** Дальнейшее развитие идей интуиционизма привело к созданию так называемого *конструкционизма* (или даже нескольких различных конструктивистских школ), признававшего только те математические объекты, которые допускают прямое построение; в частности, большое развитие получала ленинградская (а позднее московская) конструктивистская группа, возглавляемая А.А. Марковым-мл. (1903–1980); по этому поводу см. [65: Марков А.А. О логике конструктивной математики. – М.: Знание, 1974] и [66: Тростников В.Н. Конструктивные процессы в математике. – М.: Наука, 1975], а также примечания А.А. Маркова к русскому переводу книги [67: Гейтинг А. Интуиционизм (введение). – М.: Мир, 1965].

(эффективно определяя точность приближения!), используя допустимые числа из некоторого множества, по аналогии с тем, как к обычным иррациональным числам можно всё более точно приближаться с помощью конечных десятичных дробей.

К сожалению, понятие «конструктивность» отнюдь не является ни четким, ни однозначным. Рассмотрим число N , определенное следующим образом:

$$N = 1 + \frac{(-1)^p}{10^p}.$$

На время положим $p = 3$. Тогда $N = 1 - 0,001 = 0,999$. С другой стороны, если $p = 2$, то $N = 1,01$. Пусть теперь p – первый знак в десятичном разложении числа π , следующий после группы цифр 123456789, идущих друг за другом именно в этом порядке; если же такое p вообще не существует, то положим, что N , по определению, равно 1. Если число p существует и четно, то $N = 1,000\dots$ (на p -м месте после запятой стоит 1). Если число p нечетно, то $N = 0,999\dots$ (p девяток после запятой). Однако мы не знаем, существует ли определенное выше число p . Если оно не существует, то $N = 1$. Если же p существует, но не встречается, например, среди первой тысячи знаков десятичного разложения числа π , то мы не можем даже начать выписывать N . Тем не менее N определено, и его даже можно записать с **любой** степенью точности. Но разве определение N конструктивно?

Разумеется, доказательства существования, использующие аксиому выбора или гипотезу континуума, не конструктивны; они неприемлемы не только для интуиционистов, но и для многих математиков, не разделяющих идей интуиционистов.

Хотя разные группы интуиционистов и конструктивистов в чем-то расходились между собой, им все же удалось перестроить значительную часть классической математики. Некоторые из перестроенных на конструктивной основе теорем оказались более узкими, чем их неконструктивные прототипы. Когда интуиционистам указывали на это, они отвечали, что классический анализ при всей своей несомненной полезности по математической истинности уступает конструктивному анализу. Резюмируя, можно сказать, что конструктивистам удалось добиться лишь весьма ограниченных успехов и что перспективы распространить конструктивистский подход на всю современную математику нельзя считать обнадеживающими. Имея в виду медленный прогресс конструктивистского направления, математики из школы Бурбаки, о которой у нас пойдет речь в дальнейшем, заметили: «Интуиционистская школа, о которой математики вспоминают как о своего рода историческом курьезе, во всяком случае, оказала услугу математике тем, что заставила своих противников, т.е. подавляющее большинство математиков, яснее осознать причины (одни – логического порядка, другие – психологического) их веры в математику» ([68]⁷¹, с. 53)⁷². Критики интуиционизма вполне могли бы процитировать четверостишие Сэмюэля Хоффенштейна:

Мало-помалу всё станет гладко,
Коль все ошибки изымем из факта,
Иллюзий плевелы – из истины золота,
Но разум погибнет от лютого голода.

Чтобы гарантировать надежность оснований математики, интуиционисты готовы даже пожертвовать какими-то разделами классической математики и не считают слишком высокой ценой отказ от «рая» канторовской теории трансфинитных чисел.

Хотя противники интуиционизма иногда излишне бесцеремонно и догматически требовали отказа от интуиционистской философии, критические замечания в адрес интуиционизма высказывали и сочувствующие ему люди – и к этим замечаниям нельзя не отнестись серьезно. В частности, одно из критических замечаний состояло в том, что теоремы, которые интуиционисты столь лихорадочно стремились перестроить в соответствии со своими принципами, не были подсказаны интуицией и вряд ли подкреплялись ею. Открытию этих теорем в равной мере способствовали все известные математические методы, всевозможные рассуждения, догадки, обобщения частных случаев и внезапные, не поддающиеся рациональному объяснению озарения. Следовательно, на практике интуиционисты не менее других зависят от обычных методов,

⁷¹ Бурбаки Н. Очерки по истории математики. – М.: ИЛ, 1963.

⁷² **Яглом:** Критику интуиционизма главой советской конструктивистской школы математиков А.А. Марковым см. на с. 5 книги [67: Гейтинг А. Интуиционизм (введение). – М.: Мир, 1965].

принятых в математике, и даже от классической логики, хотя и пытаются реконструировать доказательства в соответствии со своими принципами. В ответ на подобное замечание интуиционисты могли бы возразить, что когда новые результаты устанавливаются традиционными методами, сами результаты вполне могут оказаться интуитивно приемлемыми. Не отрицая важности других утверждений интуиционизма, нельзя не отметить, что многие теоремы, даже приемлемые для интуиционистов, содержат столь тонкие и далекие от интуиции утверждения, что трудно представить, как может человеческий разум непосредственно воспринимать их истинность.

Тезис о важной роли обычных приемов математического творчества, а также идеализации и абстракции выдвинули Феликс Клейн и Мориц Паш. Разве интуиция могла бы открыть непрерывную (нигде не дифференцируемую) функцию⁷³ или кривую, покрывающую квадрат (кривую Пеано)? Такого рода «патологические» математические объекты, даже если их существование подсказано интуицией, подлежат «очищению», которое производится путем идеализации и абстракции. По выражению Клейна, примитивная интуиция не точна, а утонченная интуиция вообще не является интуицией, а возникает в результате логического вывода из аксиом. В ответ на требование полагаться на надежность логического вывода из аксиом Брауэр возразил, что непротиворечивость системы аксиом доказывается с помощью интерпретаций или моделей (гл. VIII), относительно которых должно быть известно, что они непротиворечивы. Всегда ли мы, справедливо заметил Брауэр, располагаем такими моделями, и не полагаемся ли мы на интуицию, объявляя их непротиворечивыми?

Вейль также оспаривал утверждение о том, что традиционные способы построения новых математических объектов и доказательства якобы обладают большей силой по сравнению с конструктивными. В книге «Разум и природа» (1934) он писал: «Приятно утешать себя надеждой, что сознанию откроются истины более глубокие по своей природе, чем те, которые доступны непосредственно интуиции».

Некоторые из противников интуиционизма, вполне признавая, что математика – это творение человека, тем не менее считали, что правильность или неправильность может быть установлена объективно, тогда как интуиционисты ставили решение этих вопросов в зависимость от человеческого разума, склонного заблуждаться. В этом, как писали Гильберт и Пауль Бернайс (1888–1978) в первом издании своего труда [75]⁷⁴ по основаниям математики, мы усматриваем легко уязвимое место интуиционистской философии. На какие понятия и рассуждения мы можем положиться, если правильность понимается как очевидность для человеческого разума? Где же истина, объективно существующая для всех людей?

Другое критическое замечание в адрес интуиционизма состояло в том, что он совсем не касается вопросов о приложимости математики к исследованию природы. Интуиционизм не связывает математику с восприятием. Брауэр признавал, что интуиционистская математика бесполезна для практических приложений. Более того, Брауэр отрицал господство человека над природой. Несмотря на всевозможные критические замечания в адрес интуиционизма, Вейль заявил в 1951 г.: «Думаю, что всякому, кто хотел бы по-прежнему верить в истинность математических утверждений, в истинность, основанную на опыте, придется принять критику, которой подверг основания математики Брауэр».

Доктрины интуиционизма затронули и еще один вопрос, тесно связанный с их основными установками. Как мы уже знаем, интуиционисты утверждали, что здравые и приемлемые идеи могут восприниматься и воспринимаются человеческим разумом. Эти идеи не рождаются в словесной форме. Язык не более чем несовершенное устройство для передачи идей. Вопрос, породивший долгие споры и обсуждения, состоял в следующем: могут ли мысли существовать в бессловесной форме? С одной стороны, в Евангелии от Иоанна говорится: «В начале было Слово». Хотя св. Иоанн, разумеется, не имел в виду математику, процитированное высказывание

⁷³ **Яглом:** Не останавливаясь подробно, упомянем лишь о методологических установках яркой и пользующейся известностью книги Б. Мандельброта [69: Mandelbrot B. The Fractal Geometry of Nature. – San Francisco: Freeman, 1982], которые кратко (и не совсем точно) можно охарактеризовать как утверждение о том, что в реальном мире мы чаще всего встречаемся именно с нигде не дифференцируемыми («изломанными») функциями, а «гладкие» функции представляют собой не более чем идеализированное описание негладких.

⁷⁴ Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. Т. I. Логические исчисления и формализация арифметики; т. II. Теория доказательств. – М.: Наука, 1979, 1982.

согласуется с позицией древнегреческих философов и взглядами некоторых современных психологов. С другой стороны, епископ Беркли считал, что слова – это помеха для мышления.

Эйлер затронул эту проблему в «Письмах к немецкой принцессе» (1768–1772; адресатом писем была принцесса Ангальт-Дессау, племянница Фридриха Великого):

Какой бы склонностью ни обладал человек к тренировке своей способности к абстракции и к выработке общих идей, он не сможет преуспеть в этом без помощи языка, устного или письменного. И тот, и другой содержат множество различных слов, представляющих собой не что иное, как знаки, соответствующие нашим идеям. Значение словам придается обычаем или молчаливым соглашением нескольких людей, живущих вместе.

Следовательно, единственное назначение языка состоит в том, чтобы люди могли сообщить друг другу о своих чувствах. Одиноким человеком мог бы вполне обойтись и без языка. Стоит немного подумать, как станет ясно, что язык нужен людям, чтобы они могли следить за своими мыслями и развивать их, а также общаться друг с другом.

В книге «Исследование психологии процесса изобретения в области математики» (1945) Жак Адамар занялся изучением вопроса о том, как мыслит математик, и обнаружил, что в процессе творчества почти все математики избегают пользоваться языком. Они мыслят смутными образами, визуальными или тактильными. Именно о таком характере мышления говорится в письме Эйнштейна к Адамару, приведенном в названной книге:

Слова, написанные или произнесенные, не играют, видимо, ни малейшей роли в механике моего мышления. Психологическими элементами мышления являются некоторые более или менее ясные знаки или образы, которые могут быть «по желанию» воспроизведены и скомбинированы.

...Элементы, о которых я только что упомянул, бывают у меня обычно визуального или изредка двигательного типа. Слова или другие условные знаки приходится подыскивать (с трудом) только на вторичной стадии... ([70]⁷⁵, с. 80.)

Разумеется, визуализация играет главную роль в творческом акте. Образ бесконечных прямых, делящих евклидову плоскость на две части, берет начало из визуализации. Вопрос сводится к следующему: «верит» ли разум фактам (независимо от того, каким образом они получены) настолько, что, как утверждают интуиционисты, необходимость в точной словесной формулировке и логическом доказательстве отпадает?

В 1930 г. Аренд Рейтинг (р. 1898), наиболее выдающийся представитель интуиционизма после Брауэра, опубликовал работу с изложением формальных правил интуиционистской логики высказываний⁷⁶; это явилось своего рода символическим выражением намерения наладить отношения с формальными логиками. Логика высказываний охватывала лишь часть классической формальной логики. Например, в логике Рейтинга из истинности высказывания p следует: неверно, что p ложно. Но из утверждения «неверно, что p ложно» еще не следует, что p истинно, так как высказывание p может оказаться неконструктивным. Закон исключенного третьего (утверждение « p или не p всегда истинно») в логике Рейтинга не используется. Но если из высказывания p следует высказывание q , то из отрицания q следует, что p ложно. Сами интуиционисты не придали особого значения предпринятой Рейтингом попытке формализации логики. Она не позволяла полностью представить идеи. Кроме того, формализация Рейтинга не была единственной⁷⁷: среди интуиционистов не существовало единого мнения по поводу того, какие логические принципы считать приемлемыми.

Несмотря на ограничения, наложенные интуиционистами на математику, и на критику интуиционистской философии представителями других направлений, в целом интуиционизм пошел математике на пользу. Он выдвинул на первый план вопрос «Что означает в математике существование?», впервые серьезно обсуждавшийся в связи с аксиомой выбора. Перефразируя Вейля, можно сказать; много ли проку от того, что мы знаем о существовании числа,

⁷⁵ Адамар Ж. Исследование психологии процесса изобретения в области математики. – М.: Советское радио, 1970.

⁷⁶ **Яглом:** В разработке интуиционистской логики приняли участие также московские математики В.И. Главенко (1897–1940; работы 1928–1929) и особенно А.Н. Колмогоров (р. 1903; работы 1925, 1932). Ср. также [71: Драгалин А.Г. Математический интуиционизм (введение в теорию доказательств). – М.: Наука, 1979].

⁷⁷ **В.Э.:** Здесь Яглом еще раз ссылается на предыдущее свое примечание.

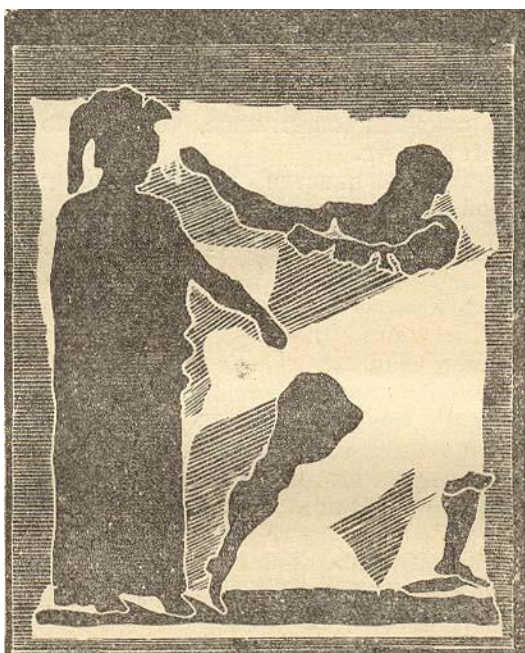
обладающего теми или иными свойствами, если у нас нет возможности реализовать или вычислить его? Неограниченное» наивное использование закона исключенного третьего явно нуждается в пересмотре. Особенно важно, по-видимому, то, что интуиционизм отстаивал неприменимую вычислимость чисел и функций, существование которых доказано лишь тем, что предположение об их несуществовании приводит к противоречию. Узнать эти числа непосредственно – это то же самое, что жить рядом с другом, но это означает совсем иное, чем просто знать, что где-то в мире у тебя есть друг.

Противоборство логицистов и интуиционистов было лишь первой схваткой в разгоравшейся битве за обоснование математики. В борьбу вступали всё новые участники, о которых речь еще впереди.

XI. Формализм и теоретико-множественные основания математики

Какое значение могут иметь жалкие остатки, немногочисленные, неполные, не связанные друг с другом единичные результаты, которые были выработаны интуиционистами, по сравнению с могущественным размахом современной математики!⁷⁸

Давид Гильберт



Логицизм и интуиционизм – два направления, возникшие в первые годы XX в. и придерживавшиеся диаметрально противоположных взглядов на основания математики, – были лишь первыми признаками надвигающейся бури. Третье направление – формализм – сформировал и возглавил Давид Гильберт. Родоначальником четвертого (теоретико-множественного) направления в основаниях математики стал Эрнст Цермело.

В своем докладе [51]⁷⁹ на II Международном математическом конгрессе, проходившем в 1900 г. в Париже (гл. VIII), Гильберт подчеркнул важность доказательства непротиворечивости математики. Он указал также, что желательно получить прямое доказательство полной упорядоченности вещественных чисел. Но из работ Цермело мы знаем, что полное упорядочение эквивалентно аксиоме выбора. Гильберт обратил также внимание математиков на необходимость доказательства гипотезы континуума, согласно которой не существует (количественного)

трансфинитного числа, большего $\aleph_0$ и меньшего c . Еще до того, как обрели известность парадоксы теории множеств, доставившие немало хлопот математикам, и возникла дискуссия по поводу аксиомы выбора, Гильберт предвидел насущную необходимость решения всех этих проблем.

Суть своего подхода к основаниям математики, в том числе и к доказательству ее непротиворечивости, Гильберт изложил в 1904 г. в докладе на III Международном конгрессе математиков в Гейдельберге. Тогда он еще не имел серьезных работ, реализующих намеченную им программу. В последующие 15 лет логицисты и интуиционисты развили бурную деятельность в направлении, указанном этим докладом; однако Гильберт, мягко говоря, не был удовлетворен предложенными ими решениями проблем, потрясающих сами основания математики.

С логицизмом Гильберт раздался довольно спокойно. Его главное возражение против логицизма в докладе на конгрессе и в работе, опубликованной в том же 1904 г., сводилось к тому, что в ходе длительного и сложного развития логики целые числа оказались, хотя и неявно, вовлеченными в присущую ей систему понятий. Следовательно, занимаясь построением понятия числа, логика в действительности ходит по замкнутому кругу. Критиковал Гильберт и задание множеств по их свойствам: при таком определении множеств возникала необходимость различать высказывания и пропозициональные функции по типам, а теория типов требовала принятия сомнительной аксиомы сводимости. Гильберт разделял мнение Рассела и Уайтхеда о необходимости включения в математику бесконечных множеств. Но для этого потребовалась бы аксиома бесконечности, а Гильберт вместе с другими не считал ее аксиомой логики.

⁷⁸ Гильберт Д. Основания математики. – В кн.: Основания геометрии. – М.–Л.: Гостехиздат, 1948, с. 383.

⁷⁹ Проблемы Гильберта. – М.: Наука, 1969.

С другой стороны, философия интуиционизма также не устраивала Гильберта, поскольку интуиционисты отвергали не только бесконечные множества, но и обширные разделы анализа, опирающиеся на чистые теоремы существования, и он яростно нападал на интуиционизм. В 1922 г. он обвинил интуиционистов в том, что они «стремятся разрушить и изуродовать математику». В статье 1927 г. он выразил свой протест против интуиционизма следующим образом: «Отнять у математиков закон исключенного третьего – это то же самое, что забрать у астрономов телескоп или запретить боксерам пользование кулаками. Запрещение теорем существования и закона исключенного третьего почти равносильно полному отказу от математической науки» ([50]⁸⁰, с. 383).

По поводу отношения Гильберта к интуиционизму Вейль сказал в 1927 г.: «То, что с этой [интуиционистской] точки зрения надежна лишь часть классической математики, причем далеко не самая лучшая, – горький, но неизбежный вывод. Гильберту была невыносима мысль об этой ране, нанесенной математике».

И логицизм, и интуиционизм Гильберт обвинял в том, что они не смогли доказать непротиворечивость математики. В работе 1927 г. Гильберт торжественно заявил:

Математика есть наука, в которой отсутствует гипотеза. Для ее обоснования я не нуждаюсь ни, как Кронекер, в господе боге, ни, как Пуанкаре [который считал, что доказать непротиворечивость системы, использующей математическую индукцию, невозможно], в предположении об особой, построенной на принципе полной индукции способности нашего разума, ни, как Брауэр, в первоначальной интуиции, наконец, ни, как Рассел и Уайтхед, в аксиомах бесконечности, редукции [сводимости] или полноты, которые являются подлинными гипотезами содержательного характера и, сверх того, вовсе не правдоподобными. ([50]⁸¹, с. 383.)

В 20-е годы XX в. Гильберт сформулировал свой собственный подход к обоснованию математики и до конца жизни работал над ним. Среди работ, опубликованных Гильбертом в 20-е годы и в начале 30-х годов, особое место по богатству идей занимает работа «О бесконечности» ([44*]⁸², 1925), где он формулирует замысел своей теории: «Эта теория ставит своей целью установить определенную надежность математического метода» ([50]⁸³, с. 340).

Первый из тезисов Гильберта состоял в том, что, поскольку логика, развиваясь, непременно включает в себя математические идеи и поскольку для сохранения классической математики нам неизбежно приходится привлекать внелогические аксиомы типа аксиомы бесконечности, правильный подход к математике должен включать понятия и аксиомы не только логики, но и математики. Кроме того, логика должна чем-то оперировать, и это «что-то» состоит из внелогических конкретных понятий (таких, как понятие числа), воспринимаемых интуитивно еще до того, как мы начинаем рассуждать логически.

Принятые Гильбертом логические аксиомы несущественно отличаются от аксиом Рассела, хотя Гильберт ввел больше аксиом, поскольку его не интересовало построение наиболее экономной системы аксиом логики. Но так как, согласно Гильберту, математика невыводима из логики (математика не следствие логики, а автономная научная дисциплина), то аксиоматика как логики, так и математики должна включать математические и логические аксиомы. Гильберт считал также, что математику надежнее всего рассматривать не как фактическое знание, а как формальную, т.е. абстрактную, дисциплину, занимающуюся преобразованием символов безотносительно к их значению (хотя неформально значение символов и их отношение к реальности также учитываются). Доказательства теорем должны сводиться к преобразованиям символов, производимым по определенным правилам логического вывода.

Чтобы избежать неоднозначности языка и бессознательного использования интуитивных представлений, приводящих к одним парадоксам, исключить другие парадоксы и достичь строгости доказательств и объективности, Гильберт счел необходимым записать все утверждения логики и математики в символической форме. Хотя символы и могли иметь некоторое интуитивно воспринимаемое значение, в предложенной Гильбертом трактовке математики они

⁸⁰ Гильберт Д. Основания геометрии. – М.–Л.: Гостехиздат, 1948.

⁸¹ Гильберт Д. Основания геометрии. – М.–Л.: Гостехиздат, 1948.

⁸² Hilbert D. Über das Unendliche – Mathematische Annalen, 1925, 95, 161–190; англ. переводы On the Infinite в кн. [4], р. 131–151 и в кн. [40], с. 367–392, [Русский перевод сокращенного варианта статьи: Гильберт Д. О бесконечном. В кн.: Гильберт. Основания геометрии. – М.–Л.: Гостехиздат, 1948, 338–364.]

⁸³ Гильберт Д. Основания геометрии. – М.–Л.: Гостехиздат, 1948.

не нуждались в интерпретации. Некоторые символы могли даже означать бесконечные множества, поскольку Гильберт намеревался включить их в свою теорию, но в таком случае они оказались бы лишёнными интуитивного образа. Такие «идеальные элементы», как их называл Гильберт, необходимы для построения всей математики; поэтому их введение обоснованно, хотя сам Гильберт считал, что в реальном мире существует лишь конечное число объектов: материя состоит из конечного числа элементов.

Суть рассуждений Гильберта можно понять, если воспользоваться следующей аналогией. Иррациональное число лишено интуитивного смысла. Хотя мы можем построить отрезки, длины которых выражаются иррациональными числами, эти длины сами по себе еще не создают никакого интуитивного представления об иррациональных числах. Тем не менее иррациональные числа как идеальные элементы с необходимостью входят даже в элементарную математику. Именно поэтому математики и шли на использование иррациональных чисел, хотя те до 70-х годов XIX в. не имели логического обоснования. Гильберт занял аналогичную позицию в отношении комплексных чисел, т.е. чисел, содержащих выражение $\sqrt{-1}$. Комплексные числа не имеют прямых аналогов среди вещественных чисел, тем не менее они позволяют сформулировать некоторые общие теоремы, например теорему о том, что каждое алгебраическое уравнение n -й степени имеет ровно n корней, и делают возможной теорию функций комплексного переменного, оказавшуюся необычайно полезной даже в физических исследованиях. Независимо от того, означают ли символы объекты, имеющие интуитивный смысл или лишённые его, все знаки и символы понятий и операций рассматриваются как чисто формальные элементы той системы, которую мы строим. По мнению Гильберта, при обосновании математики элементами математического мышления следует считать символы и высказывания, т.е. комбинации (или строки) символов. Формалисты надеялись «купить» определенность за подходящую цену, и этой ценой было манипулирование символами, лишёнными всякого смысла.

К счастью, символика логики была разработана в конце XIX – начале XX вв. (гл. VIII), поэтому у Гильберта с самого начала было под рукой всё необходимое. В частности, он располагал такими символами, как $\sim$ (не), $\cdot$ (и), $\vee$ (или), $\Rightarrow$ (следует), $\exists$ (существует). Все они были первичными, или неопределяемыми, понятиями. Что же касается самой математики, то для нее символические обозначения были разработаны давно.

По замыслу Гильберта из выбранных им аксиом логики должны были следовать все законы логики Аристотеля. Применимость этих аксиом вряд ли вызывала у кого-нибудь сомнения. Например, если X , Y и Z – высказывания, то одна из аксиом Гильберта гласит: «Если X , то $X \vee Y$ » (иными словами, «Если истинно X , то истинно также X или Y »). Другая аксиома сводится к неформальному утверждению о том, что если из X следует Y , то из « Z или X » следует « Z или Y ». Особое место в логике Гильберта занимает схема заключения. На неформальном уровне она утверждает, что если формула A верна и если из формулы A следует формула B , то формула B верна. В аристотелевой логике этот закон называется *modus ponens* (модус поненс). Гильберт не хотел также отказываться от закона исключенного третьего и с помощью специального приема записал в символическом виде и этот закон. Тот же прием позволил формализовать и аксиому выбора, которая, несомненно, принадлежит к числу математических аксиом. Подобный прием позволял избегать явного употребления слова «все» – Гильберт надеялся, что это поможет ему обойти все парадоксы.

В любой области математики, имеющей дело с числами, существуют (в соответствии с программой Гильберта) аксиомы арифметики. Например, существует аксиома «из $a = b$ следует $a' = b'$ », утверждающая, что если два целых числа a и b равны, то числа, непосредственно следующие за ними (интуитивно – ближайшие большие a , соответственно b , целые числа), также равны. В аксиомы арифметики входит и аксиома математической индукции (ср. [72]⁸⁴). Как правило, аксиомы имеют отношение к нашему опыту, связанному с наблюдением явлений природы, или к миру уже существующих математических знаний.

Формальная система, представляющая теорию множеств, должна содержать (записанные в виде комбинаций символов) аксиомы, которые указывают, какие множества допустимо образовывать. Например, подобные аксиомы могут допускать составление множества, являющегося объединением двух множеств, и множества всех подмножеств данного множества.

Записав все математические и логические аксиомы в виде символических формул, Гильберт подготовил всё необходимое для ответа на главный вопрос: что следует понимать под

⁸⁴ Генкин Л. О математической индукции. – М.: Физматгиз, 1962.

объективным доказательством? По Гильберту, строгое доказательство складывается из трех этапов: 1) предъявление некоторой формулы; 2) утверждение, что из предъявленной формулы следует другая формула, и 3) предъявление второй формулы. Последовательность из этих трех этапов, в которой вторая предъявляемая формула является следствием из принятых ранее аксиом или ранее выведенных заключений, и является доказательством теоремы. Допустимой операцией считается также подстановка одного символа или группы символов вместо другого символа или группы символов. По Гильберту, вывод формулы сводится к применению логических аксиом для манипуляции с символами ранее выведенных формул или аксиом.

Формула истинна в том и только том случае, если ее можно получить как последнее звено последовательности формул, каждый член которой либо представляет собой аксиому формальной системы, либо выведен с помощью одного из правил вывода. При желании можно проверить, является ли данная формула заключительным звеном соответствующей цепочки дедуктивных выводов, поскольку доказательство по существу представляет собой механическое преобразование символов. Мы видим, что, с точки зрения формалиста, доказательство и строгость – понятия вполне определенные и объективные.

Собственно математику формалист рассматривает как набор формальных систем, каждая из которых имеет свою логику, обладает своими собственными понятиями, своими аксиомами, своими правилами дедуктивного вывода и своими теоремами. Развитие каждой из этих формальных систем и составляет задачу математики.

Такова была предложенная Гильбертом программа построения собственно математики. Но свободны ли от противоречий выводимые из аксиом заключения? Поскольку предыдущие доказательства непротиворечивости основных областей математики проводились в предположении, что арифметика непротиворечива (более того, как показал сам Гильберт, непротиворечивость евклидовой геометрии сводится к непротиворечивости арифметики), вопрос о непротиворечивости последней приобрел решающее значение. По словам Гильберта, «в геометрии и физической теории доказательство непротиворечивости достигается путем сведения к непротиворечивости арифметики. Подобный метод явно непригоден для доказательства непротиворечивости самой арифметики». Гильберта волновал вопрос абсолютной, а не относительной непротиворечивости. На этой проблеме он сосредоточил свои усилия, утверждая, что нельзя подвергать себя риску столкнуться в будущем с неприятными сюрпризами, подобными тем, которые возникли в математике начала XX в.

Непротиворечивость «не видна снаружи». Невозможно предвидеть все следствия из аксиом. Но Гильберт, как и почти все математики, занимавшиеся проблемами оснований математики, использовал понятие материальной импликации (гл. VIII), в которой из ложного высказывания следует что угодно. Если в системе существует противоречие, то по закону противоречия одно из каких-то двух высказываний должно быть ложным, а если существует ложное высказывание, то из него следует, что $1=0$. Следовательно, для доказательства непротиворечивости необходимо лишь убедиться в том, что мы нигде не приходим к утверждению $1=0$. Тогда, заметил Гильберт в работе 1925 г., «то, что мы пережили дважды – сначала с парадоксами дифференциального исчисления, а затем с парадоксами теории множеств – не произойдет в третий раз и не повторится никогда».

В серии работ, выполненных в период 1920–1930 гг., Гильберт и его ученики Вильгельм Аккерман (1896–1962), Пауль Бернайс (1888–1978) и Джон фон Нейман (1903–1957), постепенно создали метод, получивший название гильбертовской *Beweistheorie* [теории доказательства] или метаматематики, – метод доказательства непротиворечивости любой формальной системы (ср. [73]⁸⁵, [74]⁸⁶). Суть основной идеи метаматематики можно пояснить с помощью следующей аналогии. Допустим, вы захотели бы изучить выразительные возможности японского языка и решили бы проводить этот анализ на японском языке – тогда ваши результаты оказались бы в значительной мере ограничены возможностями самого японского языка. Но если считать, что английский язык выразителен, то при изучении возможностей японского языка целесообразно было бы воспользоваться английским.

В метаматематике Гильберт предложил использовать особую логику, которая не вызывала бы никаких возражений. Истинность ее законов должна быть настолько очевидной, что всякий мог бы принять их без тени сомнения. По существу эти идеи Гильберта были весьма близки

⁸⁵ Клини С.К. Введение в математику. – М.: ИЛ, 1957.

⁸⁶ Расава В., Сикорский Р. Математика метаматематики. – М.: Наука, 1972.

принципам интуиционизма. Все спорные моменты – доказательство существования от противного, трансфинитная индукция, актуально бесконечные множества, непредикативные определения – старательно изгонялись. Доказательства существования должны были быть конструктивными. Поскольку формальная система может продолжаться неограниченно, метаматематика не могла обойти вниманием понятия и проблемы, по крайней мере относящиеся к потенциально бесконечным системам. Но ссылки на бесконечное число структурных свойств формулы или использование бесконечного числа производимых над формулами операций объявлялись недопустимыми. Рассматривать формулы, в которые входят символы, означающие актуально бесконечные множества, не запрещалось, но сами множества могли входить лишь как символы в формулах. Математическая индукция по натуральным (положительным целым) числам считалась допустимой, поскольку она доказывает утверждение для **любого конечного n** ; однако не следовало понимать этот метод так, будто он позволяет доказывать утверждение сразу для всего **бесконечного множества** натуральных чисел.

Понятия и методы метаматематического доказательства Гильберт назвал **финитными**. Строгого определения этого термина дано не было. В работе 1925 г. смысл финитности Гильберт пояснил на следующем примере. Высказывание «Если p – простое число, то существует простое число, которое больше p » не финитно, так как представляет собой утверждение о всех целых числах, которые больше p . Высказывание же «Если p – простое число, то существует простое число, которое больше p и меньше $p! + 1$ (p -факториал плюс единица)» финитно, так как при любом простом p нам необходимо лишь убедиться, существует ли простое число среди **конечного**⁸⁷ множества чисел, заключенных между p и $p!+1$.

В книге, написанной вместе с Бернайсом и опубликованной в 1934 г., Гильберт описывает финитность следующим образом:

...Мы будем говорить о финитных понятиях и утверждениях, подчеркивая всюду словом «финитный», что рассматриваемое рассуждение, утверждение или определение придерживаются рамок принципиальной представимости объектов и принципиальной выполнимости операций, а тем самым происходят в рамках конкретного рассмотрения. ([75]⁸⁸, т. I, с. 59.)

В тех случаях, когда это не могло привести к недоразумениям, формалисты использовали язык и некоторые обозначения интуитивной, или неформальной, математики.

Выступая с докладом о своей метаматематической программе на Международном математическом конгрессе 1928 г., Гильберт с уверенностью заявил: «Не сомневаюсь, что наш новый подход к основаниям математики, который можно было бы назвать теорией доказательства, позволит навсегда покончить со всеми проблемами обоснования математики». В частности, Гильберт выражал надежду на то, что ему удастся доказать непротиворечивость математики и решить проблему полноты. Иначе говоря, все высказывания, имеющие смысл, будут либо доказаны, либо опровергнуты. Не останется ни одного неразрешимого утверждения.

Как и следовало ожидать, формалистская программа вызвала критику со стороны представителей соперничающих направлений. Во втором издании «Принципов математики» (1937) Рассел заметил, что используемые формалистами аксиомы арифметики не задают однозначно значения символов 0, 1, 2, ...; с тем же успехом счет можно было бы начать и с того, что мы интуитивно понимаем под числами 100, 101, 102, ... Поэтому утверждение «Апостолов было 12» с точки зрения формализма лишено смысла. «Формалисты напоминают часовщика, который настолько озабочен тем, как выглядят выпускаемые им часы, что забыл об их прямом назначении – измерять время – и не вставил в корпус механизм». Логицистское определение числа вкладывает смысл в связь этого понятия с реальным миром; формалистская теория лишает такую связь всякого смысла.

⁸⁷ **Яглом:** Здесь хочется вспомнить древних греков с их отказом от принятия актуальной бесконечности и стремлением избежать каких бы то ни было бесконечных процедур, что, например, нашло свое выражение в глубоком *методе исчерпывания* Евдокса–Архимеда, позволявшем дать сугубо конечные («финитные») доказательства результатам, которые ныне получают с помощью интегрального исчисления, связанного с предельным переходом при $n \rightarrow \infty$ (где n , скажем, число частей, на которые разбивается область интегрирования).

⁸⁸ Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. Т. I. Логические исчисления и формализация арифметики; т. II. Теория доказательств. – М.: Наука, 1979, 1982.

Рассел подверг критике и формалистское понятие существования. Гильберт считал приемлемыми бесконечные множества и другие идеальные элементы и утверждал, что если аксиомы какой-либо области математики, включающие закон исключенного третьего и закон противоречия, не приводят к противоречию, то тем самым гарантируется существование объектов, удовлетворяющих этим аксиомам. Такую трактовку существования Рассел назвал метафизической. Кроме того, он обратил внимание на то, что число непротиворечивых аксиоматических систем, которые можно придумать, неограниченно, но интерес представляют лишь такие системы, которые согласуются с эмпирическим материалом.

Критика Рассела напоминает поговорку «Не смейся, горох, ты не лучше бобов». Должно быть, к 1937 г. он успел основательно подзабыть то, что писал сам в 1901 г.: «Математику можно определить как предмет, в котором никогда не известно ни то, о чем мы говорим, ни истинно или ложно то, что мы говорим».

Формалистская программа была неприемлема и для интуиционистов. Помимо основных различий во взглядах на бесконечность и закон исключенного третьего интуиционисты неоднократно подчеркивали, что они полагаются на смысл математики и стремятся установить, насколько его можно считать здравым, в то время как формалисты (и логицисты) имеют дело с идеальными, или трансцендентальными, мирами, лишенными всякого смысла. Брауэр еще в 1908 г. показал, что в некоторых утверждениях классического математического анализа, в том числе в теореме Больцано–Вейерштрасса (носящей сугубо специальный характер и утверждающей, что у любого ограниченного бесконечного множества существует по крайней мере одна предельная точка), логика и здравый смысл находятся в вопиющем противоречии. Мы должны выбирать, заявил Брауэр, между нашим априорным понятием положительного целого числа и неограниченным использованием закона исключенного третьего в тех случаях, когда последний применяется к любому утверждению, не поддающемуся проверке за конечное число шагов. Некритическое использование аристотелевой логики привело к появлению формально правильных, но бессмысленных утверждений. Порывая со смыслом во многих логических построениях, классическая математика тем самым порывала с реальностью.

Критика Брауэра заставила многих осознать неправильность казавшегося ранее бесспорным мнения о том, что великие математические теории правильно отражают некое заложенное в них реальное содержание. Разумеется, создатели математических теорий мыслили их как идеализации реальных вещей и явлений. Но впоследствии, особенно в XIX в., многие понятия математического анализа утратили какую бы то ни было интуитивную подоплеку, и в глазах интуиционистов они не выглядели логически удовлетворительными. Принять взгляды Брауэра означало отвергнуть значительную часть классической математики на том основании, что она лишена интуитивного смысла.

Современные интуиционисты заявляют, что формализованная математика бессодержательна, даже если бы Гильберту и удалось доказать ее непротиворечивость. Вейль сетовал на то, что Гильберт «спас» классическую математику «ценой коренного пересмотра ее содержания», формализовав и выхолостив ее и «тем самым в принципе превратив из системы с интуитивно воспринимаемыми результатами в игру с формулами по определенным, раз и навсегда установленным правилам... Вполне возможно, что математика Гильберта представляет собой великолепную игру с формулами, более увлекательную, чем шахматы. Но что, спрашивается, дает такая игра нашему разуму, если ее формулы умышленно лишены материального содержания, посредством которого они могли бы выражать интуитивные истины?» В защиту формалистской философии следует заметить, что Гильберт свел математику к бессодержательным формулам только во имя высокой цели: доказательства непротиворечивости, полноты и других не менее важных свойств. Что же касается математики в целом, то даже формалисты никогда не считали ее «просто игрой», а рассматривали как вполне содержательную научную дисциплину.

Как и Рассел, интуиционисты возражали против формалистской интерпретации существования в математике. Гильберт утверждал, что существование любого математического объекта гарантируется непротиворечивостью той области математики, в которой он был введен. Такая интерпретация существования была неприемлема для интуиционистов. Непротиворечивость отнюдь не гарантирует истинности чистых теорем существования. Возражение против принятия формалистской интерпретации существования было выдвинуто двести лет назад Кантом в его «Критике чистого разума»: «Бесплодная попытка подменить логическую возможность понятия (поскольку понятие не противоречит само себе) трансцендентальной

возможностью вещей (поскольку понятию соответствует предмет) может обмануть и удовлетворить разве только неискушенного человека» ([18]⁸⁹, т. 3, с. 364).

Яростный спор между формалистами и интуиционистами происходил в 20-е годы нашего столетия. В 1923 г. с критикой формалистского направления в основаниях математики выступил Брауэр. Как утверждал Брауэр, формалистский подход позволяет избежать противоречий, но не дает ничего, что обладало бы хоть какой-то математической ценностью. «Некорректная математическая теория, даже если ее нельзя отвергнуть, ссылаясь на какое-нибудь опровергающее ее противоречие, всё же остается некорректной, подобно тому как преступление остается преступлением независимо от того, удастся ли суду оправдать преступника». В лекции, прочитанной в 1912 г. в Амстердамском университете, Брауэр саркастически заметил: «На вопрос, где следует искать математическую строгость, две группировки дают два различных ответа. Интуиционисты отвечают, что в человеческом разуме, формалисты – что на бумаге».

В свою очередь Гильберт обвинил Брауэра и Вейля в том, что те пытаются выбросить за борт всё им не подходящее и наложить диктаторские запреты на многие плодотворные области науки. В работе 1925 г. Гильберт назвал интуиционизм изменой науке. Тем не менее Вейль считал, что в метаматематике Гильберт, по существу, ограничил свои принципы интуиционистскими.

Нужно сказать, что принципы метаматематики также подверглись критике. Предполагалось, что принципы метаматематики ни у кого не встретят возражений. Но сами формалисты оказались весьма разборчивыми. Почему же их интуиция должна быть пробным камнем? Почему в таком случае не применить интуиционистский подход целиком ко всей математике? Разумеется, высшим критерием допустимости того или иного метода в метаматематике должна быть его убедительность, но убедительность для кого?

Хотя формалисты могли ответить далеко не на все критические замечания, с начала 30-х годов у них появился весомый аргумент, существенно подкреплявший их позицию. К этому времени Рассел и его коллеги-логицисты признали, что аксиомы логики не являются универсальными истинами и поэтому их непротиворечивость отнюдь не гарантирована автоматически, а интуиционисты могли лишь утверждать, что надежной гарантией непротиворечивости служит сама интуиция. Между тем формалисты располагали тщательно продуманной процедурой доказательства непротиворечивости, которая с успехом применялась к простым системам; это вселяло в формалистов уверенность, что им удастся доказать непротиворечивость арифметики, а тем самым и всей математики. Однако мы на время оставим формалистов в этой сравнительно благоприятной для них позиции и обратимся к еще одному конкурирующему направлению в основаниях математики.

Представители этого направления, получившего название теоретико-множественного, сначала не формулировали в явном виде свою философию – и сторонников, и явно сформулированную программу это направление обрело позднее. Ныне теоретико-множественное направление по числу своих приверженцев успешно конкурирует с логицизмом, интуиционизмом и формализмом.

Истоки теоретико-множественного направления можно проследить в работах Дедекинда и Кантора. Хотя оба этих математика занимались главным образом изучением бесконечных множеств, они приступили к теоретико-множественному обоснованию обычных целых (натуральных) чисел, прекрасно понимая, что если бы им удалось обосновать целые числа, то тем самым была бы обоснована и вся математика (гл. VIII).

Когда обнаружили противоречия в канторовской теории множеств (трудности, связанные с понятиями наибольшего кардинального и наибольшего ординального числа) и противоречия типа парадоксов Рассела и Ришара, также имеющие непосредственное отношение к теории множеств, некоторые математики решили, что парадоксы обусловлены неформальным введением множеств. Кантор смело высказывал новые идеи, но его изложение далеко не соответствовало требованиям математической строгости. Он дал несколько словесных определений множества в 1884, 1887 и 1895 гг. Под множеством Кантор, по существу, понимал любой набор вполне определенных предметов, доступных нашей интуиции или мысли. Иначе говоря, по Кантору, множество определено, если относительно любого предмета x мы знаем, принадлежит он множеству или нет. Оба варианта определения множества не отличаются строгостью, и

⁸⁹ Кант И. Сочинения в 6-ти томах. – М.: Мысль, 1964 (т.3), 1965 (т.4), 1966 (т.6).

теорию множеств в том виде, как ее изложил Кантор, ныне нередко называют наивной.⁹⁰ По мнению представителей теоретико-множественного направления, тщательный выбор аксиоматической основы должен был избавить теорию множеств от парадоксов, подобно тому как аксиоматизация геометрии и системы чисел позволила разрешить все связанные с ними логические проблемы.

Хотя теория множеств была составной частью логистического направления в математике, представители теоретико-множественной школы предпочитали прямой аксиоматический подход к теории множеств. Аксиоматизацию теории множеств впервые предпринял Эрнест Цермело в работе 1908 г. Причину парадоксов он видел в том, что Кантор не уточнил понятие множества. Поэтому, как полагал Цермело, ясные и явно сформулированные аксиомы могли бы прояснить, что следует понимать под множеством и какими свойствами оно должно обладать. В частности, Цермело намеревался ограничить размеры допустимых множеств. Цермело не придерживался какой-либо последовательной философии, а лишь стремился избежать противоречий. Предложенная Цермело система аксиом оставляла неопределенными фундаментальные понятия множества и отношение включения одного множества в другое. Эти неопределяемые понятия и другие, заданные явными определениями, должны были удовлетворять утверждениям, содержащимся в аксиомах. Не допускалось использование никаких других свойств множеств, кроме тех, что перечислены в аксиомах. Аксиомы гарантировали существование бесконечных множеств и выполнимость таких операций, как объединение множеств и образование подмножеств. Цермело использовал также аксиому выбора.

Система аксиом Цермело была усовершенствована несколько лет спустя (1922) Абрахамом А. Френкелем (1891–1965). Цермело не проводил различия между свойством, задающим множество, и самим множеством. Эти понятия для Цермело были синонимичны. Различие между свойствами множества и множеством было введено Френкелем в 1922 г. Система аксиом, в наше время наиболее часто используемая специалистами по теории множеств, известна как система Цермело–Френкеля. Оба автора опирались на самую изощренную и стройную математическую логику, какая только существовала в их время, но не указывали явно логические принципы. Цермело и Френкель считали их лежащими за пределами математики и применяли столь же уверенно, как в XIX в. математики пользовались логикой.

Назовем некоторые из аксиом Цермело–Френкеля, взяв на себя смелость привести их в словесной формулировке.

1. Два множества тождественны, если они состоят из одних и тех же элементов. (Интуитивно это определяет множество.)
2. Существует пустое множество.
3. Если x и y – множества, то неупорядоченная пара $\{x, y\}$ также множество.
4. Объединение любого множества множеств есть множество.
5. Существуют бесконечные множества. (Пятая аксиома делает допустимыми трансфинитные кардинальные числа. Это имеет решающее значение, поскольку не подлежит проверке опытом.)
6. Любое свойство, формализуемое на языке теории, может быть использовано для определения множества.
7. Допускается образование множества подмножеств любого множества, т.е. набор всех подмножеств данного множества есть множество. (Процесс образования множества подмножеств можно повторять любое число раз, т.е. рассматривать множество всех подмножеств любого данного множества как некое новое множество; множество подмножеств этого множества также является множеством и т.д.).
8. Аксиома выбора.
9. x не принадлежит x .

Нельзя не отметить одну замечательную особенность аксиом Цермело–Френкеля: они не допускают к рассмотрению множество, которое содержит все множества, и тем самым, возможно, позволяют избежать парадоксов. В то же время аксиомы Цермело–Френкеля вместе со следствиями из них адекватно отражают все понятия и теоремы теории множеств, необходимые для построения классического математического анализа. Построить теории натуральных чисел на

⁹⁰ **Яглом:** См., например, весьма популярный на Западе учебник [76: Halmos P.R. Naive Set Theory. – N.Y.: Springer, 1977] элементарной теории множеств, принадлежащий крупному математику и замечательному педагогу П. Халмошу, известному у нас по переводам ряда его книг и статей.

основе теории множеств несложно. Кантор утверждал в 1885 г., что чистая математика сводится к теории множеств, и канторовская программа была осуществлена Расселом и Уайтхедом, хотя их подход к теории множеств отличался гораздо большей сложностью. А если воспользоваться методом координат, то из математики чисел (т.е. из арифметики) следует вся математика, включая геометрию. Тем самым теория множеств становится основанием **всей** математики.⁹¹

Можно сказать, что надежда избежать противоречий в случае аксиоматизации теории множеств была основана на ограничении типов допустимых множеств, причем если налагаемые ограничения не слишком жестки, то система аксиом оказывается достаточной для обоснования математического анализа. Аксиомы теории множеств позволили до такой степени избежать парадоксов, что никому не удавалось получить их в рамках теории. Цермело заявил, что ни один парадокс не может возникнуть в аксиоматической теории множеств. Более поздние представители теоретико-множественного направления пребывали и продолжают пребывать в полной уверенности, что ни один парадокс не может быть выведен в теории, поскольку Цермело и Френкель тщательно построили иерархию множеств, исключив все неоднозначности, существовавшие в более ранних работах о множествах и их свойствах. К подобным заявлениям представителей теоретико-множественной школы никто из их идейных противников не относился всерьез. Пуанкаре не без сарказма заметил: «Мы возвели ограду вокруг стада, чтобы защитить его от волков, но нам не известно, нет ли волков внутри ограды».

Теоретико-множественное направление, как, впрочем, и все другие направления в основаниях математики, также не избежало критики. Многие считали недопустимым использование аксиомы выбора. Другие критики усматривали признак слабости теоретико-множественного направления в том, что его представители обходили молчанием вопрос о логических основах своей теории. Сама логика и ее отношение к математике явились предметом подробного обсуждения уже в первом десятилетии XX в. Представители же теоретико-множественного направления довольно небрежно обращались с логическими принципами. Их уверенность в непротиворечивости аксиоматической теории множеств считалась проявлением наивности (критики не без яда напоминали, что и Кантор был наивен до тех пор, пока не столкнулся с трудностями, гл. IX). Некоторые критики находили, что аксиомы теории множеств весьма произвольны и носят искусственный характер. Аксиомы Цермело–Френкеля предназначены для того, чтобы избежать парадоксов, но некоторые из этих аксиом неестественны или не основаны на интуитивных представлениях. Коль скоро представители теоретико-множественного направления принимают логические принципы как нечто очевидное, то почему бы не начать с арифметики, спрашивали критики.

Несмотря на все критические замечания, аксиоматика Цермело–Френкеля до сих пор используется некоторыми математиками как надежное основание для построения всей математики. Теория множеств Цермело–Френкеля – самая общая и фундаментальная теория, на которой и ныне строятся математический анализ и геометрия. Число приверженцев других направлений в основаниях математики возрастало по мере того, как их лидеры развивали и пропагандировали свои взгляды. Аналогичная история произошла и с теоретико-множественным подходом. Некоторые логицисты, например, Уиллард Ван Орман Куайн, выступили в поддержку теории множеств. В этой связи нельзя не упомянуть (нарушая хронологическую последовательность изложения) о группе известных и весьма уважаемых математиков, объединившихся

⁹¹ Впоследствии Гёдель (1940) и Бернайс (1937) модифицировали систему Цермело–Френкеля, введя различие между множествами и классами. В 1925 г. Гёдель и Бернайс упростили вариант аксиоматики теории множеств, предложенный фон Нейманом. Множества могут принадлежать другим множествам. Все множества – классы, но не все классы – множества. Классы не могут принадлежать большим классам. Различие между множествами и классами означает, что чудовищно большим совокупностям элементов не разрешается принадлежать другим классам. Тем самым исключаются канторовские множества, приводящие к парадоксам. Любая теорема в системе Цермело–Френкеля является теоремой в системе Гёделя–Бернайса, и наоборот. Известно много вариантов аксиоматики теории множеств, но не существует критерия, который позволил бы отдать одному варианту предпочтение перед другим. [По поводу аксиоматики теории множеств см., например, [32*: Fraenkel A.A., Bar-Hillel Y., Levy A. *Foundations of Set Theory*, 2nd rev. ed., New York: North-Holland, 1973. [Имеется русский перевод 1-го изд. книги: Френкель А., Бар-Хилел И. *Основания теории множеств*. – М.: Мир, 1966.]] и [78–80: Fraenkel A., Bernays P. *Axiomatic set theory*. – Amsterdam: North-Holland, 1958. Куратовский К., Мостовский А. *Теория множеств*. – М.: Мир, 1970. Mostowski A. *Constructible Sets with Applications*. – Amsterdam: North-Holland, Warszawa: PWN, 1969]. – *Ред.*]

под коллективным псевдонимом Никола Бурбаки. В 1936 г. эта группа поставила перед собой задачу доказать во всех деталях то, в чем были глубоко убеждены многие математики: если принять аксиоматику теории множеств Цермело–Френкеля (в переработке Бернаиса и Гёделя) и некоторые принципы логики, то на них можно построить всю математику. Но для бурбакистов логика подчинена аксиомам собственно математики. Логика не определяет ни того, что такое математика, ни того, чем занимаются математики.

Свои взгляды на логику бурбакисты выразили в статье, опубликованной в *Journal of Symbolic Logic* (1949): «Иначе говоря, логика, если говорить о математиках, представляет собой не больше и не меньше, как грамматику языка, которым мы пользуемся, языка, который должен был существовать еще до того, как могла быть построена математика». Последующее развитие математики может потребовать новых модификаций логики. Так случилось с введением бесконечных множеств и, как мы увидим при обсуждении нестандартного анализа (гл. XIII), будет происходить в дальнейшем. Школа Бурбаки отвергла Фреге, Рассела, Брауэра и Гильберта. Ее представители используют аксиому выбора и закон исключенного третьего, хотя выводят его с помощью приема, предложенного Гильбертом. Группу Бурбаки не заботит проблема непротиворечивости. По поводу нее бурбакисты утверждают: «Мы просто отмечаем, что все эти трудности могут быть преодолены способом, позволяющим избежать всех возражений и не оставляющим сомнений в правильности рассуждений». Противоречия возникали в прошлом, и каждый раз их удавалось успешно разрешить. То же будет происходить и впредь. «Вот уже двадцать пять веков математики имеют обыкновение исправлять свои ошибки и видеть в этом обогащение, а не обеднение своей науки; это дает им право смотреть в будущее спокойно» ([2]⁹², с. 30). Бурбаки выпустил около тридцати томов «Элементов математики», построенных на основе теоретико-множественного подхода.⁹³

Итак, к тридцатым годам XX в. сложились четыре различных, так или иначе конфликтующих подхода к математике, и сторонники различных направлений, не будет преувеличением сказать, вели между собой ожесточенную борьбу. Никто не мог более утверждать, что такая-то и такая-то теорема доказана правильно: в 30-е годы непременно следовало пояснить, каким стандартам правильности удовлетворяет данное доказательство. Проблема непротиворечивости математики – основная проблема, стимулировавшая появление и развитие не одного нового подхода, – не ставилась совсем (исключение, быть может, составляют интуиционисты, считавшие, что человеческая интуиция служит надежной гарантией непротиворечивости).

Та самая наука, которая в начале XIX в., несмотря на все зигзаги логического развития, была провозглашена совершеннейшей из наук, та самая наука, в которой теоремы доказывались с помощью неопровержимых, безупречных рассуждений, та самая наука, утверждения которой были не только неопровержимыми, но и считались истинами об окружающем нас мире и, по мнению некоторых, остались бы истинами в любом из возможных миров, не только отказалась от всяческих притязаний на истину, но и запятнала себя конфликтами между различными школами в основаниях и взаимно исключающими утверждениями о правильных принципах логики. Гордость человеческого разума была глубоко уязвлена.

Положение, сложившееся в 30-е годы, красочно описал математик Эрик Темпл Белл:

Как известно большинству математиков по собственному опыту, многое из того, что одно поколение математиков считает надежным и удовлетворительным, имеет шанс обратиться в тончайшую паутину под пристальным взглядом следующего поколения... Знания как в некотором смысле разумного общего соглашения по вопросам обоснования математики, по-видимому, не

⁹² Бурбаки Н. Теория множеств. – М.: Мир, 1965.

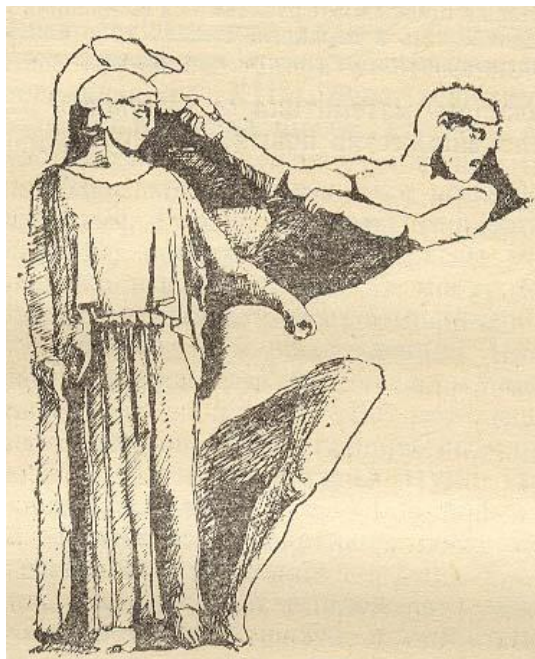
⁹³ **Яглом:** Французские оригиналы обширного трактата Н. Бурбаки *Eléments de mathématique* выходили в выпускаемой парижским издательством «Герман» серии «Новости науки и техники» (*Actualités scientifique et industrielle*), состоящей из книг небольшого объема; русский перевод этого, пока еще не законченного сочинения состоит из меньшего (хотя все равно очень большого) числа объемистых томов. [Некоторые неувязки, допущенные при переводе сочинения Бурбаки на русский язык, выпускавшегося двумя разными издательствами (ИЛ–«Мир» и Гостехиздат–Физматгиз–«Наука») в течение длительного времени, привели к тому, что на русском языке отдельные книги этого трактата выходили под тремя разными названиями: «Элементы математики» (чаще всего), «Основы математики» и «Начала математики» (а выпущенные отдельным изданием исторические вставки в разные части сочинения (в оригинале – *Eléments d'histoire des mathématiques*) получили титул «Очерки по истории математики»). На наш взгляд, наиболее точным было бы название «Начала математики», ибо бесспорна связь наименования, данного группой Бурбаки своему сочинению, с «Началами» Евклида (по-французски: *L'Eléments*).]

существует... Ясно одно: одинаково компетентные специалисты разошлись и продолжают расходиться во мнениях по поводу простейших рассуждений, хоть в малейшей степени явно или неявно претендующих на универсальность, общность или неоспоримость.

Что могла ожидать математика от будущего? Как мы увидим, будущее принесло множество новых, не менее серьезных проблем.

XII. Бедствия

Жарко, жарко, пламя ярко!
Хороша в котле заварка!⁹⁴
Вильям Шекспир, Макбет



Оглядываясь назад, можно сказать, что состояние оснований математики в 30-е годы XX в. было вполне удовлетворительным. Парадоксы были разрешены, хотя каждая из школ в основаниях математики решала их по-своему. Правда, не существовало единого мнения относительно того, какую математику надлежит считать правильной, но каждый математик мог выбрать подход, наиболее отвечающий его вкусам, и действовать в соответствии с принципами, которых придерживались сторонники данного направления.

Однако две проблемы продолжали беспокоить математиков. Первой, и главной, была проблема доказательства непротиворечивости математики – та проблема, которую в 1900 г. поставил в своем докладе на II Международном математическом конгрессе в Париже Гильберт. Хотя известные парадоксы были разрешены, опасность возникновения в будущем новых парадоксов по-прежнему существовала. Вторая проблема, не дававшая покоя

математикам, была связана с так называемой полнотой аксиоматических систем. Говоря кратко, полнота системы аксиом, описывающих какую-либо область математики, означает в известном смысле адекватность этой аксиоматики тому разделу науки, который с ее помощью задается, т.е. означает возможность доказать на основе принятой системы аксиом истинность или ложность любого осмысленного утверждения, содержащего понятия рассматриваемой области математики.

На самом элементарном уровне проблема полноты сводится к вопросу о том, можно ли на основании аксиом Евклида доказать (или опровергнуть), например, разумную гипотезу о том, что в евклидовой геометрии высоты треугольника всегда пересекаются в одной точке. На более высоком уровне (в области кардинальных трансфинитных чисел) проблему полноты иллюстрирует гипотеза континуума (гл. IX). Полнота аксиоматической системы требует, чтобы с помощью аксиом теории множеств гипотезу континуума можно было или доказать, или опровергнуть. Полнота аксиоматики арифметики (теории чисел) требует, чтобы с помощью аксиом теории чисел (т.е. аксиом, задающих множество натуральных чисел) можно было либо доказать, либо опровергнуть гипотезу Гольдбаха, согласно которой каждое четное число представимо в виде суммы двух простых чисел. Пока мы не знаем, верна эта гипотеза или не верна, но если аксиоматика арифметики полна, то она либо верна, либо не верна – третьего исхода нет. Проблема полноты затрагивает также множество других утверждений, которые на протяжении десятилетий и даже веков математикам не удавалось ни доказать, ни опровергнуть.

Представители различных направлений в основаниях математики по-разному относились к проблемам непротиворечивости и полноты. Рассел перестал считать абсолютными истинами логические аксиомы логицистов и признал, что введенная им аксиома сводимости (гл. X) носит искусственный характер. Развитая Расселом теория типов позволила избежать известных парадоксов, и он полагал, что названная теория даст возможность разрешить и новые парадоксы, которые могут возникнуть в будущем. Но одно дело – субъективная уверенность, и совсем иное – доказательство. Решить проблему полноты Расселу так и не удалось, несмотря на все его усилия.

⁹⁴ Шекспир В. Избранные произведения. – М.–Л.: ГИХЛ, 1950, с. 581 (перевод М.Л. Лозинского).

Представители теоретико-множественного направления были убеждены в том, что их подход не приводит к новым противоречиям, однако доказать это они не могли. Проблема полноты была не единственной, и даже не главной, их заботой. Интуиционисты также довольно безразлично относились к проблеме непротиворечивости. Они считали, что интуитивные представления непротиворечивы по самой своей природе. Формальное доказательство, по их мнению, не требовалось и даже вообще было неуместным в рамках их философии. Что же касается полноты, то, по мнению интуиционистов, человеческая интуиция достаточно сильна, чтобы распознать истинность или ложность почти любого осмысленного утверждения, хотя некоторые утверждения могут оказаться неразрешимыми.

Однако формалисты во главе с Гильбертом не были настроены столь благодушно. Предприняв некоторые, весьма ограниченные, попытки решить проблему непротиворечивости в первые годы XX в., Гильберт вернулся к этой проблеме и к проблеме полноты в 1920 г.

Свой метод доказательства непротиворечивости Гильберт в общих чертах изложил в метаматематике. Что же касается полноты, то в статье «О бесконечном» (1925) Гильберт, по существу, повторил идеи, высказанные им в докладе на II Международном математическом конгрессе в Париже (1900). Там Гильберт утверждал, что «каждая определенная математическая проблема непременно поддается строгому решению». Ту же мысль, только развитую несколько подробнее, мы находим в статье Гильберта от 1925 г.:

В качестве примера возможного подхода к решению фундаментальных проблем я хотел бы избрать тезис о разрешимости любой математической задачи. Мы все убеждены в том, что любая математическая задача поддается решению. Это убеждение в разрешимости каждой математической проблемы является для нас большим подспорьем в работе, когда мы приступаем к решению математической проблемы, ибо мы слышим внутри себя постоянный призыв: вот проблема, ищи решение. Ты можешь найти его с помощью чистого мышления, ибо в математике не существует *ignorabimus* [мы не будем знать]. (Ср. также ([51]⁹⁵, с. 22.)

Выступая с докладом на Международном математическом конгрессе в Болонье (1928), Гильберт подверг критике прежние доказательства полноты как построенные на использовании принципов логики, недопустимых в математике, но выразил несокрушимую уверенность в полноте своей собственной системы: «В нашем мышлении нет ничего таинственного – мы мыслим по вполне определенным и формулируемым правилам, которые твердо гарантируют абсолютную надежность наших суждений». Каждый математик, по словам Гильберта, разделяет убеждение в разрешимости любой четко поставленной математической проблемы. В статье «Естествознание и логика» (1930) Гильберт утверждал: «На мой взгляд, истинная причина, в силу которой Канту⁹⁶ не удалось найти неразрешимую математическую проблему, заключается в том, что неразрешимых проблем не существует».

В работе «Обоснования математики», о которой Гильберт доложил в 1927 г., а опубликовал в 1930 г., он, по существу, развил свои идеи, выдвинутые в работе 1905 г. По поводу предложенного им метаматематического метода (теории доказательства) установления непротиворечивости и полноты Гильберт утверждал следующее:

С помощью этого нового обоснования математики, который справедливо можно именовать теорией доказательства, я преследую важную цель: именно, я хотел бы окончательно разделаться с вопросами обоснования математики как таковыми, превратив каждое математическое высказывание в поддающуюся конкретному показу и строго выводимую формулу и тем самым приведя образование понятий и выводы, которыми пользуется математика, к такому изложению, при котором они были бы неопровержимы и всё же давали бы картину всей науки. Я надеюсь, что смогу с помощью своей теории доказательства полностью достигнуть этой цели, хотя до ее полного завершения необходима еще большая работа. ([50]⁹⁷, с. 365.)

⁹⁵ Проблемы Гильберта. – М.: Наука, 1969.

⁹⁶ **Яглом:** Огюст Кант (1798–1857) – видный французский философ, один из основоположников и бесспорный лидер позитивизма, утверждающего, что целью науки являются наблюдение и эксперимент, а также формулировка тех выводов, которые прямо отсюда следуют. Канту принадлежит идея о естественной иерархии наук в направлении уменьшения их абстрактности; при этом при построении любой науки должны быть известны основные факты всех предшествующих ей наук. Эта «лестница Канта» начиналась с математики (являющейся, таким образом, фундаментом любого знания) и заканчивалась социологией (термин, впервые введенный Кантом).

⁹⁷ Гильберт Д. Основания геометрии. – М.–Л.: Гостехиздат, 1948.

Гильберт был уверен, что его теория доказательств позволит разрешить проблемы непротиворечивости и полноты.

К 30-м годам были получены некоторые результаты о полноте различных аксиоматических систем. Сам Гильберт построил несколько искусственную систему, охватывающую лишь часть арифметики, и доказал ее полноту и непротиворечивость. Аналогичные ограниченные результаты вскоре удалось получить и другим авторам. Так, была доказана непротиворечивость и даже полнота таких сравнительно тривиальных аксиоматических систем, как исчисление высказываний. Некоторые из доказательств принадлежали ученикам Гильберта. В 1930 г. Курт Гёдель (1906–1978), ставший впоследствии профессором Института высших исследований в Принстоне, доказал полноту исчисления предикатов первой ступени, охватывающего высказывания и пропозициональные функции.⁹⁸ Формалисты были в восторге от полученных результатов. Гильберт еще больше уверовал в то, что его метаматематике (его теории доказательства) удастся доказать непротиворечивость и полноту всей математики.

Но уже в следующем году Гёдель опубликовал другую работу, поистине открывшую ящик Пандоры. В этой работе, называвшейся «О формально неразрешимых утверждениях [оснований математики] и родственных системах» (1931), содержались два поразительных результата. Наибольшее смущение у математиков вызвал один из них – утверждающий, что непротиворечивость любой достаточно мощной математической системы, охватывающей арифметику целых чисел, не может быть установлена средствами самой этой системы на основе математических принципов, принятых различными школами в основаниях математики: логицистами, формалистами и представителями теоретико-множественного направления. Это утверждение Гёделя прежде всего касалось формалистской школы, ибо Гильберт по собственной воле ограничил свою метаматематику такими логическими принципами, которые были приемлемы даже для интуиционистов, чем сузил арсенал доступных формалистам логических средств. Результат Гёделя послужил поводом для известного высказывания Германа Вейля: «Бог существует, поскольку математика, несомненно, непротиворечива, но существует и дьявол, поскольку доказать ее непротиворечивость мы не можем».

Приведенный результат Гёделя является следствием из установленного им другого, не менее поразительного результата, который известен как теорема Гёделя о неполноте. Она утверждает, что если формальная теория T , включающая арифметику целых чисел, непротиворечива, то она неполна.⁹⁹ Иначе говоря, существует имеющее смысл утверждение арифметики целых чисел (обозначим его S), которое в рамках данной теории невозможно ни доказать, ни опровергнуть. Но либо утверждение S , либо утверждение «не S » истинно. Следовательно, в арифметике существует истинное утверждение, которое недоказуемо, а значит, и неразрешимо. Хотя Гёдель не указал точно, о каком классе аксиоматических систем идет речь в полученном им результате, теорема о неполноте применима к системам Рассела–Уайтхеда, Цермело–Френкеля, гильбертовской аксиоматике чисел и ко всем наиболее распространенным аксиоматическим системам. Казалось, непротиворечивость достигается ценой неполноты. И словно для того, чтобы разбередить рану и вновь унижить математиков, истинность некоторых неразрешимых утверждений удалось доказать с помощью рассуждений (правил логики), выходящих за рамки допустимого в перечисленных выше формальных системах.

Как и следовало ожидать, получение столь поразительных результатов потребовало от Гёделя немалых усилий. Основная идея его работы состояла в том, чтобы каждому символу или каждой последовательности символов в системе, принятой, например, логицистами или формалистами, сопоставить определенное число. Любому утверждению или последовательности

⁹⁸ Исчисление предикатов первой ступени, как доказали Гильберт и другие, непротиворечиво, и аксиомы его независимы.

⁹⁹ Теорема Гёделя о неполноте применима и в случае обращения к исчислению предикатов второй ступени (гл. VIII). [По поводу теорем Гёделя см., например, [81: Манин Ю.И. Доказуемое и недоказуемое. – М.: Советское радио, 1979; Вычислимое и невычислимое. – М.: Советское радио, 1980], а также обращенные к более широкому кругу читателей статьи [82: Манин Ю.И. Теорема Гёделя. – Природа, 1975, № 12, с. 80–87] и брошюру [83: Успенский В.А. Теорема Гёделя о неполноте. – М.: Наука, 1981]. – Ред.]

утверждений, образующих доказательство, Гёдель также ставил в соответствие некоторое число – гёделевский номер.¹⁰⁰

Рассмотрим схему Гёделя подробнее. Произведенная Гёделем арифметизация состояла в том, что каждому математическому понятию он сопоставлял некоторое натуральное число. Числу 1 Гёдель поставил в соответствие число 1, знаку равенства – число 2, введенному Гильбертом символу отрицания – число 3, знаку плюс – число 5 и т.д. Таким образом, набору символов $1=1$ Гёдель сопоставляет числовые символы 1, 2, 1, тогда как равенству (формуле) $1=1$ сопоставляется не три (числовых) символа 1, 2, 1, а единственное число, структура которого позволяла бы восстановить все входящие в него символы-компоненты. А именно: Гёдель выбрал три первых простых числа 2, 3 и 5 и, составив из них число $2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 90$, присвоил его равенству $1 = 1$. Число 90 допускает однозначное разложение в произведение степеней простых чисел $2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1$, по которому нетрудно восстановить символы 1, 2, 1.

Каждой формуле рассматриваемых систем Гёдель поставил в соответствие некоторое число. Каждой последовательности формул, образующих доказательство, он также сопоставил определенное число. Показатели в разложении номера доказательства в произведение степеней простых чисел сами не являются простыми числами, хотя и связаны с ними довольно просто. Так, число $2^{900} \cdot 3^{90}$ может быть гёделевским номером доказательства. Это доказательство содержит формулы с гёделевскими номерами 900 и 90. Следовательно, по номеру доказательства мы можем восстановить входящие в него формулы.

Утверждения метаматематики о формулах рассматриваемой аксиоматической системы Гёдель также представил с помощью чисел. Каждое метаматематическое утверждение получило свой гёделевский номер. Тем самым получено «отображение» метаматематики в арифметику.

Осуществив перевод словесных утверждений метаматематики на арифметический язык, Гёдель показал, как построить арифметическое утверждение G , означающее в переводе на метаматематический язык, что утверждение с гёделевским номером m недоказуемо. Но утверждение G , рассматриваемое как последовательность символов, имеет гёделевский номер m . Следовательно, G утверждает о самом себе, что оно недоказуемо. Итак, если G доказуемо, то оно должно быть недоказуемым, а если G недоказуемо, то оно должно быть доказуемым, поскольку недоказуемо, что оно недоказуемо. Так как любое арифметическое утверждение либо истинно, либо ложно, формальная система, которой принадлежит G , неполна (если только она непротиворечива). Тем не менее арифметическое утверждение G истинно, так как является утверждением о целых числах, которое можно доказать, используя более интуитивные рассуждения, чем допускает формальная система.

Поясним суть гёделевской схемы на примере. Рассмотрим утверждение S : «Это утверждение ложно». Оно приводит к противоречию. Действительно, если S , рассматриваемое как единое целое, истинно, то оно, согласно ему самому, должно быть ложным, а если S ложно, то ложно, что S ложно, в силу чего S должно быть истинным. Гёдель заменил слово «ложно» словом «недоказуемо», превратив S в утверждение G – «Это утверждение недоказуемо». Если утверждение недоказуемо, то утверждаемое им истинно. С другой стороны, если утверждение доказуемо, то оно ложно, или, в соответствии с обычной логикой, если утверждение истинно, то оно недоказуемо. Следовательно, утверждение истинно в том и только в том случае, если оно недоказуемо. Мы приходим не к противоречию, а к истинному утверждению, которое недоказуемо, т.е. неразрешимо.

Заготовив впрок неразрешимое утверждение, Гёдель построил арифметическое утверждение A , соответствующее метаматематическому утверждению «Арифметика непротиворечива», и доказал, что из A следует G . Поэтому если бы A было доказуемым, то и G было бы доказуемым. Но так как G неразрешимо, A недоказуемо. Иными словами, утверждение A неразрешимо. Тем самым установлена невозможность доказать «внутренними средствами» (т.е. в рамках той же системы) непротиворечивость арифметики любым методом – с помощью любой системы логических принципов, представимой в виде арифметической системы.

На первый взгляд кажется, что неполноты можно было бы избежать, если ввести в формальную систему дополнительный логический принцип или математическую аксиому. Но метод Гёделя позволяет доказать, что если дополнительное утверждение допускает перевод на

¹⁰⁰ **Яглом:** Доступное изложение теоремы Гёделя и некоторых других упомянутых ниже понятий и результатов имеется в небольшой по объему и требующей минимальной предварительной подготовки книге [84: Линдон Р. Заметки по логике. – М.: Мир, 1968].

язык арифметики по предложенной Гёделем схеме (согласно которой символам и формулам мы ставим в соответствие некоторые числа – их гёделевские номера), то и в расширенной системе можно сформулировать неразрешимое утверждение. Иначе говоря, избежать неразрешимых утверждений и доказать непротиворечивость можно лишь с помощью логических принципов, «не отображаемых» в арифметику. Чтобы пояснить суть дела, воспользуемся аналогией (хотя и несколько неточной): если бы логические принципы и математические аксиомы были сформулированы на японском языке, а арифметизация Гёделя означала бы перевод на английский язык, то результаты Гёделя получались бы до тех пор, пока был бы осуществим перевод с японского на английский.

Таким образом, теорема Гёделя о неполноте утверждает, что ни одна система математических и логических аксиом, арифметизируемая тем или иным способом (например, так, как это сделал Гёдель), не позволяет охватить даже все содержащиеся в ней истины, не говоря уже о всей математике, поскольку любая система аксиом неполна. В любой аксиоматической системе существуют утверждения, недоказуемые в рамках данной системы. Истинность таких утверждений может быть установлена лишь с помощью неформальных рассуждений. Теорема Гёделя о неполноте, показавшая, что аксиоматизация имеет свои пределы, разительно отличалась от господствовавших в конце XIX в. представлений о математике как о совокупности аксиоматизируемых (и аксиоматизированных) теорий. Теорема Гёделя нанесла сокрушительный удар по всеобъемлющей аксиоматизации. Неадекватность аксиоматического подхода сама по себе противоречием не была; однако она явилась полной неожиданностью, поскольку математики, особенно формалисты, предполагали, что в рамках некоторой аксиоматической системы любое истинное в ней утверждение заведомо доказуемо.¹⁰¹ Брауэр установил, что интуитивно воспринимаемые истины часто лежат далеко за пределами того, что было доказано в классической математике, а Гёдель доказал, что интуитивно воспринимаемые истины вообще выходят за рамки математического доказательства. По выражению Пауля Бернаиса, ныне более разумно не столько рекомендовать аксиоматику, сколько предостерегать против ее переоценки. Разумеется, сказанное выше не исключает возможности появления новых методов доказательства, которые выходят за пределы допустимого логическими принципами, принятыми различными школами в основаниях математики.

Оба полученных Гёделем результата потрясли математику. Невозможность доказать непротиворечивость наносила смертельный удар прежде всего формалистской философии Гильберта, который не сомневался в успехе своего намерения в рамках метаматематики доказать непротиворечивость всей математики. Но результаты задевали далеко не только гильбертовскую программу. Гёдель доказал, что какой бы подход к математике на основе надежных логических принципов мы ни избрали, нам всё равно не удастся доказать непротиворечивость математики. Ни один из предложенных подходов к основаниям математики не был исключением. Это означало, что математика вынуждена бесповоротно отказаться от претензий на абсолютную достоверность или значимость своих результатов, т.е. лишиться одной из основных своих особенностей, на которую претендовала еще сравнительно недавно. Положение осложнялось невозможностью доказать непротиворечивость: ведь всё, о чем говорили математики, могло

¹⁰¹ **Яглом:** Разумеется, это утверждение автора не означает, что ранее Гёделя математики не знали неполных аксиоматических систем, в которых вполне осмысленное в рамках этой системы утверждение не может быть ни опровергнуто, ни доказано, подобно тому как, скажем, дополнив стандартную аксиоматику теории групп требованием (аксиомой) о конечности группы, мы все равно не сможем ответить на вопрос о том, четен или нечетен порядок (число элементов) группы. [Н. Бурбаки – см., например, [68: Бурбаки Н. Очерки по истории математики. – М.: ИЛ, 1963] – считает даже, что единственным принципиальным отличием современной математики от античной является признание равноправности неполных аксиоматических систем с полными, в то время как древние греки признавали лишь полные аксиоматические системы вроде (до конца ими не аксиоматизированных) евклидовой геометрии или системы вещественных чисел. Возможно, первой сознательно рассмотренной математиками неполной аксиоматической системой была *абсолютная геометрия* Я. Бойаи, получающаяся из обычной аксиоматики евклидовой геометрии отбрасыванием аксиомы параллельных; в рамках этой аксиоматической системы, описывающей, так сказать, «общую часть» евклидовой и гиперболической геометрии, нельзя было ответить, скажем, на вопрос, проходит ли через внешнюю по отношению к прямой a точку A одна или много не пересекающих a прямых.] Однако ранее математики, впрочем, обычно не формулируя этого утверждения явно, полагали, что любую неполную аксиоматику можно дополнить какими-то новыми аксиомами, с тем чтобы она стала полной; работы же Гёделя совсем по-новому поставили вопрос о том, что есть в математике истина.

оказаться бессмыслицей, ибо теперь никто не мог гарантировать, что в будущем не возникнет противоречия. Случись такое и окажись противоречие неразрешимым – вся математика обратилась бы в прах. Действительно, одно из двух противоречивых утверждений должно быть ложным, а согласно принятой всеми математическими логиками концепции импликации (так называемой материальной импликации, о которой говорилось в гл. VIII), из ложного утверждения может следовать что угодно. Итак, математики работали под угрозой полного провала. Еще один удар нанесла теорема о неполноте. И здесь больше всех пострадал Гильберт, хотя теорема Гёделя применима ко всем формальным подходам к математике.

Пусть большинство математиков и не высказывали своих надежд столь откровенно и уверенно, как Гильберт, но все они, несомненно, надеялись, что им удастся решить любую четко поставленную проблему. Например, к 30-м годам XX в. одним лишь попыткам доказать «последнюю» («великую») теорему Ферма (утверждающую, что при любом натуральном $n > 2$ никакие три целых числа x , y и z не могут удовлетворять уравнению $x^n + y^n = z^n$) были посвящены сотни обширных и глубоких по содержанию работ. Но, может быть, постигшая их авторов неудача объяснялась неразрешимостью теоремы Ферма?

Теорему Гёделя о неполноте до некоторой степени можно рассматривать как отрицание закона исключенного третьего. Каждое утверждение мы считаем либо истинным, либо ложным. В современных основаниях математики это означает, что рассматриваемое утверждение доказуемо или недоказуемо с помощью законов логики и аксиом того раздела математики, к которому относится интересующее нас утверждение. Гёдель же доказал, что некоторые утверждения нельзя ни доказать, ни опровергнуть. Следовательно, теорема Гёделя о неполноте в известной мере подкрепляет позиции интуиционистов, хотя те возражали против логических принципов совсем по другим причинам.

Непротиворечивость можно было бы считать доказанной, если бы в противовес подходу Гёделя в системе удалось обнаружить неразрешимое утверждение; ведь как мы уже установили, опираясь на свойства материальной импликации, если в системе имеется противоречие, то в ней можно доказать что угодно. Однако до сих пор обнаружить неразрешимое утверждение не удалось.

Гильберт не считал, что потерпел поражение. По своей натуре Гильберт был оптимистом и обладал поистине безграничной верой в мощь человеческого разума и его способность к познанию. Этот оптимизм придавал ему мужество и силы, мешая в то же время признать возможность существования неразрешимых математических проблем. Для Гильберта математика была областью человеческой деятельности, познанию в которой не существовало иных пределов, кроме возможностей таланта исследователя.

Гёдель опубликовал свои результаты в 1931 г., т.е. до выхода в свет первого (1934) и второго (1939) томов фундаментального труда Гильберта и Бернаиса по основаниям математики [75]¹⁰². В предисловии ко второму тому оба этих автора вынуждены были признать необходимость расширить используемые в метаматематике методы рассуждений. Гильберт и Бернаис включили в число допустимых методов трансфинитную индукцию.¹⁰³ Гильберт полагал, что новые принципы вполне могли бы быть интуитивно правильными и приемлемыми для всех. Он пытался развивать дальше это направление, но не пришел ни к каким новым результатам.

События, последовавшие за переломным 1931 г., еще более осложнили ситуацию и обрекли на неудачу любые попытки определить, что такое математика и какие результаты следует считать правильными. Мы упомянем лишь об одном таком событии, далеко не самом важном. Представителю гильбертовской школы Герхарду Генцену (1909–1945) удалось ослабить запреты на методы доказательства, допустимые в метаматематике Гильберта, в частности за счет использования трансфинитной индукции, и в 1936 г. он смог доказать непротиворечивость арифметики и отдельных разделов математического анализа.

Некоторые представители гильбертовской школы в основаниях математики приняли предложенное Генценом доказательство и отстаивали его. Эти формалисты утверждали, что работа Генцена не выходит за пределы интуитивно приемлемой логики. Итак, чтобы защитить формализм, понадобилось перейти от «финитной» логики Брауэра к «трансфинитной» логике

¹⁰² Гильберт Д., Бернаис П. Основания математики. Т. I. Логические исчисления и формализация арифметики; т. II. Теория доказательств. – М.: Наука, 1979, 1982.

¹⁰³ Обычная математическая индукция доказывает, что теорема верна для всех конечных положительных целых чисел. Трансфинитная индукция использует тот же метод, но распространяет его на вполне упорядоченные множества трансфинитных ординальных чисел.

Генцена. Противники метода Генцена с сарказмом замечали, что «приемлемая» логика оказывается уж слишком изощренной и что если непротиворечивость арифметики вызывает какие-то сомнения, то введение не менее сомнительного метаматематического принципа вряд ли в состоянии разрешить их. Использование трансфинитной индукции считалось спорным еще до того, как ее взял на вооружение Генцен, и некоторые математики приложили немало усилий, чтобы по возможности исключить трансфинитную индукцию из доказательств. Трансфинитная индукция не была интуитивно убедительным принципом. По выражению Вейля, подобного рода принципы снижают стандартный уровень доказательного рассуждения до такого состояния, когда суть доказываемого становится весьма расплывчатой.

Теорема Гёделя о неполноте породила ряд побочных проблем, о которых также следовало бы упомянуть. Поскольку в любой сколько-нибудь сложной области математики существуют утверждения, которые невозможно ни доказать, ни опровергнуть, возникает вопрос: можно ли определить, доказуемо или недоказуемо любое заданное утверждение? Этот вопрос известен под названием проблемы разрешимости. Решение ее требует эффективных методов (возможно, аналогичных тем, которые используются при расчетах на ЭВМ), позволяющих за конечное число шагов устанавливать доказуемость (истинность или ложность) утверждения или класса утверждений.

Поясним понятие разрешающей процедуры на нескольких простых примерах. Чтобы решить, делится ли одно целое число на другое, мы можем осуществить процесс деления. Если остаток от деления равен нулю, то это означает, что первое число на второе делится. Аналогичная процедура позволяет ответить на вопрос, делится ли один многочлен нацело на другой. Имеется также четкий алгоритм, позволяющий ответить на вопрос, существуют ли целые числа x и y , удовлетворяющие уравнению $ax + by = c$ с целыми a , b и c .

В своем докладе на II Международном математическом конгрессе в Париже Гильберт поставил очень интересную (десятую) проблему о разрешимости диофантовых уравнений, сформулировав ее так: можно ли указать способ, позволяющий за конечное число шагов установить, разрешимо ли диофантово уравнение в целых числах? (Класс уравнений $ax + by = c$ состоит из диофантовых уравнений, ибо каждый элемент класса представляет собой одно уравнение, связывающее два неизвестных, и решить его требуется в целых числах. Проблема Гильберта относится к гораздо более общему классу диофантовых уравнений.) Проблема разрешимости гораздо сложнее десятой проблемы Гильберта, но математики, работающие над ней, охотно ссылаются на десятую проблему Гильберта, так как уже одно то, что полученные при этом результаты связаны с решением указанной проблемы, придает им особую значимость.

Точный смысл понятию эффективной процедуры придал профессор Принстонского университета Алонсо Черч (р. 1903), который ввел определение рекурсивной, или, как еще говорят, вычислимой функции. Рассмотрим простой пример рекурсивности. Пусть, по определению

$$f(1) = 1, f(n+1) = f(n) + 3.$$

Тогда

$$f(2) = f(1) + 3 = 1 + 3 = 4, f(3) = f(2) + 3 = 4 + 3 = 7.$$

Шаг за шагом мы можем вычислить все значения функции $f(n)$. Такая функция $f(x)$ называется рекурсивной. Введенное Черчем понятие рекурсивности равнозначно вычислимости, но отличается большей общностью.

В 1936 г. Черч, используя введенное им новое понятие рекурсивной функции, показал, что в общем случае разрешающая процедура (для узкого исчисления предикатов) невозможна: если задано конкретное утверждение, то не всегда можно найти алгоритм, позволяющий установить, доказуемо оно или опровержимо. В любом частном случае утверждение может оказаться доказуемым, но мы не располагаем критерием, который позволял бы заранее определять, доказуемо оно или недоказуемо. Математики могут годами напрасно терять время, безуспешно пытаясь доказать то, что вообще недоказуемо. Относительно десятой проблемы Гильберта Юрий Матиясевич в 1970 г. доказал, что **не существует** алгоритма, позволяющего установить, удовлетворяют ли какие-либо целые числа соответствующим диофантовым уравнениям или нет.¹⁰⁴

¹⁰⁴ **Яглом:** Доступен и начинающему рассказ [88: Варпаховский Ф.Л., Колмогоров А.Н. О решении десятой проблемы Гильберта. – Квант, 1970, № 7, с. 38–44] о работе Ю. Матиясевича; несколько больших знаний требуют комментарии к 10-й проблеме Гильберта в [51: Проблемы Гильберта. – М.: Наука, 1969]

Различие между неразрешимыми утверждениями и проблемами, для которых нет разрешающей процедуры, довольно тонко, но весьма четко и определенно. Неразрешимые утверждения неразрешимы в конкретной системе аксиом и существуют в любой сколько-нибудь значительной аксиоматической системе. Так, постулат Евклида о параллельных неразрешим в системе остальных аксиом евклидовой геометрии. Другим примером может служить утверждение о том, что вещественные числа образуют наименьшее множество, удовлетворяющее обычно аксиоматизируемым свойствам вещественных чисел.

Нерешенные проблемы могут оказаться неразрешимыми, но далеко не всегда это известно заранее. Например, задача о трисекции угла с помощью циркуля и линейки в течение по крайней мере нескольких столетий ошибочно считалась неразрешимой. Но трисекция оказалась невозможной. Теорема Черча утверждает, что не существует способа, позволяющего заранее определить, можно ли доказать или опровергнуть утверждение. Одни утверждения можно доказать и опровергнуть одновременно, другие нельзя ни доказать, ни опровергнуть – они неразрешимы, но их неразрешимость, как и неразрешимость всех известных неразрешимых проблем, заранее отнюдь не очевидна. Гипотеза Гольдбаха о том, что любое четное число представимо в виде суммы двух простых чисел, пока не доказана. Она может оказаться неразрешимой в системе аксиом арифметики, но ее неразрешимость, конечно, не очевидна. Не исключено, что когда-нибудь гипотезу Гольдбаха удастся доказать или опровергнуть.

Не успели математики оправиться от потрясений, вызванных теоремой Гёделя о неполноте и о невозможности доказать непротиворечивость арифметики, как через десять лет возникла новая серьезная угроза развитию математики. И опять «виной» тому был Гёдель, который явился инициатором серии исследований, которые внесли еще большую неразбериху в вопрос о том, что такое математика, имеющая под собой надежную основу, и в каком направлении она может развиваться. Напомним, что сторонники одного из подходов к основаниям математики, возникшего в начале XX в., намеревались построить математику, исходя из теории множеств (гл. XI); с этой целью была разработана система аксиом Цермело–Френкеля.

В работе «Совместимость аксиомы выбора и обобщенной гипотезы континуума с аксиомами теории множеств» (1940) Гёдель доказал, что если система аксиом Цермело–Френкеля без аксиомы выбора непротиворечива, то добавление аксиомы выбора не нарушает непротиворечивости, т.е. аксиома выбора в рамках этой аксиоматики не может быть доказана. Аналогично он установил, что предположение Кантора – гипотеза континуума о том, что не существует кардинальных чисел, заключенных между $\aleph_0$ и $2^{\aleph_0}$ (т.е. кардинальным числом c , соответствующим множеству всех вещественных чисел), или, иначе говоря, что не существует несчетного множества действительных чисел с кардинальным числом, меньшим $2^{\aleph_0}$, и обобщенная гипотеза континуума¹⁰⁵ не противоречит системе аксиом Цермело–Френкеля, даже если последнюю дополнить аксиомой выбора. Другими словами, гипотезу континуума как в обычном, так и в обобщенном варианте нельзя опровергнуть. Для доказательства своих утверждений Гёдель построил модели, в которых оба утверждения выполняются.

Непротиворечивость обоих утверждений – аксиомы выбора и гипотезы континуума – несколько обнадежила математиков: обеими теоремами можно было пользоваться по крайней мере с не меньшей уверенностью, чем остальными аксиомами Цермело–Френкеля.

Однако благодущие математиков (если только оно действительно было) быстро развеяли последующие события. Результаты Гёделя не исключали возможности того, что аксиома выбора и гипотеза континуума – порознь или вместе – могут быть доказаны на основе остальных аксиом Цермело–Френкеля. Мысль о том, что по крайней мере аксиоме выбора невозможно вывести из остальных аксиом Цермело–Френкеля, была высказана еще в 1922 г. Тогда же и несколько позднее некоторые ученые, в том числе и Френкель, доказали независимость аксиомы выбора, но

(освещение ситуации, какой она представлялась до решения проблемы) и в [89: Mathematical Development Arising from Hilbert. Problems. – Providence (R.I.): American Mathematical Society, 1976], где статья о 10-й проблеме Гильберта, принадлежит основным участникам ее решения М. Девису, Ю. Матиясевичу и Дж. Робинсон. (Видный логик Джулия Робинсон, заложившая первые камни в основание построенного Матиясевичем здания, является сестрой создателя нестандартного анализа Абрахама Робинсона (см. далее), Мартин Девис – автор одного из лучших учебников нестандартного анализа [86: Девис М. Прикладной нестандартный анализ. – М.: Мир, 1980].)

¹⁰⁵ Обобщенная гипотеза континуума утверждает, что кардинальное число множества всех подмножеств некоторого множества, обладающего кардинальным числом $\aleph_n$, равно $\aleph_{n+1}$ (т.е. $2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}$). Кантор доказал, что $2^{\aleph_n} > \aleph_n$.

каждый из них счел необходимым дополнить систему Цермело–Френкеля вспомогательной аксиомой, которая, собственно, и позволила им осуществить доказательство. Примерно такое же возражение выдвигалось и против более поздних доказательств. В 1947 г. Гёдель предположил, что гипотеза континуума независима от аксиом Цермело–Френкеля и от аксиомы выбора.

В 1963 г. профессор математики Станфордского университета Пол Козн (р. 1934) доказал, что и аксиома выбора, и гипотеза континуума независимы от остальных аксиом Цермело–Френкеля, если те непротиворечивы, т.е. иначе говоря, аксиома выбора и гипотеза континуума не могут быть доказаны на основе остальных аксиом Цермело–Френкеля. Более того, гипотеза континуума и тем более обобщенная гипотеза континуума не могут быть доказаны в системе Цермело–Френкеля, даже если ее дополнить аксиомой выбора. (Аксиома выбора следует из системы аксиом Цермело–Френкеля, не содержащей аксиомы выбора, но дополненной обобщенной гипотезой континуума.) Эти два результата по независимости означают, что в системе Цермело–Френкеля аксиома выбора и гипотеза континуума неразрешимы. В частности, для гипотезы континуума результат Козна означает, что может существовать трансфинитное число, заключенное между $\aleph_0$ и $2^{\aleph_0}$ (или c), хотя такое трансфинитное число не соответствует ни одному известному множеству.

В принципе метод Козна, получивший название метода форсинга, не отличался от других доказательств независимости.¹⁰⁶ Напомним, что для доказательства независимости аксиомы Евклида о параллельных на основе остальных аксиом евклидовой геометрии требуется найти интерпретацию, или модель, которая удовлетворяла бы всем остальным аксиомам, кроме аксиомы о параллельных.¹⁰⁷ Такая модель должна быть непротиворечивой, так как в противном случае она может также удовлетворять аксиоме, независимость которой нас интересует. В своем доказательстве Козн усовершенствовал более ранние работы Френкеля, Гёделя и других авторов, используя без каких-либо вспомогательных условий только аксиомы Цермело–Френкеля. Доказательства независимости аксиомы выбора, хотя и менее удовлетворительные, были известны до Козна, но вопрос о независимости гипотезы континуума до появления его работы оставался открытым.

Приступая к построению математики на основе теории множеств (или даже на логистической или формалистской основе), можно выбрать ту или иную из возможных исходных позиций. Можно запретить себе использовать аксиому выбора и гипотезу континуума. Приняв такое решение, мы ограничим круг теорем, доказываемых в рамках системы. «Основания математики» не включают аксиому выбора в число основных логических принципов, но при доказательстве теорем используют ее, формулируя в явном виде. В современной математике это главное. Можно поступить иначе и включить в число аксиом системы либо аксиому выбора, либо гипотезу континуума, либо оба утверждения вместе. Можно заменить отрицаниями либо одно утверждение, либо другое, либо оба. Отрицая аксиому выбора, можно отказаться от процедуры явного выбора представителей даже для счетной совокупности множеств. Отрицая гипотезу континуума, можно предположить, что $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ или что $2^{\aleph_0} = \aleph_3$. Именно так, по существу, и поступил Козн при построении своей модели.

Сказанное означает, что существует не одна, а много математик. Теория множеств (рассматриваемая отдельно от остальных оснований математики) может развиваться во многих направлениях (ср. [17*]¹⁰⁸). Кроме того, аксиому выбора можно использовать либо лишь для конечного числа множеств, либо для конечной, или счетной, совокупности множеств, либо для

¹⁰⁶ **Яглом:** Помимо статьи [17*: Cohen P.J., Reuben Hersh. Non-Cantorian Set Theory. – Scientific American, Dec. 1967, p. 104–116. [Русский перевод: Козн П., Херш Р. Неканторовская теория множеств. – Природа, 1969, № 4, с. 43–51; в кн.: Математика в современном мире. – М.: Знание, 1969, с. 20–32], рассчитанной на самую широкую аудиторию, можно назвать обстоятельную книгу [90: Козн П.Дж. Теория множеств и континуум-гипотеза. – М.: Мир, 1969] и обзор [91: Манин Ю.И. Проблема континуума. – В кн.: Современные проблемы математики, т.5. – М.: ВИНТИ, с. 5–72].

¹⁰⁷ В теории групп аксиома коммутативности умножения не зависит от остальных аксиом группы. Существуют модели группы, удовлетворяющие аксиоме коммутативности (например, обычные положительные и отрицательные числа); другие же модели (скажем, кватернионы) аксиоме коммутативности не удовлетворяют.

¹⁰⁸ Cohen P.J., Reuben Hersh. Non-Cantorian Set Theory. – Scientific American, Dec. 1967, p. 104–116. [Русский перевод: Козн П., Херш Р. Неканторовская теория множеств. – Природа, 1969, № 4, с. 43–51; в кн.: Математика в современном мире. – М.: Знание, 1969, с. 20–32.]

любой совокупности множеств. Все эти возможные варианты были реализованы разными математиками.

С появлением коэновских доказательств независимости математика оказалась в еще более затруднительном положении, чем это было при создании неевклидовой геометрии. Как мы уже говорили (гл. VIII), осознав независимость аксиомы Евклида о параллельных от остальных аксиом евклидовой геометрии, математики сумели построить несколько неевклидовых геометрий. Результаты Коэна поставили математиков перед проблемой выбора: какому из многочисленных вариантов двух аксиом (аксиомы выбора и гипотезы континуума) следует отдать предпочтение перед другими? Даже если ограничиться теоретико-множественным подходом к математике, число возможных вариантов оказывается ошеломляюще большим.

Остановить свой выбор на одном из многих вариантов нелегко, так как в любом случае принятие определенной редакции аксиом имеет свои и положительные, и отрицательные стороны. Отказ от любого использования аксиомы выбора и гипотезы континуума, т.е. как от самих аксиом, так и от их отрицаний, как мы уже отмечали, резко сужает круг утверждений, которые могут быть доказаны в рамках определенной формальной системы, и вынуждает отказаться от многих фундаментальных результатов современной математики. Аксиома выбора необходима даже для доказательства того, что любое бесконечное множество S содержит счетное или несчетное бесконечное собственное подмножество. Теоремы, доказательства которых требуют использования аксиомы выбора, играют важную роль в современном математическом анализе, топологии, абстрактной алгебре, теории трансфинитных чисел и в других областях математики. Отказ от аксиомы выбора связал бы математику по рукам и ногам.

С другой стороны, принятие аксиомы выбора позволяет доказывать теоремы, мягко говоря, противоречащие интуиции. Одна из таких теорем известна под названием парадокса Банаха–Тарского. В нестрогой формулировке эта удивительная теорема звучит следующим образом. Пусть даны два шара – один размером с футбольный мяч, другой – размером с Землю. Оба шара можно разбить на **конечное** число неперекрывающихся частей так, что каждая часть одного шара будет конгруэнтна одной, и только одной, части другого шара. Иначе говоря, теорема Банаха–Тарского означает, что, разрезав земной шар на мелкие кусочки и пересложив их в другом порядке, мы можем получить футбольный мяч. Ранее, в 1914 г., был получен еще один парадоксальный результат (составляющий на самом деле частный случай парадокса Банаха–Тарского): было доказано, что, разбив шар на четыре части, мы можем переложить эти части так, что получатся два шара того же радиуса, что и исходный шар. В отличие от парадоксов, с которыми столкнулась в начале XX в. теория множеств, парадокс Банаха–Тарского и его ранее известный частный случай не являются противоречиями. Это логические следствия из аксиом теории множеств и аксиомы выбора.

Отказ от общей аксиомы выбора приводит к странным следствиям. Один узкоспециальный результат, говорящий математикам несравненно больше, чем нематематикам, состоит в том, что каждое линейное множество измеримо. Иными словами, поскольку из аксиомы выбора следует существование неизмеримых множеств, аксиому выбора можно отрицать, предполагая, что каждое линейное множество измеримо. Для трансфинитных кардинальных чисел отрицание аксиомы выбора порождает другие странные следствия. Что же касается гипотезы континуума, то тут совершенно неизвестно, к каким важным следствиям может привести как принятие, так и отрицание аксиомы выбора. Но если предположить, что $2^{\aleph_0} = \aleph_2$, то каждое множество вещественных чисел становится измеримым. Можно вывести много других новых следствий, но ни одно из них не имеет решающего значения.

Подобно тому как работа над аксиомой о параллельных привела к расчленению единого потока развития геометрии на множество рукавов, доказанная Коэном независимость аксиомы выбора и гипотезы континуума сделала реальной возможность раздробления математики (прежде всего теоретико-множественной, хотя результаты Коэна затронули и другие направления в основаниях математики) на множество различных направлений. Каждое из таких направлений вполне приемлемо, и не существует видимых причин для того, чтобы отдать предпочтение одному направлению перед другим. После выхода в свет работы Коэна (1963) было обнаружено немало новых утверждений, неразрешимых в системе Цермело–Френкеля; поэтому число способов, которыми можно выбирать аксиомы теории множеств, комбинируя аксиоматику Цермело–Френкеля с тем или иным (либо несколькими) неразрешимым утверждением, поистине безгранично. Доказательство независимости аксиомы выбора и гипотезы континуума буквально потрясло математиков: их изумление можно разве лишь сравнить с тем чувством, которое

испытал бы современный архитектор, если бы его убедили, что, внеся небольшие изменения в чертежи, по которым он строит учреждение, он может соорудить по ним средневековый рыцарский замок.

Ныне математики, работающие в области теории множеств, надеются, что, модифицировав разумным образом аксиоматику этой части математики, они смогут выяснить, выводимы ли из общепринятого варианта аксиом теории множеств аксиома выбора и гипотеза континуума – каждая в отдельности или обе вместе. По мнению Гёделя, их надежды отнюдь не безосновательны. В этом направлении было предпринято немало усилий, однако пока они не увенчались успехом. Возможно, что когда-нибудь математики всё же придут к единому мнению относительно того, какими аксиомами надлежит здесь пользоваться.

Математический мир был потрясен не только работами Гёделя, Черча и Коэна. Последующие годы умножили заботы математиков. Исследования, начатые в 1915 г. Леопольдом Левенгеймом (1878–1940), а затем усовершенствованные и завершенные Торальфом Сколемом (1887–1963) в серии работ, осуществленных в 1920–1933 гг., выявили новые изъяны в математике. Суть теоремы, получившей название теоремы Левенгейма–Сколема, сводится к следующему. Предположим, что составлена система аксиом (логических и математических) для какой-то области математики или теории множеств, которая рассматривается как основа всей математики. Наиболее подходящим примером, пожалуй, может служить система аксиом для целых чисел. Составляя ее, математики стремились к тому, чтобы эти аксиомы полностью описывали положительные целые числа, и только целые числа, но, к своему удивлению, обнаружили совершенно иные интерпретации, или модели, тем не менее удовлетворяющие всем аксиомам. Например, в то время как множество целых чисел счетно, т.е. – если воспользоваться обозначениями Кантора – существует $\aleph_0$ целых чисел, в других интерпретациях возникают множества, содержащие столько же элементов, сколько их содержит множество всех вещественных чисел, и множества, отвечающие еще большим трансфинитным числам. Происходит и обратное. Так, предположим, что некий математик составил систему аксиом для теории множеств таким образом, что они позволяют описывать и описывали несчетные совокупности множеств. Нередко он обнаруживает счетную (перечислимую) совокупность множеств, удовлетворяющую всем аксиомам, и другие трансфинитные интерпретации, совершенно отличные от тех, которые он имел в виду, составляя свою систему аксиом. Более того, выяснилось, что **каждая** непротиворечивая система аксиом допускает счетную модель.

Что это означает? Предположим, кому-то пришла в голову мысль составить перечень характерных черт, присущих, по его мнению, американцам, и только американцам. К своему удивлению, в действительности он обнаруживает людей, обладающих всеми перечисленными им отличительными особенностями американцев и сверх того наделенных множеством собственных специфических черт. Иначе говоря, система аксиом, составленная для описания одного-единственного класса математических объектов, явно не соответствует своему назначению. Теорема Гёделя о неполноте свидетельствует о том, что любая система аксиом не позволяет доказать (или опровергнуть) все теоремы той области математики, для описания которой данная система аксиом предназначена. Теорема Левенгейма–Сколема утверждает, что любая система аксиом допускает намного больше существенно различных интерпретаций, чем предполагалось при ее создании. Аксиомы не устанавливают пределов для интерпретаций, или моделей. Следовательно, математическую реальность невозможно однозначно включить в аксиоматические системы.¹⁰⁹

Одна из причин появления «побочных» интерпретаций состоит в том, что в каждой аксиоматической системе имеются неопределяемые понятия. Ранее считалось, что аксиомы неявно «определяют» эти понятия. В действительности же одних аксиом недостаточно. Следовательно, неопределяемые понятия могут трансформироваться каким-то заранее непредсказуемым образом.

¹⁰⁹ В некоторых более ранних работах «доказывалось», что аксиоматические системы, положенные в основу той или иной области математики, категоричны, т.е. что все интерпретации любой из таких аксиоматических систем изоморфны – совпадают по существу и отличаются лишь терминологией. Но такого рода «доказательства» были нестрогими, поскольку строились на логических принципах, недопустимых в метаматематике Гильберта, и, кроме того, прежде аксиоматические основы не формулировались столь тщательно, как теперь. Ни одна система аксиом, несмотря на «доказательства» Гильберта и других авторов, не является категоричной.

Теорема Левенгейма–Сколема не менее удивительна, чем теорема Гёделя о неполноте. Она нанесла еще один удар по аксиоматическому методу, который с начала XX в. и вплоть до недавнего времени считался единственным разумным подходом и который поныне используется логицистами, формалистами и представителями теоретико-множественного направления.

Теорему Левенгейма–Сколема, однако, нельзя считать полностью неожиданной. Действительно, теорема Гёделя о неполноте утверждает, что каждая аксиоматическая система неполна. Существуют неразрешимые утверждения. Пусть p – одно из таких утверждений. Ни p , ни его отрицание – утверждение «не p » – не вытекает из аксиом. Следовательно, мы могли бы исходить из более широкой системы аксиом, включив в нее либо исходную систему аксиом и p , либо исходную систему аксиом и «не p ». Эти две системы аксиом существенно различны, поскольку их интерпретации не могут быть изоморфными. Иначе говоря, из неполноты следует некатегоричность. Но теорема Левенгейма–Сколема содержит гораздо более сильное и радикальное отрицание категоричности. Она утверждает, что и без введения какой-либо дополнительной аксиомы существуют принципиально различные (неизоморфные) интерпретации, или модели. Разумеется, аксиоматическая система непременно должна быть неполной, ибо в противном случае неизоморфные интерпретации были бы невозможны.

Анализируя собственный результат, Сколем в работе 1923 г. пришел к выводу о непригодности аксиоматического метода в качестве основы для теории множеств. Даже Джон фон Нейман был вынужден признать в 1925 г., что на предложенных им и другими авторами системах аксиом теории множеств лежит «печать нереальности... Категорическая аксиоматизация теории множеств не существует... А поскольку нет ни одной аксиоматической системы для математики, геометрии и т.д., которая не предполагала бы теорию множеств, заведомо не существуют категоричные аксиоматические бесконечные системы». Это обстоятельство, продолжает Нейман, «свидетельствует, как мне кажется, в пользу интуиционизма».

Математики пытались успокоить себя, вспоминая историю с неевклидовой геометрией. Когда после многовековой борьбы с аксиомой параллельности Лобачевский и Бойаи предложили свою неевклидову геометрию, а Риман указал еще одну неевклидову геометрию, математики сначала были склонны отмахнуться от новых геометрий, ссылаясь при этом на ряд причин. Одной из них было бездоказательное утверждение о возможной противоречивости новых геометрий. Однако, как показали найденные впоследствии интерпретации, неевклидовы геометрии оказались непротиворечивыми. Например, удвоенную эллиптическую геометрию Римана, которая по замыслу автора должна была относиться к фигурам на обычной плоскости, удалось интерпретировать как геометрию фигур на поверхности сферы, т.е. она обрела модель, существенно отличную от исходной авторской интерпретации (гл. VIII). Открытие новой модели, или интерпретации, было встречено с энтузиазмом, что вполне понятно: ведь существование такой модели доказало непротиворечивость геометрии. Кроме того, новая модель не приводила ни к каким расхождениям в числе объектов – точек, линий, плоскостей, треугольников и т.д. – по сравнению с исходной авторской интерпретацией. Выражаясь языком математики, обе интерпретации были изоморфны. Теорема Левенгейма–Сколема охватывает неизоморфные, существенно различные интерпретации аксиоматических систем.

Говоря об абстрактности математического мышления, Пуанкаре как-то заметил, что математика – это искусство давать различным вещам одинаковые названия. Так, понятие группы отражает свойства целых чисел и матриц относительно сложения, а также геометрических преобразований и других математических объектов. Теорема Левенгейма–Сколема подтверждает высказывание Пуанкаре, но придает ему обратный смысл. Аксиомы групп отнюдь не предназначены для того, чтобы указывать на необходимость одинакового объема и характера всех мыслимых интерпретаций (поэтому аксиомы групп не являются категоричными, как и аксиомы евклидовой геометрии, если опустить аксиому о параллельных). Аксиоматические системы, к которым применима теорема Левенгейма–Сколема, предназначаются для задания одной вполне конкретной интерпретации, и, будучи применимыми к совершенно различным моделям, они тем самым не соответствуют своему назначению.

Кого боги вздумают погубить, того они прежде всего лишают разума. Возможно, боги сочли, что после работ Гёделя, Коэна, Левенгейма и Сколема математикам еще удалось сохранить остатки разума, – и подстроили новую ловушку, чтобы довести тех до полного безумия. Развивая свой вариант дифференциального и интегрального исчисления, Лейбниц ввел величины, названные им инфинитезимальными или бесконечно малыми (гл. VI). Бесконечно малая, по Лейбницу, отлична от нуля, но меньше 0,1, 0,01, 0,001 и любого другого положи-

тельного члена. Лейбниц утверждал также, что с бесконечно малыми величинами надлежит обращаться так же, как с обычными числами. Бесконечно малые величины были идеальными элементами, фикциями, однако приносили вполне ощутимую реальную пользу. Отношение двух бесконечно малых, по Лейбницу, определяло производную – одно из основных понятий математического анализа. И с бесконечно большими величинами Лейбниц обращался так же, как с обычными числами.

На протяжении всего XVIII в. математики вели борьбу с понятием бесконечно малой величины, производили с бесконечно малыми действия по произвольным, ничем не обоснованным и даже противоречащим логике правилам и в конце концов отвергли бесконечно малые величины как лишённые всякого смысла. Коши своими трудами не только наложил запрет на бесконечно малые величины, но и вообще ликвидировал необходимость обращения к ним. Тем не менее поиск законных оснований для использования бесконечно малых исподволь продолжался. На вопрос Гёсты Миттаг-Леффлера (1846–1927), не могут ли кроме рациональных и всех вещественных чисел (и, так сказать, «между» этими двумя классами чисел) существовать числа иного рода, Кантор дал резко отрицательный ответ. В 1887 г. он опубликовал работу, где доказал логическую невозможность существования бесконечно малых, основываясь, по существу, на так называемой аксиоме Архимеда, утверждающей, что для любого вещественного числа a найдется такое целое число n , при котором величина na будет больше любого наперед заданного вещественного числа b . Пеано также опубликовал работу, в которой доказывал, что бесконечно малые величины не существуют. К такому же выводу пришел в своих «Принципах математики» (1903) и Бертран Рассел.

Но даже суждения великих людей не следует принимать с поспешностью. Во времена Аристотеля, да и значительно позже, многие мыслители отвергали представление о шарообразности Земли как лишённое смысла на том основании, что в таком случае наши «антиподы» должны были бы ходить по земле вниз головой. Однако сколь ни «убедительны» были их доводы, Земля, как оказалось, всё же имеет шарообразную форму. Аналогичным образом, несмотря на все доказательства, изгонявшие лейбницеvские бесконечно малые из математики, некоторые исследователи упорно пытались создать логическую теорию бесконечно малых.

Поль Дюбуа-Реймон, Отто Штольц и Феликс Клейн были уверены в осуществимости построения непротиворечивой теории на основе понятия бесконечно малой. Более того, Клейн указал, от какой именно аксиомы вещественных чисел (аксиомы Архимеда) необходимо отказаться, чтобы такая теория стала возможной. В 1934 г. Сколем ввел новые числа (получившие название гипервещественных), отличные от обычных вещественных чисел, и установил некоторые их свойства. Кульминацией исследований некоторых математиков в этой области стало создание новой теории, узаконившей бесконечно малые. Наиболее существенный вклад внес в эту теорию Абрахам Робинсон (1918–1974).

Новая система – так называемый нестандартный анализ (ср. элементарную брошюру [85]¹¹⁰ или учебники [76*]¹¹¹, [86]¹¹² и [87]¹¹³) – вводит гипервещественные числа, включающие в себя обычные («старые») вещественные числа и бесконечно малые. Последние определяются практически так же, как у Лейбница: положительная бесконечно малая есть число, которое меньше любого обычного положительного вещественного числа, но больше нуля¹¹⁴ (аналогично

¹¹⁰ Успенский В.А. Нестандартный, или неархимедов, анализ. – М.: Знание, 1983.

¹¹¹ Robison A, Non-Standard Analysis, 2nd ed. – New York: North-Holland, 1974.

¹¹² Девис М. Прикладной нестандартный анализ. – М.: Мир, 1980.

¹¹³ Lutz R., Goze M. Nonstandard Analysis: A Practucal Guide with Applications. – N.Y.: Springer, 1981.

¹¹⁴ **Яглом:** Грубо говоря, аксиоматика «гипервещественных» чисел R^* получается из аксиоматики вещественных чисел R («укороченный» вариант последней, включающей все необходимое для построения аналитической геометрии, содержится в книге [92: Дьедонне Ж. Линейная алгебра и элементарная геометрия. – М.: Наука, 1972], а более полные ее варианты – во многих учебных пособиях, например, [93: Фесрерман С. Числовые системы. – М.: Наука, 1971] или [94: Берс Л. Математический анализ, т. I. – М.: Высшая школа, 1975]) прибавлением «отрицания аксиомы Архимеда», которому можно придать следующую форму: существует такое число ε («бесконечно малое число»), что $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon < 1/n$ при любом натуральном n . Следствием этой аксиомы и других аксиом, постулирующих свойства действий (сложение, умножение) над числами, являет довольно сложная структура «гипервещественной прямой» R^* ; впрочем, для использования бесконечно малых в (поставленных А. Робинсоном на твердую почву) рассуждениях детальное значение структуры R^* вовсе не обязательно.

отрицательная бесконечно малая больше любого отрицательного вещественного числа, но меньше нуля). Бесконечно малые в нестандартном анализе являются фиксированными числами, а не переменными величинами в смысле Лейбница и не переменными величинами, стремящимися к нулю, как понимал иногда бесконечно малые величины Коши и как понимают их сегодня в стандартных учебниках «высшей математики». Кроме того, нестандартный анализ вводит новые бесконечные элементы, обратные бесконечно малым, но не являющиеся трансфинитными числами Кантора. Каждое конечное гипервещественное число r представимо в виде $x + \alpha$, где x – обычное вещественное число, а α – бесконечно малая.

Понятие бесконечно малого элемента позволяет говорить о бесконечно близких гипервещественных числах. Два гипервещественных числа называются бесконечно близкими, если их разность бесконечно мала. Следовательно, каждое гипервещественное число бесконечно близко некоторому (обычному) вещественному числу, так как разность между ними бесконечно мала. Обращаться с гипервещественными числами можно так же, как с обычными вещественными числами.¹¹⁵

Новая система гипервещественных чисел позволяет вводить функции, принимающие обычные вещественные или гипервещественные значения. На языке гипервещественных чисел можно по-новому определить непрерывность функции: функция $f(x)$ непрерывна при $x = a$, если разность $f(x) - f(a)$ бесконечно мала, когда бесконечно мала разность $x - a$. Гипервещественные числа позволяют ввести определения производной и других понятий математического анализа и доказать все теоремы анализа. Но главное состоит в том, что в системе гипервещественных чисел обретает точность и доказательность подход к построению анализа, который ранее отвергался как недостаточно ясный и даже бессмысленный.¹¹⁶

В какой мере система гипервещественных чисел способствует увеличению мощи математики? Пока введение гипервещественных чисел не привело к сколько-нибудь значительным новым результатам.¹¹⁷ Важно другое: нестандартный анализ открыл новый путь, по которому одни математики пойдут охотно (уже появилось несколько книг по нестандартному анализу), тогда как другие по тем или иным причинам его отвергнут. С появлением нестандартного анализа с облегчением вздохнули лишь физики, поскольку они, невзирая на запрет Коши, всегда широко пользовались бесконечно малыми (впрочем, их привычки здесь столь устойчивы, что пока они не уделили особенно большого внимания «новому» анализу).

Развитие оснований математики с начала XX в. протекает поистине драматически, и современное состояние математики по-прежнему весьма плачевно, что вряд ли можно считать нормальным. Свет истины более не освещает путь, по которому следовало бы двигаться. Вместо

¹¹⁵ Доказательства Кантора и Пеано корректны, если использовать обычное аксиоматические свойства вещественных чисел. Единственное свойство, которые необходимо изменить, чтобы гипервещественные числа стали возможными, – это аксиома Архимеда, о которой мы уже неоднократно упоминали. Система гипервещественных чисел R^* неархимедова в обычном смысле слова. Но она становится архимедовой, если включить в систему гипервещественных чисел бесконечные кратные гипервещественного числа a^* .

¹¹⁶ Например, в нестандартном анализе отношение бесконечно малых dy/dx существует в системе R^* и для $y = x^2$ отношение dy/dx равно $2x + dx$, где dx – бесконечно малая, т.е. dy/dx – гипервещественное число. Производная функции $y = x^2$ – это обычная вещественная часть гипервещественного числа dy/dx , т.е. (вещественное) число $2x$. Аналогично определенный интеграл в нестандартном анализе есть сумма бесконечно большого числа бесконечно малых (число слагаемых – гипервещественное натуральное число).

¹¹⁷ **Яглом:** Сегодня уже существуют задачи, которые удалось решить лишь с использованием нестандартного анализа; правда, видимо, все эти задачи можно было бы решить и традиционными методами, но в таком случае решения были бы, вероятно, значительно более сложными. Вообще, нестандартный анализ надо рассматривать не как новую область математики, а скорее лишь как еще один математический «язык», идущий от Лейбница, но лишь в наши дни ставший равноправным, скажем, с «ε-δ-языком» Коши. При этом язык нестандартного анализа оказывается весьма удобным и естественным в ряде прикладных задач (см., например, [87: Lutz R., Goze M. Nonstandard Analysis: A Practical Guide with Applications. – N.Y.: Springer, 1981]; ср. со сказанным в тексте об использовании «бесконечно малых величин» физиками и техниками); ряд преподавателей высшей школы (например, в нашей стране М.М. Постников) высказывает убеждение в педагогических достоинствах этой модификации лейбнического «исчисления дифференциалов» при изложении основ «высшей математики» начинающим (ср. [95: Keister H.J. Elementary Calculus. – Boston: Weber and Schmidt (Prindle), 1976], [96: Sullivan K. The Teaching of Elementary Calculus Using the Nonstandard Analysis Approach. – American Mathematical Monthly, 1976, vol. 83, № 5, с. 370–375]).

единой, вызывавшей общее восхищение и одинаково приемлемой для всех математической науки, доказательства которой считались наивысшим достижением здравого смысла, хотя порой и нуждались в коррекции, мы имеем теперь различные, конфликтующие между собой подходы к математике. Несколько взаимоисключающих подходов имеется в рамках одного лишь теоретико-множественного направления, не говоря уже о существовании других самостоятельных направлений: логицизма, интуиционизма и формализма. В этих школах также выделяются различные и даже конфликтующие подходы. Так, конструктивистское направление, возникшее в недрах интуиционизма, разделилось на множество группировок. В рамках формализма принципы математики могут быть выбраны по-разному. Нестандартный анализ, не будучи порождением какой-либо одной школы, допускает различные подходы ко многим проблемам математического анализа, в свою очередь приводящие к различным и даже противоположным точкам зрения. То, что считается алогичным и отвергается одной школой, другая объявляет здравым и вполне приемлемым.

Итак, все попытки исключить возможные противоречия и доказать непротиворечивость математических построений до сих пор не увенчались успехом. Между математиками нет более единого мнения относительно того, принимать аксиоматический подход (и если принимать, то какой системе аксиом отдать предпочтение) или остановиться на неаксиоматическом интуиционистском подходе. Большинство современных математиков склонны рассматривать свою науку как совокупность различных аксиоматически определяемых структур, с одной стороны, позволяющих охватить всё, что должно входить в математику, а с другой – охватывающих больше, чем положено. Современные математики расходятся во мнениях даже относительно того, какие методы рассуждений следует считать допустимыми. Закон исключенного третьего ныне не принадлежит к числу бесспорных принципов логики, и чистые доказательства существования, не дающие готового рецепта вычисления той величины, существование которой доказывается, ставятся под сомнение независимо от того, используется или не используется в них закон исключенного третьего. От претензий на безупречную доказательность своих рассуждений математикам пришлось отказаться. Возможность неоднозначного выбора аксиоматики и подходов привела к возникновению различных математик. Последние исследования в области оснований математики дошли до той черты, за которой открывается лишь первозданный хаос.

Интуиционисты представляли единственное направление в математике, сохранившее самообладание и выдержку в 30-е годы, когда описанные выше результаты сломили логицистов, формалистов и сторонников теоретико-множественного направления. Игра с логическими символами и принципами, захватившая умы гигантов математической науки, для интуиционистов была пустой забавой. Непротиворечивость математики очевидна, считали они, ибо ее гарантирует человеческий разум, постигающий истины на интуитивном уровне. Аксиому выбора и гипотезу континуума интуиционисты отвергали как неприемлемые, о чем заявил еще в 1907 г. Брауэр. Неполнота и существование неразрешимых утверждений не беспокоили интуиционистов, ибо они могли с полным основанием сказать представителям других направлений: «А что мы вам говорили?» Но даже интуиционисты неохотно отказывались от разделов математики, возникших еще в XIX в., но не удовлетворявших их требованиям. Интуиционисты считали неприемлемым доказывать существование математических объектов с помощью закона исключенного третьего и объявляли удовлетворительными только такие доказательства, которые позволяли сколь угодно точно вычислять величину, существование которой доказывается. Иначе говоря, интуиционисты боролись за конструктивные доказательства существования.

Итак, ни одна школа не имела права претендовать на то, что она представляет математику в целом. К сожалению, как отметил в 1960 г. Аренд Гейтинг, начиная с 30-х годов дух дружеского сотрудничества между школами уступил место духу непримиримого соперничества.

В 1901 г. Бертран Рассел сказал: «Один из величайших триумфов математики состоит в открытии того, что представляет собой математика в действительности». Ныне эти слова поражают нас своей наивностью. Уже сегодня различные школы по-разному воспринимают математику как таковую, и в будущем это различие в подходах, по-видимому, только усилится. Существующие ныне школы каждая по-своему пытались обосновать современную математику. Но если заглянуть в прошлое и вспомнить об античной математике, а также о математике XVII и XIX вв., то происшедшие изменения, разительные и драматические, станут особенно заметными. Представители некоторых современных школ в основаниях математики пытались подвести

надежный фундамент под математику начала XX в. Быть может, их результаты послужат математике XXI в.? Интуиционисты воспринимают математику как живой и развивающийся организм. Но предсказывала ли их «интуиция» что-нибудь такое, с чем математикам не приходилось сталкиваться в прошлом? Даже в 30-е годы отрицательный ответ на такой вопрос заведомо не соответствовал бы истине. Следовательно, производимые время от времени пересмотры оснований математики просто необходимы.

Наш рассказ о событиях, развернувшихся в основаниях математики в XX в., мы хотели бы закончить следующей притчей. На берегах Рейна в течение многих веков возвышался прекрасный замок. Пауки, обитавшие в подвалах замка, затянули паутиной все его проходы. Однажды сильный порыв ветра разрушил тончайшие нити паутины, и пауки принялись поспешно восстанавливать образовавшиеся бреши: они считали, что замок держится на их паутине!

XIII. Математика в изоляции

Я решил отказаться от чисто абстрактной геометрии, т.е. от рассмотрения вопросов, служащих лишь для упражнения ума, чтобы заняться изучением геометрии иного рода, предмет которой составляет объяснение явлений природы.

Рене Декарт



История математики знает не только величайшие взлеты, но и глубокие падения. Потеря истины, бесспорно, может считаться подлинной трагедией, ибо истины – драгоценнейшее из достояний человечества, и утрата даже одной из них – более чем основательная причина для огорчения. Осознание того, что сверкающая великолепием витрина человеческого разума далеко не совершенна по своей структуре, страдает множеством недостатков и подвержена чудовищным противоречиям, могущим вскрыться в любой момент, нанесло еще один удар по статусу математики. Но бедствия, обрушившиеся на математику, были вызваны и другими причинами. Тяжелые предчувствия и разногласия между математиками были обусловлены самим ходом развития математики за последние сто лет. Большинство математиков как бы отгородились от внешнего мира, сосредоточив усилия на проблемах,

возникавших внутри самой математики, – по существу, они порвали с естествознанием. Это изменение в развитии математики нередко описывают как обращение к чистой математике, противопоставляемой прикладной математике (ср., например, [97]¹¹⁸). Но оба термина – прикладная математика и чистая математика, – хотя мы также будем ими пользоваться, не вполне точно передают суть происшедшего.

Что представляла собой математика? Для предыдущих поколений математика была прежде всего и главным образом тончайшим творением человеческого разума, предназначенным для исследования природы. Фундаментальные понятия, универсальные методы и почти все наиболее важные теоремы математики были разработаны и доказаны именно в процессе усовершенствования математики как инструмента познания мира. Естествознание было кровью и плотью математики и питало ее живительными соками. Математики охотно сотрудничали с физиками, астрономами, химиками и инженерами в решении различных научно-технических проблем, а часто и сами являлись выдающимися физиками и астрономами. В XVII–XVIII вв., а также на протяжении большей части XIX в. различие между математикой и теоретическим естествознанием отмечалось крайне редко.¹¹⁹ Многие ведущие математики, работая в области

¹¹⁸ Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г. Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов. – Киев: Наукова думка, 1976; Механика и прикладная математика (логика и особенности приложений математики). – М.: Наука, 1983.

¹¹⁹ **Яглом:** Различие между математикой и «теоретическим» естествознанием полностью осознавал Лейбниц. «Универсальная математика, – писал он, – это, так сказать, логика воображения»; предметом ее является «все, что в области воображения поддается точному определению». В XIX в. специфику математики, отличие ее от естественных (и гуманитарных) наук отчетливо понимали, скажем, замечательный немецкий математик Герман Грассман, говоривший, что «чистая математика есть наука особого бытия, поскольку она рождена в мышлении», или один из создателей математической логики англичанин Джордж Буль, еще четче сформулировавший ту же мысль: «Математика изучает операции, рассматриваемые сами по себе, независимо от различных материй, к которым они могут быть приложены».

астрономии, механики, гидродинамики, электромагнетизма и теории упругости, получили здесь несравненно более важные результаты, чем в собственно математике. Математика была царицей и одновременно служанкой естественных наук.

Мы уже рассказывали (гл. I–IV) о нескончаемых усилиях, которые с античных времен предпринимало человечество, чтобы вывести у природы ее «математические тайны». Столь высокая приверженность изучению природы отнюдь не ограничивала прикладную математику решением лишь физических проблем. Великие математики нередко выходили за рамки тех проблем, которые стояли перед естествознанием их времени. А поскольку они действительно были великими и полностью сознавали традиционную роль своей науки, им удавалось наметить направления исследований, которые оказывались немаловажными для теоретического естествознания или проливали свет на понятия, уже применявшиеся для исследования природы. Так, Пуанкаре, многие годы посвятивший астрономии (его перу принадлежит фундаментальный трехтомный труд «Новые методы небесной механики»), считал необходимым разрабатывать те вопросы теории дифференциальных уравнений, которые могли способствовать дальнейшему развитию астрономии.

Некоторые математические работы дополняли или завершали исследования, полезность которых была установлена ранее и ни у кого не вызывала сомнений. Так, совершенно очевидно, что если дифференциальные уравнения одного и того же типа неоднократно встречаются в приложениях, то разумно изучить дифференциальное уравнение общего вида, охватывающее все частные случаи. Это позволяет разработать более удобный или отличающийся большей общностью метод решения, а также получить наибольшее количество сведений о всем классе решений. Одна из отличительных особенностей математики, ее абстрактность, позволяет описывать на математическом языке самые различные физические явления. Так, волны на воде, звуковые и радиоволны математика описывает одним и тем же дифференциальным уравнением, известным под названием волнового уравнения. Те дополнительные сведения, которые математик обнаруживает, исследуя волновое уравнение (впервые выведенное при изучении звуковых волн), могли оказаться (и действительно оказывались) весьма полезными при решении, например, некоторых задач из теории радиоволн. Распознавание за внешне различными явлениями тождественных математических структур позволяет упрочить и понять многообразие теоретических построений, вызванных к жизни проблемами познания реального мира, и установить общую абстрактную основу описания таких явлений.

Доказательство теорем существования решений дифференциальных уравнений, впервые предпринятое Коши, должно было отвести все сомнения в том, что физические проблемы, сформулированные на языке математики, допускают решение, и тем самым вселить уверенность в том, что поиск этих решений будет не напрасным. Так чисто математические работы, посвященные доказательству теорем существования, облекались физической плотью. Стимулом для работ Кантора по теории бесконечных множеств, породивших обширную литературу, было стремление ответить на некоторые вопросы теории бесконечных рядов – так называемых рядов Фурье,¹²⁰ которые широко использовались в разного рода приложениях.

Развитие математики приводило к постановке и настоящему поиску решения проблем, не связанных непосредственно с проблемами естествознания. Так, в XIX в. (гл. VIII) математики поняли, что определения многих понятий страдают расплывчатостью, а в математических рассуждениях и доказательствах немало пробелов. Движение за математическую строгость, принявшее необычайно широкий размах, не ставило целью решение каких бы то ни было естественнонаучных проблем, как не преследовали такой цели и позднее возникшие различные школы, пытавшиеся перестроить основания математики. И всё же гигантская работа по

Я. Бойаи (в отличие от Лобачевского или Гаусса) при создании неевклидовой геометрии подходил к ней не как к возможной системе устройства физической Вселенной, а как к чисто логической схеме, «аксиоматизированной структуре», как сказали бы мы сегодня. При этом любопытно отметить, что Лейбниц (в отличие от Ньютона), Грассман, Буль или Я. Бойаи не получили специального математического образования и были полностью свободны от давления сложившихся традиций, что в чем-то, конечно, ограничивало их возможности, но в то же время придавало их мышлению особую свежесть и остроту.

¹²⁰ **Яглом:** В приложениях математики широко используются *степенные ряды* вида $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$ и *тригонометрические ряды*, или *ряды Фурье* (скажем, $a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots$).

перестройке оснований математики, производимая в интересах самой этой науки, несомненно, явилась откликом на насущные проблемы не только чистой, но и прикладной математики.

Многие чисто математические работы дополняют и подкрепляют своими результатами старые, хорошо разработанные области математики или способствуют открытию новых направлений, которые обещают стать важными для различных приложений. Такого рода работы можно рассматривать как прикладную математику в самом широком смысле.

Но разве сто лет назад и ранее, спросит читатель, не было математики, созданной лишь ради нее самой, безотносительно к каким бы то ни было приложениям? Разумеется, была. Великолепным примером чистой математики может служить теория чисел. Хотя пифагорейцы считали, что, изучая целые числа, они постигают сокровенные тайны внутреннего строения материальных объектов (гл. I), впоследствии теория чисел стала совершенно самостоятельной наукой. Одним из первых математиков, изучавших числа «сами по себе», был Ферма. Начало проективной геометрии положили художники эпохи Возрождения, стремившиеся к реализму в живописи, а Жирар Дезарг и Блез Паскаль превратили проективную геометрию в последовательный метод получения новых результатов евклидовой геометрии. Но в XVIII в. работы Дезарга и Паскаля были забыты, а когда в XIX в. математики вновь обратились к проективной геометрии, они занимались ей главным образом из чисто эстетических побуждений, хотя от внимания наиболее проницательных геометров не ускользнули важные связи между проективной и неевклидовой геометриями. Многие проблемы были решены сами по себе только потому, что они заинтересовали кого-то из математиков и тем захотелось испытать свои силы.

Чистая математика, полностью оторванная от запросов естествознания, никогда не находилась в центре забот и интересов математиков. Ей отводилась роль своего рода забавы, отдохновения от гораздо более важных и увлекательных проблем, выдвигаемых естественными науками. Так, создатель теории чисел Ферма большую часть своего времени отдавал разработке аналитической геометрии, решению различных задач математического анализа и оптики (гл. VI). Он попытался заинтересовать теорией чисел Паскаля и Гюйгенса, но потерпел неудачу.¹²¹ В XVIII в. столь абстрактная наука, как теория чисел, привлекала лишь очень немногих математиков.

Эйлер, научные интересы которого были весьма разносторонними, не обошел вниманием и теорию чисел. Однако Эйлер был не только величайшим из математиков XVIII в., но и признанным авторитетом в области математической физики. Его работы поражают необычайной широтой: от глубоких математических методов решения физических проблем, например методов решения дифференциальных уравнений, до астрономии, гидродинамики, рационального конструирования судов и парусов, артиллерии, картографии, теории музыкальных инструментов и оптики.

Теорией чисел занимался и Лагранж, но основное время он уделял математическому анализу – области математики, жизненно важной для приложений (гл. III). Его шедевром по праву считается «Аналитическая механика» (*Mécanique analytique*), посвященная применению математических методов в механике. В 1777 г. Лагранж пожаловался одному из друзей: «Исследования по теории чисел стоят мне наибольших усилий, но, должно быть, имеют наименьшую ценность». Гаусс также посвятил теории чисел одну из своих величайших работ «Арифметические исследования» (*Disquisitiones arithmeticae*, 1801), которая по праву считается классической. Тот, кто прочитал только этот труд Гаусса, мог бы подумать, что автор «Арифметических исследований» – чистый математик. Но главной областью его деятельности была прикладная математика (гл. VI). Феликс Клейн в «Лекциях о развитии математики в XIX в.» [98]¹²² называет «Арифметические исследования» юношеской работой Гаусса.

Хотя Гаусс в дальнейшем неоднократно возвращался к теории чисел, он явно не считал ее важнейшим разделом математики. Ему нередко предлагали заняться доказательством Великой теоремы Ферма, гласящей, что при $n > 2$ никакие целые числа x , y и z не удовлетворяют

¹²¹ **Яглом:** В противоположность этому попытки Паскаля заинтересовать Ферма и Гюйгенса теорией вероятностей, в значительной степени созданной этими тремя учеными, оказалась полностью удачными; частично, видимо, это объяснялось тем, что теория вероятностей возникла сразу же как «прикладная» наука (со столь, впрочем, малопочтенной областью применения, как теория азартных игр), а частично, может быть, прозорливой интуицией гениев, «предчувствующих» будущие глубочайшие прикладные возможности создаваемой ими области математической науки.

¹²² Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX в. – М.–Л.: Гостехиздат. 1937.

соотношению $x^n + y^n = z^n$ [99]¹²³. Но в письме Вильгельму Ольберсу от 21 марта 1816 г. Гаусс заметил, что гипотеза Ферма – это изолированная, ни с чем не связанная теорема и поэтому не представляет особого интереса. Имеется немало гипотез, добавил Гаусс, которые пока не удалось ни доказать, ни опровергнуть, но сильная занятость другими делами не оставляет времени для задач того типа, которые рассмотрены в «Арифметических исследованиях». Гаусс надеялся, что гипотезу Ферма удастся доказать на основе другой выполненной им работы, но и тогда теорема Ферма будет одним из наименее интересных следствий из более общих его результатов.

Обычно в подтверждение того, что Гаусс, якобы, отдавал предпочтение чистой математике, приводят его знаменитое высказывание: «Математика – царица всех наук, арифметика – царица математики. Она часто снисходит до оказания услуг астрономии и другим естественным наукам, но при всех обстоятельствах первое место, несомненно, останется за ней». Однако вся научная деятельность Гаусса свидетельствует об обратном, и, возможно, это нехарактерное для Гаусса высказывание, должно быть, вырвалось у него под влиянием минуты. Подлинный же девиз всей его деятельности такой: «Ты, природа, моя богиня, твоим законам я преданно служу». По иронии судьбы именно необычайно тщательный подход Гаусса ко всему, что касалось согласованности математики с природой, привел – через его работы по неевклидовой геометрии – к глубоким и драматическим последствиям, подорвав веру Гаусса в истинность математических законов. В целом же по поводу математики до начала XX в. можно сказать, что хотя чистая математика уже и существовала, не было ни одного чистого математика.

Несколько событий в корне изменили отношение математиков к их собственной науке. Первым в ряду таких событий стало осознание того, что математика не является более сводом незыблемых истин о природе (гл. IV). Гаусс отчетливо показал это на примере геометрии, а появление кватернионов и матриц с их некоммутативным умножением ускорило понимание того, что даже обычная арифметика целых чисел не может рассматриваться как априорное знание – обстоятельство, которое Гельмгольц довел до сведения всего математического мира. Хотя это открытие не поставило под сомнение приложимость математики к описанию реального мира, но всё же оправданием усилий математиков более не могла считаться надежда на отыскание абсолютной истины или единого закона всего сущего.

Столь выдающиеся достижения математической мысли, как неевклидова геометрия и кватернионы, казалось, явно не согласуются с природой, хотя их создатели и исходили из физических соображений.¹²⁴ Тем не менее и неевклидова геометрия, и кватернионы, как выяснилось впоследствии, вполне применимы к описанию реального мира. Осознание того, что творения человеческого ума, равно как и все понятия, традиционно считавшиеся внутренне присущими «плану мироздания», весьма пригодны для описания природы, вскоре привело к развитию совершенно нового подхода к математике. Почему это не может случиться с творениями человеческого разума и в будущем? Многие математики пришли к выводу, что заниматься решением проблем, так или иначе связанных с реальным миром, совершенно не обязательно: ведь и математика как свод идей, зародившихся в человеческом разуме, рано или поздно непременно окажется полезной.¹²⁵ Более того, чистое мышление, не стесняемое необходимостью следовать за физическими явлениями, обретает большую свободу и соответственно продвигается дальше. Человеческое воображение, не знающее оков, создает более мощные теории, которые способствуют более глубокому пониманию реального мира и овладению природой.

Были и другие причины, побудившие математиков отойти от изучения реального мира. Широкий размах математических и естественнонаучных исследований не позволял ученым чувствовать себя одинаково свободно и в математике, и в естественных науках. Стоящие перед естествознанием проблемы, подобные тем, в решении которых ранее неизменно принимали участие великие математики, ныне становились всё более сложными. Так почему бы, решили математики, не ограничить свою деятельность рамками чистой математики и тем не облегчить себе работу?

¹²³ Хинчин А.Я. Великая теорема Ферма. – М.–Л.: Гостехиздат, 1932; Постников М.М. Теорема Ферма. – М.: Наука, 1978; Эдвардс Г. Последняя теорема Ферма. – М.: Мир, 1980.

¹²⁴ **Яглом:** В частности, законы умножения гамильтоновых «кватернионных единиц» i , j и k прояснило идущее от Гамильтона отождествление этих «единиц» с (физическими) вращениями пространства на 90° вокруг трех взаимно перпендикулярных осей: Ox , Oy и Oz .

¹²⁵ **В.Э.:** Да, так они думали, но это неверно.

Существовала еще одна причина, вынудившая многих математиков обратиться к проблемам чистой математики. Естественнаучные проблемы редко удается решить окончательно раз и навсегда. Обычно ученые получают всё лучшее приближение, но отнюдь не полное решение задачи. Основные научные проблемы, например проблема трех тел, т.е. описания движения трех тел (скажем, Солнца, Земли и Луны), каждое из которых притягивает два других тела, по-прежнему остаются нерешенными. Как заметил Фрэнсис Бэкон, изощренность природы неизмеримо превосходит человеческую мудрость. А чистая математика, напротив, дает нам примеры четко поставленных проблем, допускающих полное решение. Для человеческого разума такие четко поставленные и до конца решаемые проблемы обладают особой привлекательностью в отличие от проблем недостижимой глубины и неисчерпаемой сложности. Немногие проблемы, устоявшие перед натиском математиков нескольких поколений (например, гипотеза Гольдбаха), формулируются подкупающе просто.

Говоря о мотивах, побуждающих обращаться к проблемам чистой математики, нельзя не упомянуть о давлении, оказываемом на математиков со стороны тех учреждений, где они работают, например университетов, – требовании публиковать результаты своих исследований. Поскольку для решения прикладных проблем необходимы обширные познания по крайней мере в одной из естественных наук и в математике, а нерешенные проблемы по трудности превосходят чисто математические, гораздо легче придумывать свои собственные задачи и решать то, что возможно решить. Профессора не только сами выбирают проблемы, поддающиеся решению, но и предлагают их своим ученикам в качестве тем для диссертаций. При этом профессора во многих случаях действительно могут помочь диссертантам преодолеть любые встречающиеся на их пути трудности.

Назовем несколько направлений, в которых развивается современная чистая математика, – это позволит читателю лучше понять различие между чисто математическими и прикладными проблемами. Одно из таких направлений – абстракция. После того как Гамильтон ввел кватернионы, которые он намеревался применить к решению физических проблем, другие математики поняли возможность существования не одной, а многих алгебр и занялись поиском всех возможных алгебр, не задумываясь над тем, насколько они применимы к описанию реального мира. Это направление математической деятельности процветает и поныне; оно является одним из направлений абстрактной алгебры.

Другое направление чистой математики – обобщение. Конические сечения (эллипс, парабола и гипербола) описываются алгебраическими уравнениями второй степени. В приложениях встречаются также кривые, описываемые уравнениями третьей степени. Обобщение позволяет перепрыгнуть сразу к кривым, описываемым алгебраическими уравнениями n -й степени, и подробно изучить их свойства, хотя такие кривые вряд ли могут помочь нам при описании явлений природы.

Обобщение и абстракция, предпринятые с единственной целью – написать очередную статью для «отчета», как правило, не представляют ценности с точки зрения приложений.¹²⁶ Подавляющее большинство работ такого рода посвящено переформулировке на более общем и более абстрактном языке с использованием новой терминологии того, что было известно и раньше, но излагалось на более простом и частном языке. Что же касается приложений математики, то здесь такая переформулировка не дает ни более мощного метода, ни более глубокого понимания. Распространение новомодной терминологии, как правило искусственной и не связанной с какими-либо физическими идеями, хотя и направленной якобы на модернизацию идей, заведомо не способствует более эффективному применению математики, а, наоборот, затрудняет его. Это новый язык, но не новая математика.

Третье направление, избираемое чистой математикой, – специализация. Еще Евклид ставил и решал вопрос о том, существует ли бесконечно много простых чисел. Теперь «естественно»

¹²⁶ **Яглом:** Здесь трудно удержаться от соблазна процитировать одно место из предисловия к книге [100 Полна Г., Сегё Г. Задачи и теоремы из анализа, т.1. – М.: Гостехиздат, 1956.] замечательных математиков и педагогов Д. Пойа (Поля) и Г. Сегё: «Не нужно забывать, что существуют обобщения двух родов: малоценные и полноценные. Первые – обобщения путем разрежения, другие – путем сгущения. Разредить – значит, наболтав воды, изготовить жиденькую похлебку; сгустить – значит составить полезный, питательный экстракт. Соединение понятий, мало связанных друг с другом для обычного представления, в одно объемлющее есть сгущение; так сгущает, например, теория групп рассуждения, которые прежде, будучи рассеянными... выглядели совершенно различными. Привести примеры обобщения путем разрежения было бы еще легче, но мы не хотим наживать себе врагов».

спросить, существует ли простое число среди любых семи последовательных целых чисел. Пифагорейцы ввели понятие дружественных чисел. Два числа называются дружественными, если сумма делителей одного числа равна другому числу. Например, 284 и 220 – дружественные числа. Один из лучших специалистов по теории чисел Леонард Диксон предложил задачу о дружественных тройках чисел. «Мы будем говорить, что три числа образуют дружественную тройку, если сумма собственных делителей каждого числа равна сумме двух других чисел», – писал Диксон и поставил задачу об отыскании таких троек. Другой пример подобного рода относится к так называемым степенным числам. Условимся называть натуральное число n степенным, если из того, что n делится на простое число p , следует, что оно делится и на p^2 (другими словами, если в «каноническом» разложении $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ числа n на простые множители все показатели степени $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_k \geq 2$). Существуют ли положительные целые числа (отличные от 1 и 4), представимые бесконечно многими способами в виде разности двух взаимно-простых степенных чисел?

Мы выбрали приведенные выше примеры специализации потому, что их нетрудно сформулировать и понять, хотя кажущаяся простота отнюдь не соответствует сложности и глубине таких проблем. Однако специализация распространилась настолько широко, а проблемы настолько сузились, что к большинству современных отраслей математики вполне применимо высказывание, некогда несправедливо адресованное теории относительности: во всем мире вряд ли найдется дюжина людей, понимающих эту теорию.

Распространение специализации приняло столь широкие масштабы, что группа выдающихся французских математиков, выступающих под коллективным псевдонимом Никола Бурбаки, группа, заведомо не занимающаяся прикладной математикой,¹²⁷ сочла необходимым выступить с критикой сложившегося положения:

Многие из математиков устраиваются в каком-нибудь закоулке математической науки, откуда они и не стремятся выйти, и не только почти полностью игнорируют всё то, что не касается предмета их исследований, но не в силах даже понять язык и терминологию своих собратьев, специальность которых далека от них. Нет такого математика, даже среди обладающих самой обширной эрудицией, который бы не чувствовал себя чужеземцем в некоторых областях огромного математического мира; что же касается тех, кто, подобно Пуанкаре или Гильберту, оставляет печать своего гения почти во всех его областях, то они составляют даже среди наиболее великих редчайшее исключение. ([68]¹²⁸, с. 245; [11*]¹²⁹.)

¹²⁷ **Яглом:** Вожди группы Бурбаки охотно декларировали «антиприкладной» характер своего творчества (ср., например, цитируемую ниже статью [115] Ж. Дьедонне), но к этому их тезису, как и к некоторым другим высказываниям, следует относиться с осторожностью. Известно, что один из основателей (и наиболее влиятельных членов) группы Бурбаки Андре Вейль по просьбе знаменитого антрополога и философа Клода Леви-Стросса написал математическое приложение «Математическая теория брачных союзов» к диссертации Леви-Стросса «Элементарные системы родства» (1949). С другой стороны, весьма близкий группе Бурбаки Рене Том является создателем имеющей огромное прикладное значение так называемой теории катастроф (см. [101]) и отличается поразительной широтой нематематических интересов (см., например, [102]). Кроме того, несмотря на неоднократно декларировавшуюся вождями группы Бурбаки антиприкладную направленность их группы, в целом свойственное этой группе стремление рассматривать математику как науку о математических структурах (см. [11*]) идет навстречу определенным устремлениям в современной прикладной математике, выражающимся в росте значения математического моделирования нематематических феноменов (ср. [103]).

115: Дьедонне Ж. Современное развитие математики. – Сб. переводов «Математика», 1966, т.10, № 3, с. 3–11. **101:** Thom R. Stabilité structurelle et morphogenèse. – N.Y.: Benjamin, 1972; Thom R. Die Katastrophen Theorie: Gegenwärtiger Standard Aussichten. – In: Mathematiker über Mathematik (herausgegeben von M. Otte). – Heidelberg: Springer, 1974, S. 124–134; Арнольд В.И. Теория катастроф. – М.: изд-во МГУ, 1983; Постой Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее применение. – М.: Мир, 1980; Гилмер Р. Прикладная теория катастроф, тт. 1., 2. – М.: Мир, 1984. **102:** Том Р. Топология и лингвистика. – Успехи мат. наук, т. 30, 1975, № 1 (181), с. 199–221; Thom R. Topological models in biology. – Topology, № 8, 1969, p. 313–335. **11*:** Bourbaki N. The Architecture of Mathematics. – Amer. Math. Month., 1950, 57, p. 221–232; также в [54], т. I, p. 23–26. [Русский перевод: Бурбаки Н. Архитектура математики. – В кн. Очерки по истории математики. – М.: ИЛ, 1963, с. 245–259; в кн.: Математическое просвещение (новая серия), вып. 5. – М.: Физматгиз, 1960, с. 99–112; в кн. Архитектура математики. – М.: Знание, 1972, с. 4–18.] **103:** Яглом И.М. Математические структуры и математическое моделирование. – М.: Советское радио, 1980.

¹²⁸ Бурбаки Н. Очерки по истории математики. – М.: ИЛ, 1963.

За страсть к специализации математика платит бесплодием. Способствуя виртуозности, специализация редко приводит к значительным результатам.

Абстракция, обобщение и специализация – три направления деятельности, избираемых чистыми математиками. Четвертое направление – аксиоматизация. Развернувшееся в XIX в. движение за аксиоматизацию, несомненно, способствовало укреплению оснований математики, хотя последнее слово в решении проблем, связанных с основаниями математики, осталось не за аксиоматикой. Но вскоре многие математики принялись за тривиальную модификацию только что созданных аксиоматических систем. Одним удавалось показать, что некую аксиому можно сформулировать проще, если воспользоваться другой ее редакцией. Другие показывали, что если пожертвовать простотой формулировки, то три аксиомы можно свести всего лишь к двум аксиомам. Третьи вводили новые неопределяемые термины и, перекроив все аксиомы, приходили к тому же множеству теорем.

Не вся аксиоматизация, как мы уже говорили, была напрасной тратой сил. Но те небольшие модификации, которые удавалось внести в существующие аксиоматические системы, чаще всего не имели особого значения. В то время как решение проблем реального мира требует величайшего напряжения и полной отдачи сил, поскольку возникающие задачи обычно необходимо решить во что бы то ни стало, аксиоматика позволяет различного рода вольности. По существу аксиоматизация есть не что иное, как производимая человеком глубинная организация больших разделов науки; при этом, конечно, не имеет особого значения, какой именно системе аксиом из многих возможных будет отдано предпочтение и сколько аксиом (пять, пятнадцать, двадцать) содержит тот список аксиом, которого мы намерены придерживаться. Недаром поиск многочисленных вариантов систем аксиом, которому посвятили немало времени даже выдающиеся математики, получил название «игры с постулатами».

В первые десятилетия XX в. на аксиоматику тратилось столько времени и труда, что в 1935 г. Герман Вейль, полностью сознавая ценность аксиоматизации, посетовал на оскудение ее плодов и призвал математиков вновь заняться содержательными проблемами. По мнению Вейля, аксиоматика лишь придает содержательной математике точность и организует ее. Аксиоматика выполняет функцию каталогизации или классификации.

Разумеется, далеко не все абстракции, обобщения, специальные проблемы и аксиоматику можно отнести к чистой математике. О ценности такого рода работ и об исследованиях по основаниям математики мы уже говорили. Чтобы ответить на вопрос, с какой математикой – чистой или прикладной – мы имеем дело, необходимо выяснить мотивы исследования. Для чистой математики характерен полный отрыв от каких бы то ни было приложений, непосредственных или потенциальных. Дух чистой математики наиболее полно проявляется в ее непредвзятом отношении к проблемам: любая проблема есть проблема. Некоторые чистые математики ссылаются на то, что любое математическое исследование потенциально полезно, поскольку в будущем вполне может найти применение, которое трудно предвидеть заранее. Тема математического исследования – своего рода участок местности в районе, богатом залежами нефти. Темные лужи на поверхности земли свидетельствуют о целесообразности поискового бурения. Если из скважины пойдет нефть, то участок повышается в цене. После того как нефть на участке обнаружена, бурятся новые скважины в надежде, что и они дадут нефть, если места для бурения выбраны не слишком далеко от первой скважины. Разумеется, можно было бы заложить новую скважину и вдали от первой – там, где бурить легче, – и всё же надеяться, что и из нее забьет фонтан нефти. Но силы и изобретательность человека не беспредельны, поэтому математикам приходится соразмерять затрачиваемые усилия со степенью риска. Как заметил один из создателей термодинамики и статистической физики Джозайя Уиллард Гиббс, чистый математик может делать всё что ему вздумается, но математик-прикладник должен, по крайней мере отчасти, внимать здравому смыслу.

Критику чистой математики – математики ради математики – можно найти в сочинении Фрэнсиса Бэкона «О достоинстве и приумножении наук» (1620). Бэкон возражал против чистой, мистической и самодовольной математики, «полностью абстрагированной от материи и от

¹²⁹ Bourbaki N. The Architecture of Mathematics. – Amer. Math. Month., 1950, 57, p. 221–232; также в [54], т. I, p. 23–26. [Русский перевод: Бурбаки Н. Архитектура математики. – В кн. Очерки по истории математики. – М.: ИЛ, 1963, с. 245–259; в кн.: Математическое просвещение (новая серия), вып. 5. – М.: Физматгиз, 1960, с. 99–112; в кн. Архитектура математики. – М.: Знание, 1972, с. 4–18.]

физических аксиом» ([23]¹³⁰, т. 1, с. 237), сетуя на то, что «таково уж свойство человеческого ума: не имея достаточно сил для решения важных проблем, он тратит себя на всякие пустяки» ([23], т.1, с. 238). Значение прикладной математики Бэкон понимал следующим образом:

В природе существует много такого, что не может быть ни достаточно глубоко понято, ни достаточно убедительно доказано, ни достаточно умело и надежно использовано на практике без помощи и вмешательства математика. Это можно сказать о перспективе, музыке, астрономии, космографии, архитектуре, сооружении машин и некоторых других областях знания... По мере того как физика день ото дня будет приумножать свои достижения и выводить новые аксиомы, она будет во многих вопросах нуждаться всё в большей помощи математики, и это приведет к созданию еще большего числа областей смешанной математики. ([23], т.1, с. 238.)

Во времена Бэкона математикам не нужно было напоминать о необходимости заниматься решением физических проблем. В наши дни математика отделилась от естествознания. За последние сто лет произошел раскол между теми, кто сохранил верность древним возвышенным мотивам математической деятельности, до сих пор питавшим математику глубокими и плодотворными темами исследований, и теми, кто плывет по воле ветра, изучая всё, что подсказывает ему необузданное воображение. Ныне математика и естественные науки идут разными путями. Новые математические понятия вводятся без всякой попытки найти им приложения. Более того, математики и представители естественных наук перестали понимать друг друга, и нас вряд ли может утешить то, что вследствие чрезмерной специализации даже сами математики уже не понимают друг друга.

Отход от «реальности», занятия математикой ради самой математики с самого начала вызывали бурные споры. В своем классическом труде «Аналитическая теория тепла» (1822) Фурье с энтузиазмом повествует о математическом подходе к решению физических проблем:

Глубокое изучение природы – наиболее плодотворный источник математических открытий. Такое изучение не только обладает преимуществами хорошо намеченной цели, но и исключает возможность неясной постановки задач и бесполезных выкладок. Оно является надежным средством построения самого анализа и позволяет открывать наиболее значительные идеи, которым суждено навсегда сохраниться в науке. Фундаментальны те идеи, которые отражают явления природы...

Главная отличительная особенность [математического подхода] – его ясность; в нем нет символов, которые выражали бы смутные идеи. Он сводит вместе самые различные явления и обнаруживает объединяющие их скрытые аналогии. Даже если материя ускользает от нас, подобно воздуху и свету, по причине своей крайней тонкости, даже если мы хотим понять, как выглядят небеса на протяжении последовательных периодов, разделяемых многими столетиями, даже если сила тяжести и тепло действуют внутри земного шара на глубинах, которые навсегда останутся недоступными, математический анализ позволяет постичь законы всех этих явлений. Он делает их как бы видимыми и измеримыми и, должно быть, является способностью человеческого разума, призванной возместить кратковременность жизни и несовершенство наших чувств. Но еще более замечательно, что при изучении всех явлений математический анализ следует одному и тому же методу: он переводит все эти явления на один и тот же язык, как бы подчеркивая единство и простоту структуры окружающего нас мира и делая еще более заметным незыблемый порядок, правящий в природе всей материей.¹³¹

Карлу Густаву Якобу Якоби принадлежат первоклассные результаты в области механики и астрономии. Тем не менее он счел необходимым выступить против высказанного Фурье мнения с критическими замечаниями, которые, однако, в лучшем случае можно назвать односторонними. В письме Адриену Мари Лежандру от 2 июля 1834 г. Якоби писал:

Фурье усматривает главное назначение математики в общественной пользе и объяснении явлений природы, но такому ученому, как он, следовало бы знать, что единственная цель науки состоит в прославлении человеческого разума, поэтому любая задача теории чисел заслуживает ничуть не меньшего внимания, чем любой вопрос о нашей планетной системе.

Разумеется, специалисты по математической физике не разделяли взглядов Якоби. Лорд Кельвин (Уильям Томсон, 1824–1907) и Питер Гутри Тэйт (1831–1901) провозгласили в 1867 г.,

¹³⁰ Бэкон Ф. Сочинения в 2-х томах. – М.: Мысль, 1977 (т.1); 1978 (т.2).

¹³¹ Яглом: Поразительна близость этой позиции Фурье к воззрениям пифагорейцев (гл. I).

что лучшая математика – та, которую подсказывают приложения. Именно приложения приводят к «наиболее удивительным теоремам чистой математики, редко выпадающим на долю тех математиков, которые ограничивают себя рамками чистого анализа и геометрии, вместо того чтобы обращаться к богатой и прекрасной области математической истины, лежащей в русле физических исследований».

Многие математики также с осуждением относились к тяге своих коллег к чистой математике. Так, в 1888 г. Кронекер писал Гельмгольцу, внесшему значительный вклад в развитие математики, физики и медицины: «Ваш богатый практический опыт работы с разумными и интересными проблемами укажет математикам новое направление и придаст им новый импульс... Односторонние и интроспективные математические умозаключения приводят к областям, от которых нельзя ожидать сколько-нибудь ценных плодов».

В 1895 г. Феликс Клейн, бывший в то время признанным главой математического мира, также считал необходимым выразить протест против тяги к абстрактной, чистой математике:

Трудно отделаться от ощущения, что быстрое развитие современной мысли таит для нашей науки опасность всё более усиливающейся изоляции. Тесная взаимосвязь между математикой и теоретическим естествознанием, существовавшая к вящей выгоде для обеих сторон, с возникновением современного анализа грозит прерваться.

К этой же теме Клейн возвращается в «Математической теории волчка» (1897):

В математической науке назрела насущная необходимость восстановить тесную взаимосвязь между чистой наукой и теми разделами естественных наук, где математика находит наиболее важные приложения, ту взаимосвязь, которая столь плодотворно проявила себя в трудах Лагранжа и Гаусса.

Пуанкаре в «Науке и методе», несмотря на язвительные замечания по поводу некоторых чисто логических построений математиков конца XIX в. (гл. VIII), признает полезность математических исследований о постулатах, о воображаемых геометриях, о функциях со странным ходом. Чем более эти размышления уклоняются от наиболее общепринятых представлений, а следовательно, и от природы и прикладных вопросов, тем яснее они «показывают нам, на что способен человеческий ум, когда он постепенно освобождается от тирании внешнего мира, тем лучше мы познаем ум в его внутренней сущности». Но всё же «главные силы нашей армии приходится направлять в сторону противоположную, в сторону изучения природы» ([1]¹³², с. 302). В «Ценности науки» Пуанкаре писал:

Нужно было бы окончательно забыть историю науки, чтобы не помнить, что стремление познать природу имело самое постоянное и самое счастливое влияние на развитие математики... Если бы чистый математик забыл о существовании внешнего мира, то он уподобился бы художнику, который умеет гармонически сочетать краски, и формы, но у которого нет моделей. Его творческая сила скоро иссякла бы. ([1], с. 223.)

Несколько позже, в 1908 г., ту же тему подхватил Феликс Клейн. Его беспокоило, как бы математики не стали злоупотреблять чрезмерной свободой в создании произвольных математических структур. Произвольные структуры, предостерегал Клейн, – «смерть всякой науки». Аксиомы геометрии «не произвольные, а вполне разумные утверждения, как правило опирающиеся на наше восприятие пространства. Точное содержание геометрических аксиом определяется их целесообразностью». Занимаясь обоснованием аксиом неевклидовой геометрии, Клейн подчеркивал, что аксиома Евклида о параллельных, как того требуют наглядные представления, выполняется лишь с точностью, не превышающей определенные пределы. По другому случаю Клейн заметил, что «тот, кто пользуется привилегией свободы, должен нести и бремя ответственности». Под ответственностью Клейн понимал служение интересам познания природы.

К концу жизни Клейн, возглавлявший математический факультет Гёттингенского университета и созданный при нем институт математики – в то время признанный центр математического мира, – считал необходимым еще раз выразить свой протест против чрезмерного увлечения чистой математикой. В книге «Лекции о развитии математики в XIX в.» (1925) он

¹³² Пуанкаре А. О науке. – М.: Наука, 1983.

напомнил об интересе, который Фурье питал к решению практических задач самыми лучшими из существовавших в начале XIX в. математических методов, и противопоставил прикладную направленность интересов основателей математической физики чисто математической утонченности методов и абстрактности идей математики XX в. Далее в «Лекциях» говорится следующее:

Если мне позволено будет пояснить свою мысль примером, я сказал бы, что математика в наши дни напоминает крупное оружейное производство в мирное время. Витрина заполнена образцами, которые своим остроумием, искусным и пленяющим глаз выполнением восхищают знатока. Собственно происхождение и назначение этих вещей, их способность стрелять и поражать врага отходят в сознании людей на задний план и даже совершенно забываются. ([98]¹³³, с. 104.)

Рихард Курант, сменивший Клейна на посту главы Гёттингенского математического института, а позднее возглавивший Курантовский институт математических наук при Нью-Йоркском университете, также неодобрительно относился к увлечению чистой математикой. Так, предисловие к первому изданию «Методов математической физики» Куранта и Гильберта (1924) Курант начал следующими словами:

Испокон века математика черпала мощные импульсы из тесных взаимоотношений, существующих между проблемами и методами анализа и наглядными представлениями физики. Лишь последние десятилетия принесли с собой ослабление этой связи, математическое исследование стало часто отрываться от своих наглядных истоков и (особенно в анализе) занялось слишком исключительно уточнением своих методов и уточнением своих понятий. Это привело к тому, что у многих представителей анализа исчезло сознание взаимной связи их науки с физикой и другими дисциплинами, а физики, с другой стороны, часто утрачивали понимание проблем и методов математики и даже ее языка и всей сферы ее интересов. Без сомнения, в этой тенденции таится угроза для науки вообще; потоку научного развития грозит опасность всё большего разветвления, оскудения и высыхания. Чтобы избежать этой участи, необходимо значительную часть наших усилий направить к тому, чтобы вновь соединить разделенное, выясняя внутренние связи разнородных фактов и объединяющих точек зрения. Только таким путем изучающему открывается возможность действительного овладения предметом, а исследователю подготавливается почва для органического дальнейшего развития. ([104]¹³⁴, с. X.)

В 1939 г. Курант писал:

Серьезная угроза самой жизни науки проистекает из утверждения о том, будто математика представляет собой не что иное, как систему заключений, выводимых из определений и постулатов, которые должны быть непротиворечивыми, а в остальном произвольными порождениями свободной воли математиков. Если бы подобное описание соответствовало действительности, то в глазах любого сколько-нибудь разумного человека математика не обладала бы никакой привлекательностью. Она была бы ничем не мотивированной бесцельной игрой с определениями, правилами и силлогизмами. Представление о том, будто разум по своему произволу может создавать осмысленные аксиоматические системы, – полуправда, способная лишь вводить неискушенных людей в заблуждение. Только сдерживаемый дисциплиной ответственности перед органическим целым свободный разум, руководствуясь внутренней необходимостью, может создавать результаты, имеющие научную ценность.

Аналогичное мнение выразил в 1943 г. на страницах журнала *American Scientist* ведущий американский математик того времени Джордж Дэвид Биркгоф (1884–1944):

Я надеюсь, что в будущем всё больше физиков-теоретиков будут обретать глубокие познания математических принципов, а математики не станут ограничиваться чисто эстетическим развитием математических абстракций.

Ситуацию, сложившуюся к 1944 г., Джон Л. Синдж, признанный специалист по математической физике, описал (в духе Бернарда Шоу) в пространном предисловии к одной весьма специальной статье, доступной пониманию лишь профессиональных математиков:

¹³³ Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX в. – М.–Л.: Гостехиздат. 1937.

¹³⁴ Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики, т.1. – М.–Л.: Гостехиздат, 1933.

Большинство математиков имеют дело с идеями, которые, по всеобщему мнению, принято относить к математике. Математики образуют замкнутую гильдию. Всякий вступающий в нее дает обет оставить всё мирское и обычно сдерживает свою клятву. Лишь немногие математики странствуют «на чужбине» в поисках математического пропитания в проблемах, заимствованных непосредственно из других областей науки. В 1744 или в 1844 г. такими странниками было подавляющее большинство математиков. В 1944 г. они составляют столь небольшую часть математиков, что большинству необходимо напоминать о существовании меньшинства и объяснять точку зрения тех, кто его составляет.

Представители меньшинства не желают, чтобы их называли «физиками» или «инженерами», ибо они следуют математической традиции, существующей более двадцати веков и связанной с именами Евклида, Архимеда, Ньютона, Лагранжа, Гамильтона, Гаусса, Пуанкаре. Меньшинство отнюдь не желает умалять работу большинства, но опасается, что если математика будет питаться только собственными соками, то со временем движущие ею стимулы исчерпают себя.

Помимо влияния на будущее собственно математики изоляция математиков лишила остальные науки поддержки, на которую в прежние времена они неизменно рассчитывали... Изучение природы породило (и, по-видимому, продолжает порождать) несравненно более трудные проблемы, чем те, которые математики придумали, находясь в кругу своих собственных идей. Ученые, занимавшиеся изучением естественных наук, полагались на математиков в надежде, что те обратят свою энергию на решение этих трудных проблем. Ученым-естественникам известно, что математики искусно используют готовые средства, но этим их не удивишь – ученые и сами владеют готовыми средствами едва ли не с меньшим искусством. В математиках их привлекают некие особые черты – присущие математикам логическая изощренность и умение видеть общее в частном и частное в общем...

При всем том математики выступают в роли направляющей и дисциплинирующей силы. Именно математики дали естествознанию методы вычислений: логарифмы, дифференциальное и интегральное исчисление, дифференциальные уравнения и т.д. Но этим вклад математиков в естествознание далеко не исчерпывается. Математики наделили естествознание общим планом, неотступно следили за логичностью естественнонаучного мышления. По мере возникновения каждой новой науки математики подводили (или по крайней мере пытались подводить) под нее надежное логическое основание – подобное тому, что Евклид подвел под египетское землемерие. В руки математиков попадал необработанный камень с множеством посторонних вкраплений. Из рук математиков выходил великолепно ограненный и отполированный бриллиант.

Здание современной науки гудит от кипучей деятельности, какой наука не знала в прежние времена. Нет никаких видимых признаков упадка. И только самые наблюдательные смогли заметить, что часовой покинул свой пост. Он не отправился на покой – работает, как всегда, не покладая рук, но работает только для себя...

Итак, окончен бал. Сколько радости было, пока он длился!.. Природа по-прежнему продолжает подкидывать глубокие проблемы, но они уже не доходят до математиков. В ожидании противника они сидят в своей башне из слоновой кости, вооруженные до зубов, но противник так и не появляется. Природа не ставит перед математиками четко сформулированных проблем. Добыть ясно поставленную задачу можно, лишь вооружившись киркой и лопатой, и тот, кто боится испачкать руки, никогда ни одной сколько-нибудь стоящей задачи не найдет.

Изменения и смерть в мире идей столь же неизбежны, как и в делах человеческих, и любящему истину математику не пристало делать вид, будто их нет, когда в действительности они имеют место. Невозможно искусственно стимулировать глубокие источники интеллектуальной деятельности. Что-то либо захватывает наше воображение, либо не затрагивает его, и в последнем случае никакими усилиями не удастся раздуть пламя. Если математики действительно утратили издавна присущую им особенность и видят перст божий не в движении звезд, а в доведении до пределов мыслимого совершенства и без того точной логики, то все попытки вернуть их в старое убежище обречены на провал, не говоря уже о том, что такие попытки означали бы по существу отрицание права человека на свободу разума. Но каждый начинающий математик, формулирующий свою собственную философию (а этот этап наступает в жизни каждого математика), должен принимать решение, располагая всей полнотой фактов. Он должен понимать, что, следуя тенденциям современной математики, становится наследником великой традиции, но наследует не всё ее состояние. Часть наследства перешло в другие руки и навсегда потеряна для него...

Наша наука началась с математики и, несомненно, недолго протянет после того, как из нее изымут математику (если такое изъятие вообще возможно). В нашем столетии множится число лабораторий для массового производства фактов. Останутся ли добываемые факты просто фактами или обратятся в науку, зависит от того, в какой степени они войдут в соприкосновение с духом математики.

Джон фон Нейман был обеспокоен судьбами математики настолько, что счел нужным предостеречь своих коллег. Свою позицию он изложил в очерке «Математик» (1947), часто цитируемом, но всё же не привлечшем должного внимания:

На достаточно большом удалении от своего эмпирического источника и тем более во втором и в третьем поколении, когда математическая дисциплина лишь косвенно черпает вдохновение из идей, идущих от «реальности», над ней нависает смертельная опасность. Ее развитие всё более и более определяется чисто эстетическими соображениями; она всё более и более становится искусством для искусства. Само по себе это неплохо, если она взаимодействует с примыкающими математическими дисциплинами, обладающими более тесными эмпирическими связями, или если данная математическая дисциплина находится под влиянием людей с исключительно развитым вкусом. Но существует серьезная угроза, что математическая дисциплина будет развиваться по линии наименьшего сопротивления, что вдали от источника поток разветвится на множество ручейков и дисциплина превратится в хаотическое нагромождение деталей и сложностей. Иначе говоря, при большом отделении от эмпирического источника или после основательного абстрактного «инбридинга» математической дисциплине грозит опасность вырождения. При зарождении новой математической дисциплины ей обычно свойствен классический стиль. Когда же она начинает обретать черты барокко, то это сигнал опасности...

Во всяком случае, когда достигается стадия барокко, единственное спасительное средство я вижу в том, чтобы снова вернуться к источнику, произвести омолаживающую инъекцию идей более или менее прямого эмпирического происхождения. Я убежден, что такая эмпирическая «подпитка» была необходимым условием сохранения неувядаемой молодости и жизнеспособности математики в прошлом и что аналогичное утверждение остается в силе и в будущем. ([105]¹³⁵, с. 95.)

Однако тенденция к превращению математики в своего рода искусство для искусства не была приостановлена. Математики продолжали всё дальше отходить от естествознания и следовать своим собственным курсом. Чистые математики имеют обыкновение посматривать сверху вниз, как на презренных ремесленников, на тех, кто занимается прикладной математикой, видимо, стараясь заглушить таким образом муки совести. Трубный глас техники, жалуются они, заглушает сладкие звуки чистой математики. В то же время чистые математики чувствуют, что необходимо дать ответ на критику, подобную той, которую мы воспроизвели выше. Однако, давая такой ответ, они – возможно, по незнанию, а может быть, и умышленно искажая историю – утверждают, что многие из величайших достижений прошлого обязаны своим появлением чисто математическим интересам и тем не менее впоследствии нашли себе применение. Но присмотримся внимательнее к тем примерам, которые чистые математики заимствуют из истории. Так ли чиста та математика, которую они называют чистой?

Чаще всего в качестве подходящего примера чистые математики ссылаются на греческие работы о конических сечениях: параболы, эллипсы и гиперболы. По мнению чистых математиков, эти кривые были исследованы греками, в первую очередь Аполлонием, ради удовлетворения чисто математического интереса. Тем не менее восемнадцать столетий спустя Кеплер доказал, что именно по коническим сечениям движутся вокруг Солнца планеты. Однако хотя ранняя история конических сечений доподлинно и неизвестна, но всё же по свидетельству такого авторитетного историка, как Отто Нейгебауэр (р. 1899), параболы, эллипсы и гиперболы впервые возникли в работах, посвященных конструкции солнечных часов. Известно, что древние действительно использовали в солнечных часах эти кривые. Задолго до того, как Аполлоний посвятил коническим сечениям свой классический труд (гл. I), было известно, что параболы позволяют фокусировать падающий на них солнечный свет. Следовательно, физические приложения конических сечений в оптике – области науки, которой греки уделяли немало внимания, – несомненно, послужили толчком к некоторым из исследований по геометрии конических сечений.

Коническими сечениями греки занимались задолго до Аполлония в связи с решением знаменитой задачи об удвоении куба – построении ребра куба вдвое большего объема, чем данный куб. Для греческой геометрии, в которой единственный способ доказать существование того или иного объекта сводился к его построению, такого рода задачи имели первостепенное значение.

Разумеется, Аполлоний доказал сотни теорем о конических сечениях, не имеющих не только непосредственных приложений, но даже потенциально неприменимых. В этом отношении

¹³⁵ Нейман фон Дж. Математик. – Природа, 1983, № 2, 88–95.

он мало чем отличался от современных математиков, которые, напав на благодатную тему, начинают разрабатывать ее либо по причинам, о которых говорилось выше, – из желания побольше узнать о чем-то важном либо из стремления ответить, так сказать, на интеллектуальный вызов.

Второй, наиболее часто приводимый пример чистой математики, впоследствии нашедшей, однако, немаловажные приложения, – неевклидова геометрия. По словам тех, кто ссылается на этот пример, получается, будто математики создали неевклидову геометрию, размышляя на досуге над тем, что произойдет, если изменить евклидову аксиому о параллельных. Но утверждать подобное – значит игнорировать более чем двухтысячелетнюю историю науки. Аксиомы Евклида считались самоочевидными истинами о реальном физическом пространстве (гл. I). Аксиома о параллельных, весьма произвольно и своеобразно сформулированная Евклидом, стремившимся избежать исходного предположения о существовании параллельной, по сравнению с остальными аксиомами была куда как менее очевидной. Многие усилия, затраченные на поиск более приемлемого варианта аксиомы, привели в конце концов к открытию: аксиома о параллельных не обязательно должна быть истинной – другая аксиома о параллельных, отличающаяся от евклидовой (и, следовательно, неевклидова геометрия), может так же хорошо описывать физическое пространство. Итак, подчеркнем главное: попытки доказать истинность аксиомы Евклида о параллельных предпринимались не для «успокоения мозгов, поднатеревшихся в умозрительных рассуждениях», а для того, чтобы удостовериться в **истинности** геометрии, лежащей в основе тысяч и тысяч теорем чистой и прикладной математики.

Чистые математики нередко ссылаются также на работы Римана, который обобщил известную в его время неевклидову геометрию и указал, на существование целого семейства неевклидовых геометрий, получивших впоследствии название римановых геометрий (или геометрий римановых пространств). И в этом случае чистые математики полагают, будто Риман создал свои геометрии лишь с той целью, чтобы «посмотреть, что можно сделать». Думаящие так глубоко заблуждаются. Как мы уже говорили, усилия математиков, направленные на устранение малейших сомнений в адекватности евклидовой геометрии окружающему нас миру, увенчались созданием неевклидовой геометрии, оказавшейся столь же пригодной для описания свойств физического пространства, как и евклидова геометрия. Существование двух различных геометрий заставило математиков задуматься над вопросом о том, что, собственно, нам достоверно известно о физическом пространстве? Этот вопрос послужил для Римана отправным пунктом для размышлений. Отвечая на него, Риман в своей лекции [106]¹³⁶ 1854 г., которая была опубликована лишь после его смерти, развил общую теорию, включающую классическую геометрию Евклида и неевклидову геометрию Лобачевского–Бойаи в качестве частных случаев. Вследствие ограниченности наших физических знаний римановы геометрии могли оказаться столь же полезными для описания физического пространства, как и евклидова геометрия. Риман предвидел, что пространство и материю нужно рассматривать в неразрывной связи.¹³⁷ Следует ли удивляться после этого, что Эйнштейн счел риманову геометрию полезной? Предвидение Римана относительно физичности предложенной им геометрии отнюдь не умаляет остроумного применения, которое нашел римановой геометрии Эйнштейн. Применимость римановой геометрии явилась следствием работы над решением наиболее фундаментальной из физических проблем, которыми когда-либо занимались математики, – выяснением природы физического пространства.

Нельзя не упомянуть еще об одном примере. Одно из интенсивно развивающихся направлений современной математики – теория групп. По мнению чистых математиков, теория групп также была создана «из любви к искусству». Понятие группы ввел в математику Эварист Галуа (1811–1832), хотя неявно оно встречалось в работах Лагранжа, норвежца Абеля и итальянца Паоло Руффини (1765–1822). Внимание Галуа привлекла по существу самая простая и практически важная задача всей математики – разрешимость простых алгебраических уравнений, таких, как квадратное уравнение

$$3x^2 + 5x + 7 = 0,$$

¹³⁶ Риман Б. О гипотезах, лежащих в основании математики. В кн.: Сочинения. – М.–Л.: Гостехиздат, 1948, с. 279–293; 500–526 или в кн.: Об основаниях геометрии. – М.: Гостехиздат, 1956, с. 309–341.

¹³⁷ **Яглом:** В последней части «Применение к пространству» замечательной лекции [106] Риман сам подробно обсуждает приложимость к (будущей) физике предложенных им геометрических схем.

кубическое уравнение

$$4x^3 + 6x^2 - 5x + 0 = 0$$

и уравнения более высоких степеней. Уравнения такого типа встречаются в тысячах физических задач. К тому времени, когда эта задача привлекла внимание Галуа, математики научились решать в радикалах общие алгебраические уравнения от первой до четвертой степени (т.е. выражать корни таких уравнений через их коэффициенты с помощью конечного числа алгебраических операций), а Нильс Хенрик Абель (1802–1829) доказал неразрешимость в радикалах общего алгебраического уравнения пятой степени

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0,$$

где a, b, c, d, e и f – любые вещественные (или комплексные) числа, а также и уравнений более высоких степеней. Галуа задался целью выяснить, почему общие уравнения пятой и выше степени неразрешимы в радикалах и почему частные уравнения сколь угодно высокой степени могут оказаться разрешимыми. Решая эту задачу, Галуа создал теорию групп. Нужно ли удивляться, что понятие, возникшее из решения столь фундаментальной проблемы, как решение алгебраических уравнений, оказалось применимым ко многим другим математическим и физическим задачам? Можно с уверенностью сказать, что теория групп не была «придуманна», а родилась на прочной и вполне реальной физико-математической основе.

Кроме того, теория групп была вызвана к жизни не только работами Галуа. Возможно, от внимания чистых математиков ускользнула работа французского кристаллографа Огюста Браве (1811–1863) по структуре кристаллов типа кварца, алмаза и горного хрусталя. Эти вещества состоят из различных атомов, расположенных по определенной схеме, многократно повторяющейся в объеме кристалла. Атомы в кристаллах таких веществ, как поваренная соль и обычные минералы, расположены особым образом. В простейшем случае (поваренной соли) можно считать, что соседние атомы расположены в вершинах куба. С 1848 г. Браве занялся изучением преобразований (поворотов кристалла вокруг какой-либо оси), трансляций (параллельных переносов, или сдвигов) или отражений, переводящих кристалл в себя. Такие преобразования образуют различные группы. Камил Жордан (1833–1922), обративший внимание на работу Браве, дополнил и обобщил ее в своей работе 1868 г. и в своем труде «Трактат о подстановках» (*Traité des substitutions*, 1870), сыгравшем существенную роль в распространении понятия группы в среде математиков, использовал заимствованные из кристаллографии соображения наряду с другими аргументами, подтверждающими важность изучения теории групп.

Работа Браве навела Жордана на мысль об изучении бесконечных групп – групп вращений и параллельных переносов. Бесконечные (непрерывные) группы обрели известность после знаменитой лекции [107]¹³⁸ Феликса Клейна, прочитанной в Эрлангенском университете в 1872 г. и тогда же опубликованной, где он предложил различать все известные в то время геометрии по допускаемым ими группами «движений» и по инвариантам этих «движений». Так, евклидова геометрия занимается изучением тех свойств фигур, которые остаются инвариантными при поворотах, параллельных переносах и преобразованиях подобия (см., например, [108]¹³⁹), Занимавшую в 1872 г. умы математиков проблему, чем отличаются известные и столь непохожие друг на друга геометрии и какая из них соответствует физическому пространству, вряд ли можно отнести к чистой математике. Немало работ по применению дискретных и непрерывных групп к классификации методов решений дифференциальных уравнений¹⁴⁰ вошло в математику, прежде чем в 90-х годах XIX в. было сформулировано современное понятие группы.¹⁴¹

¹³⁸ Клейн Ф. Сравнительное обозрение новейших геометрических учений (Эрлангенская программа). – В кн.: Об основаниях геометрии. – М.: Гостехиздат, 1956, с. 399–434.

¹³⁹ Яглом И.М. Геометрические преобразования I–II. – М.: Гостехиздат, 1955–1956; Введения к чч. I, 2 и 3; Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия. – М.: Наука, 1969, §1.

¹⁴⁰ Яглом: Классификация дифференциальных уравнений по свойственным им группам симметрии была произведена великим норвежским математиком Софусом Ли (1842–1899), который построил своеобразную «теорию Галуа для дифференциальных уравнений», где вопрос о решимости алгебраического уравнения в радикалах заменялся вопросом о решимости дифференциального уравнения «в квадратурах» (т.е. с применением операции интегрирования). В свое время эта теория пользовалась очень большой популярностью, но затем, в связи с наступлением века ЭВМ, поставившего совсем другому вопросу о решении дифференциальных уравнений, была почти забыта. Взрывоподобный рост интереса к учению Ли о «группах симметрии дифференциальных уравнений», выразившийся, в частности, в появлении большого числа посвященных этой теме книг (см., например, [109: Овсянников Л.В.

К аналогичному выводу приводит изучение и всех других понятий и теорий, якобы являющихся продуктом чистой математики: матриц тензорного исчисления, топологии. Например, вся современная алгебра обязана своим происхождением кватернионам Гамильтона (гл. IV). Мотивы создания абстрактной алгебры прямо или косвенно были связаны с физическими соображениями, и ее творцы неусыпно заботились о приложениях, которые могут иметь вводимые ими понятия. Следовательно, история неоспоримо свидетельствует, что любая математическая дисциплина, намеренно создаваемая как область чистой математики и лишь впоследствии нашедшая различные применения, как правило, возникала при исследовании реальных физических проблем или проблем, имеющих непосредственное отношение к изучению природы. Часто случается, что «хорошая математика», создание которой первоначально было стимулировано потребностями физики, находит новые приложения, которых не предвидели творцы теории. Так математика возвращает свой долг естествознанию. Новых, непредвиденных приложений следует ожидать заранее. Не удивляемся же мы, что молотком, который был изобретен для того, чтобы крушить горные породы, можно также и забивать гвозди. Неожиданные естественнонаучные приложения математики возникают по той простой причине, что математические теории с самого начала имеют физическую подоплеку, а отнюдь не обязаны своим происхождением пророческому прозрению всеведущих математиков, сражающихся разве лишь в собственном духом. Неизменный успех абстрактных математических теорий отнюдь не случаен.

Рассказывают, что один из выдающихся английских математиков – Годфри Гарольд Харди (1877–1947) – однажды провозгласил тост: «За чистую математику! Да не найдет она никаких приложений!»¹⁴². Леонард Юджин Диксон (1874–1954), пользовавшийся непререкаемым авторитетом в Чикагском университете, говаривал: «Слава богу, теория чисел не запятнана никакими приложениями».

В статье о математике, написанной во время второй мировой войны (1940), Харди утверждал:

Считаю своим долгом заявить с самого начала, что под математикой я понимаю настоящую математику, математику Ферма и Эйлера, Гаусса и Абеля, а не то, что выдают за математику в инженерной лаборатории. Я имею в виду не только «чистую» математику (хотя именно она интересует меня в первую очередь) – Максвелла и Эйнштейна, Эддингтона и Дирака я также причисляю к «чистым» математикам.

Прочитав эти строки, повторенные в книге Харди «Апология математика», можно было бы подумать, что он, по крайней мере частично, приемлет прикладную математику. Но далее у Харди говорится следующее:

В понятие чистой математики я включаю всю совокупность математических знаний, обладающих непреходящей эстетической ценностью, какой обладает, например, греческая математика, которая вечна потому, что лучшая ее часть, подобно лучшим произведениям литературы, и через тысячи лет продолжает приносить тысячам людей эмоциональное удовлетворение.

Харди и Диксон могут покоиться с миром, ибо история подтвердила правильность их высказываний. Их чистая математика, как и всякая математика, созданная ради самой себя, почти

Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978.]) и диссертаций, относится к последним десятилетиям; это связано с той большой ролью, которую играют соображения симметрии в современной физике.

¹⁴¹ Артур Кэли дал общее (абстрактное) определение группы еще в работах 1849–1854 гг. [у Э. Галуа фигурировали только группы подстановок. – *Ред.*], но значение этого понятия было оценено по достоинству лишь после того, как оно стало широко применяться в математике и естественных науках (о некоторых применениях мы упоминали выше).

¹⁴² **Яглом:** Характерно даже название, которое дал Харди своему учебнику [110: Харди Г.Х. Курс чистой математики. – М.: ИЛ, 1949.] (классического) математического анализа. [Заметим, что, вероятно, не меньше 90% всех упоминаний имени воинственного адепта «чистой» математики Харди в современной научной, научно-популярной и учебной литературе связано не с его на самом деле выдающимися достижениями в теории чисел, а с единственным «грехом» – с выполненной в молодости несложной работой прикладного характера (так называемый закон Харди–Вейнберга популяционной генетики – см., например, [111: Ли Ч. Введение в популяционную генетику. – М.: Мир, 1978.]).]

заведомо не найдет никаких приложений.¹⁴³ Тем не менее полностью исключить всякую применимость чистой математики «по Харди и Диксону» мы не можем. Ребенок, наугад наносящий мазки краски на холст, может создать шедевр, соперничающий с картинами Микеланджело (скорее с произведениями современного искусства!), а обезьяна, нажимающая как попало клавиши пишущей машинки, может, как заметил Артур Эддингтон, создать пьесу, сравнимую по своим художественным достоинствам с пьесами Шекспира. Когда работают тысячи чистых математиков, вряд ли можно поручиться, что хотя бы один из полученных результатов случайно не окажется полезным для каких-либо приложений. Тот, кто ищет на улице золотые монеты, может найти мелкие медные монетки. Но интеллектуальные усилия, не соотнесенные с реальностью, почти заведомо оказываются бесплодными. Как заметил Джордж Биркгоф, «по-видимому, новые математические открытия, совершаемые по подсказке физики, всегда будут наиболее важными, ибо природа проложила путь и установила каноны, которым должна следовать математика, являющаяся языком природы». Но природа не сообщает свои секреты громко, а шепчет еле слышно – и математик должен чутко прислушиваться, усиливать слабый голос природы и доносить услышанное до всеобщего сведения.

Несмотря на убедительные свидетельства истории, некоторые математики продолжают утверждать, что чистая математика в будущем непременно найдет приложения и что независимость математики от естественных наук якобы расширяет ее перспективы. Этот тезис недавно (1961) был повторен профессором Гарвардского, Йельского и Чикагского университетов Маршаллом Стоуном. В статье «Революция в математике» Стоун, воздав должное значению математики для естественных наук, далее говорит:

Хотя в нашей концепции математики и в наших взглядах на нее по сравнению с началом XX в. произошло несколько важных изменений, лишь одно из них вызвало подлинный переворот в наших представлениях о математике – открытие полной независимости математики от физического мира... Математика, как мы сейчас понимаем, не имеет ни одной обязательной связи с физическим миром, помимо той смутной и несколько загадочной, что неявно содержится в утверждении о том, что процесс мышления происходит в мозгу. Без преувеличения можно сказать, что открытие независимости математики от внешнего мира знаменует собой одно из самых значительных интеллектуальных достижений в истории математики...

Сравнивая современную математику с той, какой она была в конце XIX в., нельзя не удивляться, как быстро выросла паша математика и количественно, и качественно. Вместе с тем нельзя не отметить, как быстро она развивалась, как всё больше места в ней отводилось абстракции и всё больше внимания уделялось введению и анализу емких математических структур. Как показывает более внимательное рассмотрение, именно новая ориентация математики, ставшая возможной лишь благодаря ее отходу от приложений, и была подлинным источником необычайной жизнеспособности и роста математики за последнее столетие...

Современный математик предпочитает определять предмет своей науки как изучение общих абстрактных схем, каждая из которых представляет собой здание, построенное из вполне определенных абстрактных элементов, скрепленных произвольными, но однозначно определенными соотношениями... По мнению математика, ни сами системы, ни предоставляемые логикой средства для изучения их структурных свойств не имеют прямой или необходимой связи с физическим миром... Лишь в той степени, в какой математика освободилась от уз, связывающих ее в прошлом с

¹⁴³ **Яглом:** Этот тезис можно и оспаривать: так, например, в *теории кодирования*, имеющей огромное прикладное значение в условиях современной недостаточности пропускной способности большинства линий связи, большую роль играет *абстрактная алгебра* (в частности, так называемые *конечные поля Галуа*), *конечные геометрии* (геометрии в плоскостях или пространствах, содержащих всего конечное число точек) и прочие разделы «абстрактной» математики, созданные вне всякой связи с возможными их приложениями (ср., например, [112: Бэрликэмп Э. Алгебраическая теория кодирования. – М.: Мир, 1971; Касами Т. и др. Теория кодирования. – М.: Мир, 1978; Питерсон У., Уэлдон Э. Коды, исправляющие ошибки. – М.: Мир, 1976; Мак Вильямс Ф., Слоэн Н. Дж. Теория кодов, исправляющих ошибки. – М.: Связь, 1979.] или статью [113: Livinson N. Coding theory: a counter-example to G.H. Hardy's conception of applied mathematics. – American Math. Monthly, v. 77, 1970, № 3, p. 249–258.]). Также и такие области математики, как *топология* или *алгебраическая геометрия*, (не говоря уже о *функциональном анализе*), совсем еще недавно считавшиеся чисто абстрактными, в последнее время стали активно изучаться (и применяться) физиками (см., например, [114: Минеев В.П. Топологические объекты в нематических жидких кристаллах. Приложение к кн.: Болтянский В.Г., Ефремович В.А. Наглядная топология. – М.: Наука, 1982, с. 148–158; Воловик Г.Е., Минеев В.П. Физика и топология. – М.: Знание, 1980.]; ср. [103: Яглом И.М. Математические структуры и математическое моделирование. – М.: Советское радио, 1980.]).

теми или иными конкретными аспектами реальности, она может стать гибким и мощным инструментом, столь необходимым для вторжения в области, лежащие за пределами известного. Уже сейчас можно было бы привести многочисленные примеры, подтверждающие сказанное...

Далее Стоун приводит в качестве примеров генетику, теорию игр и математическую теорию связи. В действительности же эти примеры вряд ли могут служить подтверждением его тезиса. Все названные им науки возникли в результате применения классической математики, стоявшей на прочном физическом основании.¹⁴⁴

С резкими возражениями против отстаиваемого Стоуном тезиса выступил в 1962 г. Курант¹⁴⁵:

В статье [Стоуна] утверждается, что мы живем в эпоху великих успехов математики, превосходящих всё когда-либо достигнутое в прошлом со времен античности. Причину триумфа «современной математики» автор статьи усматривает в одном фундаментальном принципе: абстракции и сознательном отрыве математики от физического и прочего содержания. По его мнению, математический ум, освобожденный от балласта, может воспарить до высот, откуда можно прекрасно наблюдать и исследовать лежащую глубоко внизу реальность.

Я отнюдь не склонен извращать или приуменьшать высказывания или педагогические выводы знаменитого автора. Но как призывный клич, как попытка указать направление, в котором должны развиваться исследования, и прежде всего образование, статья Стоуна в действительности представляет собой сигнал опасности и зов о помощи. Опасность преисполненного энтузиазмом абстракционизма усугубляется тем, что абстракционизм не отстаивает бессмыслицы, а выдвигает полуистину. Разумеется, совершенно недопустимо, чтобы односторонние полуистины мирно сосуществовали с жизненно важными аспектами сбалансированной полной истины.

Никто не станет отрицать, что абстракция является действенным инструментом математического мышления. Математические идеи нуждаются в непрестанной «доводке», придающей им всё более абстрактный характер, о аксиоматизации и кристаллизации. Правда, существенного упрощения в понимании структурных связей и зависимостей удается достичь лишь после выхода на более высокое плато. Верно и то, что, как неоднократно подчеркивалось, основные трудности в математике исчезают, если отказаться от метафизических предрассудков и перестать рассматривать математические понятия как описания некой реальности.

Я отнюдь не отрицаю, что наша наука питается живительными соками, идущими от корней. Эти корни, бесконечно ветвясь, глубоко уходят в то, что можно назвать «реальностью» – будет ли это механика, физика, биологическая форма, экономическая структура, геодезия или (в данном контексте) другая математическая теория, лежащая в рамках известного. Абстракция и обобщение для математики имеют не более важное значение, чем индивидуальность явлений, и прежде всего индуктивная интуиция. Только взаимодействие этих сил и их синтез способны поддерживать в математике жизнь, не давая нашей науке иссохнуть и превратиться в скелет. Мы должны решительно пресекать всякие попытки придать одностороннее направление развитию, сдвинуть его к одному полюсу антиномии бытия.

Нам ни в коем случае не следует принимать старую кощунственную чушь о том, будто математика существует к «вечной славе человеческого разума». Мы не должны допускать раскола и разделения математики на «чистую» и «прикладную». Математика должна сохраниться и еще более укрепиться как единая живая струя в бескрайнем потоке науки. Нельзя допустить, чтобы она превратилась в ручеек, уходящий в сторону от основного потока и теряющийся в песках.

Центробежные силы внутренне присущи математике и всё же непрестанно угрожают ее существованию. Фанатики изоляционистского абстракционизма представляют для математики реальную опасность. Но не меньшую опасность представляют консервативные реакционеры, не умеющие проводить различия между пустыми претензиями и подлинным вдохновением.

Не отрицая ценности абстракции, Курант утверждал в 1964 г., что математика должна черпать побудительные мотивы из вполне конкретных проблем и должна быть нацелена на некий слой реальности. Если математике необходимо воспарить в абстракцию, то полет в горные выси должен быть не просто бегством от реальности – неоценимое значение имеет возвращение на

¹⁴⁴ **Яглом:** Стоун, видимо, имел в виду совершенно новые разделы математической науки (математическую теорию связи, или *теорию информации*; *теорию кодирования*, *теорию игр*), возникшие сравнительно недавно в связи с их применениями, а далее развивавшиеся как чисто абстрактные области знания, бурный прогресс которых, безусловно, стимулировался возможностями немедленного использования полученных в этих направлениях результатов (осуществляющегося, однако, чаще всего, не математиками, а техниками, экономистами или биологами).

¹⁴⁵ SIAM [Society for Industrial and Applied Mathematics] Review, October 1962, pp. 297–320.

землю, даже если один и тот же пилот не в состоянии взять на себя управление полетом от начала и до конца.

Математику часто сравнивают с деревом, корни которого прочно и глубоко вросли в плодородную естественную почву. Ствол дерева – число и геометрическая фигура. От ствола отходит множество ветвей, символизирующих различные понятия и разделы математики, которые возникли в ходе ее развития. Одни ветви прочны и питают множество молодых побегов, другие дали несколько чахлых отростков, не увеличивающих особо ни размеры, ни прочность всего дерева. Есть на дереве и засохшие, мертвые ветви. Но самое важное, пожалуй, то, что дерево математики уходит своими корнями в надежную земную твердь, а через ствол и ветви с реальностью связаны и все математические теории. Предпринятые в последнее время попытки полностью удалить почву, оставив в неприкосновенности дерево, корни, ствол и всю пышную крону, не могли увенчаться успехом. Многие ветви смогут расцвести лишь после того, как корни еще глубже проникнут в плодородную землю. От черенков, привитых на новые ветви, но не подпитываемых живительными соками реальности, рождались вялые побеги, которым так и не суждено было обрести жизнь. При тщательном уходе таким побегам можно придать видимость живых: они также отходят от ствола и переплетаются с зелеными ветвями, но всё же они мертвы, и их можно отсечь, не нанеся ни малейшего ущерба всему живому.

Другие аргументы, казалось бы, подкрепляют утверждение Стоуна о том, что возможность свободно заниматься чистой математикой благоприятно скажется на укреплении всей математики и будет способствовать возникновению новых подходов к прикладной математике. Но тот, кто занимается чистой математикой, сколь бы изощрен ни был его разум и сколь бы громкое имя он ни носил, затрачивает на это значительную часть своих сил и, следовательно, может с меньшей эффективностью применять математические построения к практическим ситуациям. Отдавая свое время и энергию абстрактной математике, он неизбежно проникается ее атмосферой, и у него остается меньше времени для того, чтобы узнать о потребностях прикладной математики и разработать средства, отвечающие ее нуждам. Прикладные математики могут с пользой для себя осведомляться о достижениях чистых математиков, однако чрезмерное внимание к чистой математике приводит к пагубному для судеб математики распылению ресурсов. Невнимание к приложениям чревато изоляцией и, возможно, атрофией всей математики в целом.

Как показала история, Стоун заведомо заблуждался. В своем очерке «Математик» (1947) фон Нейман отметил:

Не подлежит сомнению, что определенная часть движущих идей в математике (причем именно в тех ее разделах, к которым как нельзя лучше применимо название «чистая математика») берет свое начало в естественных науках... На мой взгляд, наиболее характерная отличительная черта математики состоит в ее особом отношении к естественным наукам и вообще к любой науке, интерпретирующей факты на уровне более высоком, чем чисто описательный. ([105]¹⁴⁶, с. 88–89.)

Выдающийся французский математик Лоран Шварц, не колеблясь, заявил, что наиболее бурно развивающиеся области современной математики – абстрактная алгебра и алгебраическая топология – не имеют приложений.¹⁴⁷ Некоторые работы облачают конкретные темы в термино-

¹⁴⁶ Нейман фон Дж. Математик. – Природа, 1983, № 2, 88–95.

¹⁴⁷ **Яглом:** Этот тезис можно и оспаривать: так, например, в *теории кодирования*, имеющей огромное прикладное значение в условиях современной недостаточности пропускной способности большинства линий связи, большую роль играет *абстрактная алгебра* (в частности, так называемые *конечные поля Галуа*), *конечные геометрии* (геометрии в плоскостях или пространствах, содержащих всего конечное число точек) и прочие разделы «абстрактной» математики, созданные вне всякой связи с возможными их приложениями (ср., например, [112: Бэрликэмп Э. Алгебраическая теория кодирования. – М.: Мир, 1971; Касами Т. и др. Теория кодирования. – М.: Мир, 1978; Питерсон У., Уэлдон Э. Коды, исправляющие ошибки. – М.: Мир, 1976; Мак Вильямс Ф., Слоэн Н. Дж. Теория кодов, исправляющих ошибки. – М.: Связь, 1979.] или статью [113: Livinson N. Coding theory: a counter-example to G.H. Hardy's conception of applied mathematics. – American Math. Monthly, v. 77, 1970, № 3, p. 249–258.]). Также и такие области математики, как *топология* или *алгебраическая геометрия*, (не говоря уже о *функциональном анализе*), совсем еще недавно считавшиеся чисто абстрактными, в последнее время стали активно изучаться (и применяться) физиками (см., например, [114: Минеев В.П. Топологические объекты в нематических жидких кристаллах. Приложение к кн.: Болтынский В.Г., Ефремович В.А. Наглядная топология. – М.: Наука, 1982, с. 148–158; Воловик Г.Е., Минеев В.П. Физика и топология. – М.: Знание,

логию и понятия, характерные для этих областей, но подобный камуфляж не способствует решению прикладных проблем.

Однако сторонники чистой, абстрактной математики не думают сдаваться. Один из ведущих англичанов нашего времени профессор Жан Дьедонне в 1964 г. отверг, как ошибочное, утверждение о том, что если математике предоставить вариться в собственном соку, то она погибнет от истощения:

Напоследок я хотел бы подчеркнуть, сколь мало новейшая история оправдывает благочестивые пошлости прорицателей краха, регулярно предупреждающих нас о гибельных последствиях, которые математика неминуемо навлечет на себя, если откажется от применений к другим наукам. Я не собираюсь утверждать, что тесный контакт с иными областями, такими, как теоретическая физика, невыгоден для обеих сторон. Однако совершенно ясно, что из всех поразительных достижений, о которых я рассказывал, ни одно, за возможным исключением теории распределений, ни в малейшей степени не пригодно для физических применений. Даже в теории уравнений с частными производными сейчас упор больше делается на «внутренние» и структурные проблемы, чем на вопросы, имеющие прямое физическое значение. Даже если бы математика насильно была отрезана от всех прочих каналов человеческой деятельности, в ней достало бы на столетия пищи для размышлений над большими проблемами, которые мы должны еще решить в нашей собственной науке. ([115]¹⁴⁸, с. 11.)

Хотя Дьедонне отчетливо представлял себе нескончаемую вереницу проблем чистой математики, он – надо отдать ему должное – не обошел молчанием тезис о том, что всякое творение чистой математики в конечном счете находит применение. Приведя внушительный перечень исследований по чистой математике, и в частности по теории чисел, Дьедонне заметил: «Трудно представить, что подобные результаты окажутся применимыми к какой-нибудь физической проблеме». Выступая в защиту чистой математики в целом, Дьедонне вместе с тем не мог не заметить, что хвастливые заявления математиков о ценности чистой математики для естественных наук представляют собой своего рода «мелкое жульничество». По словам Дьедонне, чистые математики не пожалеют сил, чтобы доказать единственность решения какой-нибудь проблемы, но не ударят палец о палец, чтобы попытаться найти это решение. Физик же знает, что решение существует и единственно (Земля не обращается вокруг Солнца по двум различным орбитам), но ему необходимо знать истинную орбиту.

Более реалистических взглядов на значимость той математики, которой следовало бы заниматься, придерживался человек, который по своим заслугам в области чистой математики не уступал Дьедонне, – швед Ларе Гординг. Свои взгляды он изложил в докладе на Международном конгрессе математиков в 1958 г.:

Я не могу здесь вдаваться во многие важные части интересующего нас предмета, например в теорию разностных уравнений, теорию систем, приложения к квантовой механике и дифференциальной геометрии. Мой предмет – общая теория дифференциальных операторов с частными производными. Он вырос из классической физики, но не имеет сколько-нибудь существенных применений к ней. Тем не менее физика по-прежнему остается для него основным источником интересных проблем. У меня сложилось убеждение, что общие доклады, подобные тому, с которым я сейчас выступаю, менее полезны, чем периодические обзоры нерешенных физических проблем, требующих новых математических методов. Такие обзоры вряд ли сообщали что-либо новое специалистам, но могли бы указать многим математикам задачи, заслуживающие внимания. Усилия, направленные на более тесное взаимодействие между физикой и математикой, редко планировались заранее. Но именно они должны стать главной заботой международных математических конгрессов.

Тех, кто гордится созданием математики, не опорооченной связью с физическим миром, а под давлением начинает утверждать, что в один прекрасный день другие найдут применение их ныне бесцельным работам, можно было бы оставить в покое. Но их действия противоречат всему ходу истории. Их уверенность в том, что математика, освобожденная от связей с естественными науками, принесет более весомые, разнообразные и плодотворные результаты, применимые к

1980.]; ср. [103: Яглом И.М. Математические структуры и математическое моделирование. – М.: Советское радио, 1980.]).

¹⁴⁸ Дьедонне Ж. Современное развитие математики. – Сб. переводов «Математика», 1966, т.10, № 3, с. 3–11.

более широкому кругу явлений, чем старая, традиционная математика, не подкрепляется ничем, кроме их же собственного голословного утверждения.

Сторонники чистой математики могут выдвигать (и действительно выдвигают) и другие аргументы в защиту ценности своей работы, ссылаясь на внутреннюю красоту таких исследований и интеллектуальный вызов, который они бросают ученому. В существовании подобных ценностей вряд ли кто-нибудь сомневается. Но позволительно усомниться в том, что они могут служить достаточным основанием для огромного количества работ по чистой математике. Какого бы мнения мы ни придерживались, ясно одно: эти ценности не вносят никакого вклада в то, что придает математике наибольшую значимость, – в изучение природы. Красота и интеллектуальный вызов – атрибуты математики ради математики. Но эти проблемы, безусловно, заслуживают особого разговора, который выходит далеко за рамки нашего рассказа об изоляции математики.

Защитники и критики чистой математики по вполне понятным причинам находятся в довольно натянутых отношениях друг с другом. Все споры между ними тотчас рождают юмористические или саркастические замечания. Прикладные математики, являясь приверженцы чистой математики, не заботятся о строгих доказательствах – единственно, что их интересует, это соответствие полученных ими результатов физическим явлениям. Типичным представителем прикладной математики был один из основоположников современной «теоретической электротехники» англичанин Оливер Хевисайд (1856–1925). Применяемые им методы решений, с точки зрения чистых математиков, были сомнительны в силу полной своей необоснованности, за что Хевисайда не раз резко критиковали. В свою очередь Хевисайд относился к своим критикам, которых он называл «логическими контролерами», с высокомерным пренебрежением. «Логике нетрудно быть терпеливой, ведь она вечна», – говорил он. Ему доводилось не раз приводить чистых математиков в замешательство. В те времена, когда так называемые расходящиеся ряды считались полностью «незаконными», Хевисайд заявил по поводу одного из таких рядов: «Подумаешь, ряд расходится! Ведь можем же мы что-нибудь с ним сделать!» Впоследствии все «экстравагантные» методы Хевисайда были строго обоснованы и даже породили новые направления математических исследований. Дабы уязвить пуристов, прикладные математики имеют обыкновение утверждать, что чистые математики способны лишь находить трудности в любом решении, тогда как прикладные математики могут разрешить любую трудность. Популярно также высказывание, что чистые математики решают «то, что можно, так как нужно», а прикладные – «то, что нужно, так как можно».

Прикладные математики любят поддразнивать пуристов и по-другому. Математикам, работающим в приложениях, приходится решать те задачи, которые ставит природа, тогда как чистые математики сами придумывают себе задачи. Поэтому прикладные математики и говорят, что чистые математики ведут себя подобно человеку, который ищет потерянный на темной улице ключ под фонарем только потому, что там светлее.

А чтобы еще больше унижить своих извечных противников, прикладные математики рассказывают и такую историю. У одного человека скопилось грязное белье, и он отправился на поиски прачечной. Увидев вывеску «Прием белья в стирку», он заходит в помещение и кладет узел с бельем на прилавок. Владелец заведения, глядя на посетителя с некоторым удивлением, спрашивает: «Что вам угодно?» «Я хочу отдать белье в стирку», – говорит посетитель. «Но мы не принимаем белье в стирку», – отвечает хозяин заведения. На этот раз удивляется посетитель. «А для чего же эта вывеска в витрине?» – спрашивает он. «Не обращайтесь на нее внимания, – отвечает хозяин, – мы ее сделали просто так».

Спор между прикладными и чистыми математиками продолжается, а поскольку в современной математике тон задают чистые математики, они могут позволить себе смотреть сверху вниз на своих «заблудших собратьев» и даже выговаривать им. Как заметил профессор Клиффорд Э. Трусделл, ««прикладная математика» – это оскорбление, наносимое теми, кто считает себя «чистыми» математиками, тем, кого они считают нечистыми... но «чистая» математика – самоубийственное отрицание своего происхождения от воспринимаемых человеком ощущений или тайный пароль, позволяющий «чистых» отличать от «нечистых», – не более чем болезнь, изобретенная в прошлом веке...». Она стала самоцелью, и никому из чистых математиков не приходит в голову задуматься над тем, для чего нужна их наука. Само по себе такое положение не слишком завидно. Цель математики – открывать нечто достойное познания. Ныне же одно математическое исследование порождает другое, то в свою очередь порождает третье и т.д. В храме математики никто более не осмеливается спрашивать что-либо о цели и

смысле. Математика утратила связь с реальностью. Стены башни из слоновой кости стали настолько толстыми, что находящиеся внутри ее исследователи перестали видеть то, что происходит снаружи. Попавшие в башню умы оказались в изоляции.

Математики могут расходиться во мнениях, но физикам и представителям других наук не остается ничего другого, как оплакивать то горестное положение, в котором они оказались. Вот что говорит, например, профессор Массачусетского технологического института Джон Кларк Слэтер:

Физик получает очень мало помощи от математика. На каждого математика, способного понять прикладные проблемы, как фон Нейман, и внести реальный вклад в их решение, приходится двадцать математиков, не проявляющих к прикладным проблемам ни малейшего интереса, работающих либо в областях, далеких от физики, либо уделяющих основное внимание более старым и знакомым разделам математической физики. Неудивительно, что при взгляде на математиков физик испытывает такое чувство, будто они сошли с пути, который в прошлом привел к величию математики, и вряд ли ступят на него до тех пор, пока решительно не сойдут в основной поток развития математической физики, потому что именно ей мы обязаны наиболее плодотворными достижениями математики в прошлом... Это единственный путь, способный привести современного математика к величию.

Забвение интересов физики было избрано темой большой лекции [116]¹⁴⁹, с которой в 1972 г. выступил перед математиками известный американский физик Фримен Дайсон. И прежде, и теперь, отметил Дайсон, математикам неоднократно предоставлялась возможность внести свой вклад в решение физических проблем первостепенной важности, но математики неизменно упускали свой шанс. Некоторые из этих проблем, полностью или частично, каким-то образом всё же проникли в математику, но математикам не известно ни их происхождение, ни физическая значимость. Математики следуют в произвольном направлении и не пытаются даже осмысливать собственные достижения. По словам Дайсона, брак между математикой и физикой закончился разводом.

В XX в. разрыв между математикой и физикой ускорился. В наше время нередко приходится слышать и читать заявления математиков о том, что их наука не зависит от естественных наук. Математики теперь, не колеблясь, открыто признают, что их интересы сосредоточены на чистой математике, а физика им безразлична. Хотя точная статистика неизвестна, но можно полагать, что основная часть работающих сегодня математиков не сведущи в физике и спокойно пребывают в этом благословенном состоянии. Несмотря на опыт истории и на критику, тенденция к абстракции, к обобщению ради обобщения и к изучению произвольно выбранных проблем сохраняется в математике и поныне. Разумная потребность в изучении целого класса проблем с целью более глубокого понимания частных случаев и в абстракции с целью выявления сущности проблемы стала не более чем предлогом для обобщений ради обобщений и абстракций ради абстракций.

За много веков человек создал такие великие построения, как евклидова геометрия, птолемея система мира, гелиоцентрическая система мира, механика Ньютона, теория электромагнитного поля, а позднее – теория относительности и квантовая теория. Математика, как известно, является неотъемлемой частью всех этих и многих других важных и мощных теорий, их основой и их сущностью. Математические теории позволили нам многое узнать о природе и охватить в понятных теоретических схемах множество внешне различных явлений. Математические теории дали человечеству возможность обнаружить порядок и план повсюду в природе, где только их можно было найти; они помогли нам частично или полностью овладеть обширными областями знания.

Но большинство математиков предало забвению древние традиции математики и наследие ее прошлого. Наполненные глубоким содержанием сигналы, которые посылает нам природа, достигают лишь закрытых глаз и нечутко прислушивающихся ушей. Математики продолжают жить на проценты от репутации, заработанной их предшественниками, и жаждут при этом шумного одобрения и такой же поддержки, какую математика имела в прошлом. Чистые математики пошли еще дальше – они изгнали прикладных математиков из своего братства в надежде, что им одним достанется вся слава, которую снискали их предшественники. Они

¹⁴⁹ Дайсон Ф.Дж. Упущенные возможности. – Успехи математических наук, 1980, т.35, № 1 (211), с. 171–183 (и комментарии переводчика: с. 183–191).

выбросили за борт богатейший источник идей и беспечно транжируют накопленное ранее богатство. В погоне за блуждающим огоньком они покинули пределы реального мира. Правда, некоторые чистые математики, памятуя о благородной традиции, стимулировавшей в прошлом математические исследования и приведшей Ньютона и Гаусса к выпавшим на их долю почестям, продолжают утверждать о потенциальной ценности своих математических работ для естественных наук. Они утверждают, что создают модели для теоретического естествознания. Но в действительности подобная цель их нисколько не занимает. Более того, поскольку большинство математиков абсолютно не сведущи в естественных науках, они просто не в состоянии создавать такие модели. Они считают, что лучше хранить целомудрие, чем делить брачное ложе с естествознанием. Современная математика в целом обращена внутрь, она питается своими собственными соками. Судя по опыту прошлого, маловероятно, что многие из современных математических исследований внесут хоть какой-нибудь вклад в развитие естественных наук. Возможно, математике суждено еще долго брести в кромешной тьме, отыскивая свой путь на ощупь, ведь современная математика автономна. Развиваясь в направлениях, которые по ее собственным критериям определяются как имеющие отношение к делу и предпочтительные перед другими, современная математика даже гордится своей независимостью от диктуемых внешним миром проблем, мотивировок, побудительных стимулов. В отличие от математики прошлого современная математика не обладает более ни единством, ни целью.

Изоляция большинства современных математиков достойна сожаления по многим причинам. Сфера приложений математики в науке и технике расширяется необычайно быстро. Вплоть до недавнего времени казалось, что близко к осуществлению пророчество Декарта, видевшего в математике высшее достижение человеческого разума, триумф логики над эмпиризмом и предсказавшего проникновение математических методов во все науки. Но именно в тот момент, когда математический подход распространился на многие области знания, математики отошли в сторону. Сто лет назад и ранее математика и физика были тесно связаны между собой. С тех пор между ними произошел разрыв, и ныне брешь между математикой и физикой достигла весьма ощутимых размеров. Современные математики упускают из виду, что ценность их науки определяется прежде всего тем вкладом, который она вносит в познание законов природы и в овладение природой. Большинство современных математиков хотят полностью изолировать свою науку и заниматься лишь исследованиями, лежащими в стороне от насущных проблем естествознания. Между теми, кто считает необходимым при выборе направления своих исследований придерживаться древней благородной традиции, и теми, кто предпочитает плыть по течению и расследовать всё, что подсказывает их неумная фантазия, произошел раскол. Утратив за последние сто лет развития математики – становившейся всё более чистой – остроту зрения, математики разучились читать книгу природы и потеряли всякую охоту к подобному чтению. Они обратились к таким областям математики, как абстрактная алгебра и топология, к таким абстракциям и обобщениям, как функциональный анализ, к такой далекой от приложений деятельности, как доказательство теорем существования решений дифференциальных уравнений, к аксиоматизации различных наук и к бесплодной игре разума.¹⁵⁰ Лишь немногие современные математики всё еще пытаются решать более конкретные проблемы, главным образом в теории дифференциальных уравнений и близких к ней областях.

¹⁵⁰ **Яглом:** Этот тезис можно и оспаривать: так, например, в *теории кодирования*, имеющей огромное прикладное значение в условиях современной недостаточности пропускной способности большинства линий связи, большую роль играет *абстрактная алгебра* (в частности, так называемые *конечные поля Галуа*), *конечные геометрии* (геометрии в плоскостях или пространствах, содержащих всего конечное число точек) и прочие разделы «абстрактной» математики, созданные вне всякой связи с возможными их приложениями (ср., например, [112: Бэрликэмп Э. Алгебраическая теория кодирования. – М.: Мир, 1971; Касами Т. и др. Теория кодирования. – М.: Мир, 1978; Питерсон У., Уэлдон Э. Коды, исправляющие ошибки. – М.: Мир, 1976; Мак Вильямс Ф., Слоэн Н. Дж. Теория кодов, исправляющих ошибки. – М.: Связь, 1979.] или статью [113: Livinson N. Coding theory: a counter-example to G.H. Hardy's conception of applied mathematics. – American Math. Monthly, v. 77, 1970, № 3, p. 249–258.]). Также и такие области математики, как *топология* или *алгебраическая геометрия*, (не говоря уже о *функциональном анализе*), совсем еще недавно считавшиеся чисто абстрактными, в последнее время стали активно изучаться (и применяться) физиками (см., например, [114: Минеев В.П. Топологические объекты в нематических жидких кристаллах. Приложение к кн.: Болтянский В.Г., Ефремович В.А. Наглядная топология. – М.: Наука, 1982, с. 148–158; Воловик Г.Е., Минеев В.П. Физика и топология. – М.: Знание, 1980.]; ср. [103: Яглом И.М. Математические структуры и математическое моделирование. – М.: Советское радио, 1980.]).

Означает ли отход большинства математиков от естественных наук, что современное естествознание может лишиться математики? Не совсем. Как заметили некоторые наиболее проницательные математики, новые Ньютоны, Лапласы и Гамильтоны создадут в будущем нужную им математику, подобно тому, как их предшественники создали ее в прошлом. Ньютон, Лаплас и Гамильтон были физиками, хотя и снискали всеобщее признание как первоклассные математики. Рихард Курант писал в 1957 г. в некрологе по случаю кончины Франца Реллиха: «Если существующая ныне тенденция сохранится, то не исключена опасность, что развитие «прикладной» математики в будущем станет уделом физиков и инженеров, а профессиональные математики сколько-нибудь высокого ранга не будут иметь к этому никакого отношения». Слово «прикладная» Курант взял в кавычки, потому что он имел при этом в виду всю содержательную и наполненную смыслом математику. Сам он не проводил различия между чистой и прикладной математикой.

Пророчество Куранта сбылось. Поскольку система ценностей, принятая в математическом сообществе, отдает предпочтение чистой математике, лучшие работы в области прикладной математики выполняют инженеры-электрики, вычислители, биологи, физики, химики и астрономы. Подобно тем математикам, которых Гулливер встретил во время путешествия в Лапуту, пуристы живут на острове, висящем над Землей. Решать проблемы, связанные с жизнью общества на Земле, они предоставляют другим. Еще какое-то время такие математики будут жить в атмосфере, созданной для их науки усилиями математиков прошлого, но по исчерпанию запасов живительного воздуха они обречены на гибель от удушья.

Талейран заметил однажды, что идеалист не может долго оставаться идеалистом, если он не реалист, и реалист не может долго оставаться реалистом, если он не идеалист. Применительно к математике высказывание Талейрана можно истолковать так, что реальные проблемы необходимо идеализировать и изучать абстрактно, но деятельность идеалиста, игнорирующего реальность, не жизнеспособна. Математика должна прочно стоять на земле и уходить головой в облака. Подлинную, живую, содержательную математику рождает сочетание абстракции и конкретных проблем. Математики могут воспарять в облака абстрактного мышления, но, подобно птицам, за пищей должны возвращаться на землю. Чистую математику можно сравнить с тортом, подаваемым на десерт. Он приятен на вкус и даже способен в какой-то мере насытить нас, но организм не может существовать только на тортах – без «мяса и картошки» реальных проблем, составляющих основу его питания.

Чрезмерное внимание к искусственным проблемам чревато опасностью. Если и впредь математики будут направлять свои усилия главным образом на чистую математику, то математика перестанет быть той наукой, которую так ценили в прошлом, хотя и будет носить то же название. Математика – чудесное изобретение, но чудо кроется в способности человеческого разума конструировать модели сложных и, казалось бы, не поддающихся описанию явлений природы. Именно эта способность позволяет человеку постигать глубинную сущность явлений и обретать власть над природой.

Но чтобы выбрать свой путь, человек должен быть свободен. Как сказано в «Одиссее» Гомера, «различное людям различным». Гомеру вторит живший веком позже поэт Архилох: «Каждый по-своему радуется сердцу». Ту же мысль мы находим у Гете: «У человека остается свобода заняться тем, что более всего привлекает его, что доставляет ему наслаждение, что кажется ему наиболее полезным». Но подлинным предметом исследования для человечества, добавляет Гете, является сам человек. Перефразируя высказывание Гете, мы можем сказать, что подлинным предметом исследования для математиков является природа. Как сказано в «Новом органоне» Фрэнсиса Бэкона, «подлинная же и надлежащая мета [конический столбик, устанавливавшийся в начальном и конечном пунктах конского ристалища в Древнем Риме] наук не может быть другой, чем наделение человеческой жизни новыми открытиями и благами» ([23]¹⁵¹, т. 2, с. 43).

В конечном счете здравый смысл должен подсказать, какое направление исследований стоит того, чтобы им заниматься. Математический мир должен проводить различие не между чистой и прикладной математикой, а между математикой, ставящей своей целью решение разумных проблем, и математикой, потакающей лишь чьим-то личным вкусам и прихотям, математикой целенаправленной и математикой бесцельной, математикой содержательной и бессодержательной, живой и бескровной.

¹⁵¹ Бэкон Ф. Сочинения в 2-х томах. – М.: Мысль, 1977 (т.1); 1978 (т.2).

XIV. Куда идет математика?

Смири гордыню, бессильный разум.

Блез Паскаль



Рассказывая о всё возрастающих трудностях, с которыми приходилось сталкиваться математикам при поисках ответа на вопрос, что такое математика и что следует принять за основу при ее построении, мы обнаружили в итоге неприглядную картину. Главное утешение, которое получали математики от своей работы, – необыкновенная эффективность математики в приложениях к другим наукам – частично утратило свою силу, поскольку большинство математиков перестало заниматься приложениями. Как же воспринимают математики стоящую перед ними дилемму – вновь обратиться к приложениям или продолжить занятие чистой математикой – и что они могут ожидать от будущего? В чем сущность математики?

Попытаемся сначала проанализировать, как математика дошла до ее нынешнего бедственного положения и к чему это привело. Математики Древнего Египта и Вавилона, заложившие первые

камни в фундамент своей науки, не имели ни малейшего представления о том, какое здание они возводят. Поэтому они не стали рыть глубокий котлован под фундамент, а начали закладывать его прямо на поверхности земли. В те давние времена земля казалась им достаточно прочным основанием, и материал, с которым они начали строительство, – факты о числах и геометрических фигурах – был взят из повседневного, земного опыта. Чисто земное происхождение математики нашло отражение в постоянно используемом нами термине «геометрия», что означает землемерие.

Однако когда здание математики начало расти, выяснилось, что всё сооружение достаточно шатко и что, надстраивая новые этажи, можно превратить в руины и то, что было создано раньше. Греки классического периода не только заметили грозящую опасность, но и произвели необходимую реконструкцию. С этой целью они приняли две меры. Во-первых, выбрали на поверхности земли узкие полосы прочного грунта, на которых, как им казалось, не страшно возводить стены. Такими опорными полосами стали самоочевидные истины о пространстве и о целых числах. Во-вторых, греки укрепили каркас здания стальной арматурой – роль «стали» здесь играло дедуктивное доказательство каждого нового факта.

Здание античной математики – структуры, состоящей в основном из евклидовой геометрии, – оказалось вполне устойчивым. Правда, в нем обнаружился один досадный дефект. Дело в том, что длины некоторых отрезков выражаются иррациональными числами: например, длина гипотенузы равнобедренного прямоугольного треугольника с единичными катетами равна иррациональному числу $\sqrt{2}$. Но греки признавали только обычные целые числа и их отношения; поэтому они не могли допустить существование таких величин, как $\sqrt{2}$. Греки решили возникшую проблему, попросту изгнав иррациональные числа: они отказались считать $\sqrt{2}$ «числом», а следовательно, отказались и от идеи сопоставлять любым длинам, площадям и объемам численные значения. Тем самым греки не внесли никаких дополнений в арифметику и алгебру целых чисел, которые можно было бы включить и в структуру геометрии. Правда, некоторые ученые александрийского периода (в первую очередь Архимед) производили арифметические действия над иррациональными числами, но эти результаты не были включены в канонический свод знаний, составляющих логическую структуру математики.

Индийцы и арабы возвели новые этажи здания математики, нисколько не заботясь о его устойчивости. Прежде всего примерно в VI в. индийцы ввели отрицательные числа. Затем

индийцы и арабы – менее привередливые, чем греки, – не только приняли иррациональные числа, но и разработали правила действий, над ними. Европейцы эпохи Возрождения, унаследовавшие математику греков, индийцев и арабов, поначалу с недоверием отнеслись к этим чужеродным элементам. Но вскоре потребности естествознания возобладали над осторожностью – европейцы поступились заботами о логической обоснованности математики.

Расширяя математику чисел, индийцы, арабы, а позднее европейцы возводили этаж за этажом: так появились комплексные числа, новые разделы алгебры, дифференциальное и интегральное исчисление, дифференциальные уравнения, дифференциальная геометрия и т.д. Однако вместо «стали» древнегреческих мыслителей европейцы использовали «деревянные колонны и балки» – смесь интуитивных рассуждений и физических построений. Но деревянные опоры не выдержали нагрузки – в стенах величественного здания математики стали появляться трещины. К началу XIX в. здание математики снова оказалось в аварийном состоянии, и математика в спешном порядке принялась заменять дерево сталью.

Пока укрепляли верхние этажи, выяснилось, что в казавшемся столь твердом грунте (выбранных греками аксиомах), на котором покоилась вся постройка, имеются не замеченные ранее дыры. Создание неевклидовой геометрии показало, что аксиомы евклидовой геометрии не были, как считалось прежде, полосками прочного грунта, а лишь казались таковыми. Не могли служить прочной основой и аксиомы неевклидовой геометрии. То, что математики принимали за абсолютную реальность, уповав на способность своего разума познавать и безошибочно анализировать природу, на проверку оказалось ненадежными данными чувственного опыта. Но беда никогда не приходит одна: создание новых алгебр заставило математиков осознать, что и казавшиеся столь надежными свойства чисел имеют в действительности не более прочное основание, чем геометрия. Так над всем зданием математики – над геометрией и арифметикой с их продолжениями в алгебру и анализ – нависла смертельная угроза. Поднявшееся уже высоко здание могло в любой момент рухнуть или провалиться в трясину.

Чтобы спасти здание от разрушения, необходимы были экстренные меры – и математики приняли вызов. Они наконец поняли, что прочного грунта, на котором можно было бы возвести фундамент здания математики, не существует. То, что кажется прочным, в действительности обманчиво и зыбко. Но, быть может, здание математики удастся возвести на прочном основании иного рода? В качестве такого основания математики решили выбрать четко сформулированные определения, полные перечни используемых аксиом и явное доказательство всех результатов, сколь бы очевидными они ни выглядели интуитивно. Кроме того, вместо поиска истины математики устремились теперь на поиск логической непротиворечивости. Доказываемые теоремы должны быть строго взаимосвязаны, придавая зданию математики желанную прочность (гл. VII). Движение за аксиоматизацию, развернувшееся в конце XIX в., позволило придать прочность зданию математики. Так, несмотря на то, что математика как будто бы утратила опору в реальности, очередной кризис в истории математики удалось преодолеть.

К сожалению, цемент, скрепляющий фундамент нового здания, не затвердевал. Строители не могли гарантировать непротиворечивость, и, когда возникли противоречия в теории множеств, математики поняли, что над их творением нависла еще более серьезная угроза. Разумеется, они не собирались безучастно наблюдать, как обращаются в прах плоды многовековых усилий. Непротиворечивость зависит от того, что положено в основу рассуждений. Следовательно, спасти положение может лишь полная перестройка оснований математики. Необходимо было укрепить сам фундамент реконструируемой математики – ее логические и математические аксиомы, и строители решили копать еще глубже. К сожалению, они так и не смогли прийти к единому мнению относительно того, где и как надлежит укреплять основания, и каждый, считая, что именно ему суждено обеспечить надлежащую прочность здания математики, приступал к перестройке так, как считал нужным. Построенное совместными усилиями здание не отличалось ни изяществом пропорций, ни особой устойчивостью. Оно расплзалось во все стороны и было весьма шатким. Каждое крыло здания претендовало на роль единственно истинного храма математики, где хранятся жемчужины математической мысли.

Вероятно, всем известна притча о семи слепцах и слоне. Наткнувшись на слона, слепцы принялись ощупывать его и спорить, на что он похож. Тот, кто ощупывал хвост, заявил, что слон похож на веревку; его товарищ по несчастью, ощупывавший ногу слона, сравнил слона с колонной; третий слепец, ощупывавший хобот, утверждал, что слон подобен змее и т.д. Слепцы не могли прийти к согласию, так как все они представляли себе слона по-разному. Хотя математика по своей структуре, возможно, намного изящнее слона, тем, кто занимается

основаниями математики и рассматривает ее с различных точек зрения, так же трудно согласовать свои позиции, как и несчастным слепцам.

Математика достигла ныне той стадии развития, когда вопрос о том, что, собственно, надлежит считать математикой – логицизм, интуиционизм, формализм или теорию множеств, – вызывает ожесточенные споры. Каждое течение в основаниях математики обладает тонкой структурой: разделяется на отдельные русла, состоящие в свою очередь из множества протоков. Так, интуиционисты не сходятся между собой во мнениях относительно того, что следует считать фундаментальными, интуитивно воспринимаемыми понятиями: только целые или также и некоторые иррациональные числа, закон исключенного третьего, распространяемый только на конечные или и на счетные множества, по-разному трактуемые конструктивные методы. Логицисты полагаются только на логику, но и они не избавлены от сомнений по поводу аксиом сводимости, выбора и бесконечности. Представители теоретико-множественного течения могут двигаться в любом из нескольких различных направлений в зависимости от того, принимают они аксиому выбора и гипотезу континуума или отвергают одну из этих аксиом (ибо гипотеза континуума также имеет ныне статус аксиомы!) или даже отказываются от них обеих. Даже формалисты могут выбирать путь по своему усмотрению. Выбор принципов математики для доказательства непротиворечивости не вполне однозначен. Финитистских принципов, отстаиваемых Гильбертом, оказалось недостаточно даже для доказательства исчисления предикатов (первой степени), не говоря уже об установлении непротиворечивости формальных математических систем Гильберта. Формалистам не оставалось ничего другого, как воспользоваться нефинитистскими методами (гл. XII). Кроме того, как показал Гёдель, в рамках наложенных Гильбертом ограничений любая достаточно мощная формальная система содержит неразрешимые утверждения, т.е. утверждения, которые, базируясь на аксиомах, нельзя ни доказать, ни опровергнуть; но это значит, что подобные утверждения (или их отрицания) можно принять в качестве дополнительных аксиом. Однако и после присоединения новой аксиомы расширенная система, согласно теореме Гёделя, всё еще должна содержать неразрешимые утверждения. Приняв их за новые дополнительные аксиомы, мы могли бы вторично расширить формальную систему и т.д. Процесс последовательного расширения исходной формальной системы можно было бы продолжать бесконечно.

Логицисты, формалисты и представители теоретико-множественного направления полагаются на аксиоматические основания. В первые десятилетия XX в. именно аксиоматика превозносилась как наиболее подходящий фундамент для построения математики. Но теорема Гёделя утверждает, что ни одна система аксиом не охватывает всех истин, содержащихся в любой математической структуре, а теорема Левенгейма–Сколема показывает, что каждая система аксиом включает больше, чем предполагалось. Только интуиционисты могут позволить себе безразличие к проблемам, возникшим в связи с аксиоматическим подходом.

В довершение всех разногласий и неясностей по поводу того, какие основания математики считать наилучшими, над головами математиков, подобно дамоклову мечу, висит нерешенная проблема доказательства непротиворечивости всей математики. Какую бы философию ни исповедовал тот или иной математик, в своей работе он рискует натолкнуться на противоречие.

Основной вывод, который можно сделать из существования нескольких противоборствующих подходов к математике, состоит в следующем: имеется не одна, а много математик. О математике в целом, по-видимому, правильнее говорить во множественном числе (как о многих математиках), оставив единственное число для обозначения любого из подходов. Философ Джордж Сантаяна как-то сказал: «Не существует бога, и дева Мария – мать его». Перефразируя эти слова, можно сказать: «Не существует единой, общепринятой математики, и греки – создатели ее». Широкий выбор подходов, открывающийся перед математиками, вызывает у них ощущение, близкое к тому, которое отлично передано в следующих строках Шелли:

Пред роем нескончаемым
Бесчисленных миров
Фантазии крылатой
Кружится голова.

Насколько можно судить, в ближайшем будущем нам придется обходиться без критерия, который позволял бы выбрать предпочтительный подход к собственно математике.

Примирить разные взгляды на то, что такое истинная математика (или по крайней мере в каком направлении она должна развиваться), можно надеяться лишь основываясь на прогрессе в

решении тех спорных вопросов, по которым расходятся во мнениях математики разных школ. Больше всего разногласий вызывает вопрос о том, что такое математическое доказательство.

Во все времена – начиная с древнейших ионийской и пифагорейской школ (гл. I) – предполагалось, что математическое доказательство – это ясный и бесспорный процесс; формализации этого процесса Аристотель посвятил десять лет жизни. Правда, долгое время им пренебрегали (гл. V–VIII), но в целом математики никогда о нем не забывали. Само понятие математического доказательства всегда существовало; оно и служило парадигмой и образцом, которому в той или иной степени стремились следовать ученые.

Что же заставило математиков изменить отношение к доказательству и даже разбиться на враждующие группировки, каждая из которых придерживается своей версии этого важнейшего понятия? На протяжении более чем двух тысячелетий математики разделяли старые взгляды на логику, согласно которым логические принципы в том виде, как их кодифицировал Аристотель, являются абсолютными истинами. Уверенность в непогрешимости логических принципов подкреплялась их длительным и, казалось бы, безотказным использованием. Но впоследствии математики поняли, что основы логики – такие же продукты человеческого опыта, как и аксиомы евклидовой геометрии. Возникло легкое беспокойство по поводу того, какие же логические аксиомы можно считать надежными. Так, интуиционисты не без основания ограничили область применения закона исключенного третьего. И кто знает, стали бы мы считать, что приемлемые ныне логические принципы останутся таковыми и впредь, не будь их репутация столь безупречной в прошлом?

Второй связанный с понятием доказательства спорный вопрос, возникший с появлением логистической школы, можно сформулировать так: что входит и что не входит в («исходные») логические принципы? Хотя Рассел и Уайтхед без каких-либо колебаний в первом издании «Оснований математики» включили в свой список аксиом аксиомы бесконечности и выбора, позднее они отступили от этой позиции, не только признав, что первоначальные логические принципы не были абсолютными истинами, но уяснив, что аксиомы выбора и бесконечности аксиомами логики не являются. Во втором издании «Оснований математики» эти аксиомы не были включены в исходный список аксиом и их использование при доказательстве некоторых теорем каждый раз оговаривалось особо.

Помимо разногласий относительно того, какие логические принципы можно считать приемлемыми, существуют разногласия и по поводу того, сколь далеко простираются сферы действия логики. Как известно, логицисты были убеждены, что логики достаточно для обоснования всей математики, хотя впоследствии им приходилось всячески изворачиваться, когда дело касалось проблем, связанных с аксиомами бесконечности и выбора. По мнению формалистов, одной лишь логики недостаточно и для обоснования математики; логические аксиомы необходимо дополнить чисто математическими. Представители теоретико-множественного направления обращались с логическими принципами довольно небрежно, и кое-кто из них даже не удосуживался указывать используемые логические принципы в явном виде. Интуиционисты из принципиальных соображений считали нужным не вдаваться в логику.

Еще один спорный вопрос – понятие существования. Например, установив, что каждый многочлен имеет по крайней мере один корень, мы доказываем чистую теорему существования (*Existenzbewies* – нем). Любое доказательство, если оно непротиворечиво, приемлемо с точки зрения логицистов, формалистов и представителей теоретико-множественного направления. Но доказательство, даже не использующее закона исключенного третьего, может не указывать метода, позволяющего **найти** (или **вычислить**) тот объект, существование которого мы установили. Для интуиционистов доказательства существования такого рода неприемлемы. Нежелание интуиционистов допустить трансфинитные кардинальные и ординальные числа (поскольку эти числа интуитивно не очевидны и конструктивно не достижимы в интуиционистском понимании конструктивности, или вычислимости) – еще один пример различных стандартов понимания «существования». Спорный вопрос, в каком смысле существуют не только отдельные математические объекты, например корни многочленов, но и вся математика в целом, имеет первостепенное значение, и мы еще вернемся к нему в этой главе.

Интерес к тому, что такое истинная математика, подогревается еще одним обстоятельством. Какие математические аксиомы можно считать приемлемыми? Блестящий пример вопросов такого рода – вопрос о том, допустимо ли использование аксиомы выбора. Пытаясь ответить на него, математики встали перед дилеммой; не использовать аксиому выбора или отвергнуть ее означало отказаться от больших и важных разделов математики, а применение

аксиомы выбора приводило если не к противоречиям, то к интуитивно неразумным выводам (гл. XII).

Неспособность математиков доказать непротиворечивость своей науки бросает тень на весь идеал математики. Противоречия обнаруживались в самых неожиданных местах. И хотя их удавалось разрешить более или менее приемлемым образом, опасность возникновения новых противоречий, несомненно, заставила многих математиков скептически относиться к чрезмерным усилиям, которые их собратья прилагали для достижения строгости.

Что же такое математика, если она перестала быть однозначной, строгой логической конструкцией? Это серия интуитивных прозрений, тщательно отсеянных, очищенных и организованных с помощью той логики, которую занимавшиеся ее отбором люди хотели и могли применять, когда им заблагорассудится. Чем больше усилий прилагалось к уточнению понятий и систематизации дедуктивной системы математики, тем более изощренными становились интуитивные представления. Но опирается ли математика на какие-либо фундаментальные интуитивные представления, которые могут косвенно отражать структуру наших органов чувств, мозга и внешнего мира? Математика – творение человеческого разума, и любая попытка подвести под нее некую абсолютную базу обречена на провал.

Прогресс математики представляет собой цепочку великих интуитивных озарений, впоследствии получавших обоснования, которые возникают не за один прием, а путем последовательных поправок, долженствующих исправить различного рода ошибки и упущения, вводимых до тех пор, пока доказательство не достигнет приемлемого для своего времени уровня строгости.¹⁵² Ни одно доказательство не является окончательным. Новые контрпримеры подрывают старые доказательства, лишая их силы. Доказательства пересматриваются, и новые варианты ошибочно считаются окончательными. Но, как учит история, это означает лишь, что для критического пересмотра доказательства еще не настало время. Иногда математики сознательно откладывают пересмотр доказательства на будущее. Промедление объясняется не только тем, что обнаружение ошибки в чужом доказательстве не приносит славы открывателю, но и другой причиной: математик, которому хватило ума усомниться в правильности ранее известного доказательства теоремы, обычно стремится самостоятельно доказать ее, связав тем самым старый факт со своим именем. Математики гораздо больше озабочены доказательством собственных теорем, нежели поиском ошибок в чужих доказательствах.

Некоторые школы пытались заточить математику в стены логики. Но интуиция не терпит никаких посягательств на свою свободу. Представление о математике как о своде абсолютно надежных, бесспорных и неопровержимых истин, имеющих под собой прочное основание, разумеется, восходит к классическому периоду, воплощенному в «Началах» Евклида. Греческий идеал довлел над мышлением математиков более двадцати столетий. Но «злой гений» Евклид явно сбил математиков с истинного пути.

В действительности математик не полагается на строгое доказательство до такой степени, как обычно считают. Его творения обретают для него смысл до всякой формализации, и именно этот смысл сам по себе придает реальность. Попытки установить точные границы результата путем вывода его из системы аксиом могут оказаться в известной степени полезными, но, по существу, они довольно слабо влияют на значение результата.

Интуиция может оказаться более удовлетворительной и вселять большую уверенность, чем логика. Когда математик спрашивает себя, почему верен тот или иной результат, он ищет ответа в интуитивном понимании. Строгое доказательство ничего не значит для математика, если результат ему непонятен интуитивно. Обнаружив непонимание, математик подвергает доказательство тщательнейшему критическому пересмотру. Если доказательство покажется ему правильным, то он приложит все силы, чтобы понять, почему интуиция подвела его. Математик жаждет понять внутреннюю причину, по которой успешно срабатывает цепочка силлогизмов. Пуанкаре сказал однажды: «Когда довольно длинное рассуждение приводит нас к простому и неожиданному результату, мы не успокаиваемся до тех пор, пока нам не удастся показать, что

¹⁵² **Яглом:** Классический пример, подкрепляющий высказанную мысль, доставляет нам хотя бы теория пределов, начавшаяся с принадлежащей Ньютону «чисто физической» концепции предела; также и первое определение предела, данное Д'Аламбером в одноименной статье знаменитой «Энциклопедии», с нашей сегодняшней точки зрения было дефектным (так, например, Д'Аламбер настаивал на монотонном приближении переменной величины к своему пределу). Ныне же мы имеем много разных определений этого понятия с разными областями применимости. (О другом примере такого рода – лейбницевском исчислении дифференциалов – ниже говорит сам автор.)

полученный результат – если не целиком, то по крайней мере в общих чертах – можно было предвидеть заранее».

Многие математики предпочитали полагаться на интуицию. Артур Шопенгауэр объяснил это так: «Чтобы усовершенствовать метод в математике, необходимо прежде всего решительно отказаться от предвзвешенности – веры в то, будто доказанная истина превышает интуитивного знания». Паскалю принадлежат два выражения – *esprit de géométrie* [дух геометрии] и *esprit de finesse* [дух проницательности]. Под первым Паскаль понимал силу и прямоту ума, проявляющиеся в железной логике рассуждений.¹⁵³ Под вторым – широту ума, способность видеть глубже и прозревать истину как бы в озарении. Для Паскаля даже в науке *esprit de finesse* был уровнем мышления, стоящим неизмеримо выше (и вне) логики и несоизмеримым с ней. То, что непостижимо для разума, считал Паскаль, может тем не менее быть истиной.

Задолго до Паскаля другие математики также утверждали, что интуитивное убеждение превосходит логику подобно тому, как ослепительный блеск Солнца затмевает бледное сияние Луны. Декарт полагался на врожденные интуитивные представления. По поводу логики Декарт заметил: «Я обнаружил, что силлогизмы и большинство посылок логики более пригодны, когда речь идет о вещах уже известных... или о вещах, в которых говорящий несведущ». Тем не менее Декарт охотно дополнял интуицию дедуктивными рассуждениями (гл. II).

Великие математики заранее, еще до того, как им удавалось найти логическое доказательство, знали, что какая-то теорема верна, и иногда ограничивались всего лишь беглым наброском доказательства. Более того, Ферма в своей обширной классической работе по теории чисел и Ньютон в работе по кривым третьего порядка те привели даже набросков доказательств. Прогрессу математики, несомненно, способствовали главным образом люди, наделенные не столько способностью проводить строгие доказательства, сколько необычайно сильной интуицией.

Итак, понятие доказательства, сколь ни преувеличивали его значение общественное мнение и публикации математиков, не играло той роли, которая ему обычно отводилась. Возникновение противоборствующих философий математики, каждая из которых отстаивала свои мерки строгости доказательства, вызывало скептическую переоценку важности доказательства. Критические нападки на понятие доказательства начались еще до того, как успели сформироваться различные течения в основаниях математики и их взаимно исключающие точки зрения получили сколько-нибудь широкое распространение. Еще в 1928 г. Годфри Гарольд Харди утверждал с присущей ему прямотой:

Строго говоря, того, что принято называть математическим доказательством, не существует... В конечном счете мы можем лишь указывать... Любое доказательство представляет собой то, что мы с Литтлвудом называем газом, – риторические завитушки, предназначенные для психологического воздействия, картинки, рисуемые на доске во время лекции, средство для стимуляции воображения учащихся.

Харди считал доказательства скорее фасадом, чем несущими опорами здания математики.

В 1944 г. выдающийся американский математик Рэймонд Луис Уайлдер выступил с вполне обоснованной статьей [98*]¹⁵⁴, в которой низвел доказательство на еще более низкую ступень. Доказательство, утверждал Уайлдер, есть не что иное, как

проверка продуктов, нашей интуиции... Совершенно ясно, что мы не обладали и, по-видимому, никогда не будем обладать критерием доказательства, не зависящим ни от времени, ни от того, что требуется доказать, ни от тех, кто использует критерий, будь то отдельное лицо или школа мышления. В этих условиях самое разумное, пожалуй, признать, что, как правило, в математике не существует абсолютно истинного доказательства, хотя широкая публика убеждена в обратном.

Ценность доказательства, как такового, подверг критике Уайтхед в своей лекции под названием «Бессмертие»:

Резюмируя, можно, сказать, что логика, понимаемая как адекватный анализ процесса человеческого мышления, есть не более чем обман. Логика – превосходный инструмент, но ей необходим в качестве основы здравый смысл... По моему убеждению, окончательный вид,

¹⁵³ Яглом: Напомним, что в те времена под словом «геометрия» часто понималась вся математика.

¹⁵⁴ Wilder R.L. The Nature of Mathematical Proof. – Amer. Math. Month., 1944, 51, p. 309–323.

принимаемый философской мыслью, не может опираться на точные утверждения, составляющие основу специальных наук. Точность иллюзорна.

Доказательство, абсолютная строгость и тому подобные понятия – блуждающие огоньки, химеры, «не имеющие пристанища в математическом мире». Строгого определения строгости не существует. Доказательство считается приемлемым, если оно получает одобрение ведущих специалистов своего времени или строится на принципах, которые модно использовать в данный момент.¹⁵⁵ Никакого общепризнанного критерия строгости в современной математике не существует. Математическая строгость переживает сейчас не лучшее время. То, что некогда считалось неотъемлемой особенностью математики – неоспоримый вывод из явно сформулированных аксиом, – навсегда отошло в прошлое. Неопределенность и способность впадать в ошибку присущи логике в той мере, в какой они ограничивают возможности человеческого разума. Приходится лишь удивляться, сколько фундаментальных допущений мы обычно принимаем в математике, даже не сознавая этого.

Философ Ницше как-то раз назвал шутки «эпитафиями эмоциям». Чтобы хоть как-то скрыть охватившее их уныние, математики принялись подшучивать над логикой своей науки: «Достоинство логического доказательства состоит не в том, что оно вселяет веру, а в том, что оно заставляет сомневаться относительно того, какое место в рассуждениях должно вызывать у нас особенно сильные сомнения... К математическому доказательству относиться не только с почтением, но и с подозрением!.. Мы не можем более надеяться, что нам удастся быть логичными. Будем же по крайней мере надеяться, что нам удастся не быть нелогичными... Больше страстности – меньше ясности». Математик Анри Леон Лебег, стоявший на позициях интуиционизма, заявил в 1928 г.: «Логика может заставить нас отвергнуть некоторые доказательства, но она не в силах заставить нас поверить ни в одно доказательство». В статье 1941 г. Лебег добавил, что логика служит не для того, чтобы убеждать, создавать уверенность. Мы верим в то, что согласуется с нашей интуицией. Лебег утверждал, что, по мере того как мы становимся всё более сведущими в математике, наша интуиция становится всё более изощренной.

Даже Бертран Рассел с его сугубо логистической программой не мог удержаться от язвительных замечаний в адрес логики. В «Принципах математики» (1903) Рассел писал: «Одно из главных достоинств, присущих доказательствам, состоит в том, что они пробуждают определенный скептицизм по отношению к доказанному результату». В том же издании «Принципов» он утверждал, что, как явствует из самой попытки положить в основу математики систему неопределяемых понятий и исходных утверждений, любой результат вполне может быть опровергнут (для этого достаточно, чтобы кому-нибудь удалось обнаружить противоречие в нашей формально-логической системе), но никогда не может быть доказан. Всё в конечном счете зависит от непосредственного восприятия. Чуть позже (1906) Рассел, встревоженный обнаруженными тогда парадоксами, высказался более откровенно, чем имел обыкновение высказываться в последующие годы. Когда антиномии показали, что логическое доказательство на существовавшем тогда уровне строгости небезупречно, Рассел заявил: «Элемент неопределенности должен оставаться всегда, подобно тому, как он неизбежно остается в астрономии. Со временем он может существенно уменьшиться, но смертным свойственно ошибаться».

Говоря о насмешках, которым подвергалась логика, нельзя не вспомнить слова одного из видных современных философов и специалистов по основаниям математики австрийца Карла Поппера (р. 1902)¹⁵⁶:

Существуют три уровня понимания доказательства. На самом низком уровне у вас появляется приятное ощущение, что вы поняли ход рассуждений. Средний уровень достигается, когда вы

¹⁵⁵ **Яглом:** Довольно распространенным ныне является такое «определение» (математического) доказательства: доказательство – это рассуждение, которое убеждает нас в справедливости теоремы. При этом вполне допустимо (и даже неизбежно) сосуществование в одной стране и в одно время совершенно разных уровней строгости допустимых доказательств в зависимости от научных школ или даже математических дисциплин (скажем, математическая логика и дифференциальная геометрия).

¹⁵⁶ **Яглом:** Карл Раймунд Поппер выдвинул также так называемый принцип фальсификации (опровержимости), согласно которому критерий научности теории задается возможностью опытного ее опровержения.

можете воспроизвести доказательство. На верхнем, или высшем, уровне вы обретаёте способность опровергнуть доказательство.

Оливер Хевисайд, весьма пренебрежительно относившийся к постоянным заботам математиков о строгости, иронически заявил: «Логика непобедима, потому что одолеть ее можно только с помощью логики».

Феликс Клейн, бывший на протяжении первой четверти XX в. признанным главой мирового центра математики – математического института Гёттингенского университета, – не занимался специально проблемами оснований математики, однако из истории развития этой науки он извлек кое-какие выводы. В своей книге «Элементарная математика с точки зрения высшей»¹⁵⁷ (1908) Клейн так описывал развитие математики:

Математика развивалась подобно дереву, которое разрастается не путем тончайших разветвлений, идущих от корней, а разбрасывает свои ветки и листья вширь, распространяя их зачастую вниз, к корням... В основных исследованиях в области математики не может быть окончательного завершения, а вместе с тем и окончательно установленного первого начала... [117]¹⁵⁸

Аналогичное мнение, хотя и несколько по иному поводу, выразил Пуанкаре: не существует решенных проблем, существуют только проблемы более или менее решенные.

Математики поклонялись золотому тельцу – строгому, одинаково приемлемому для всех доказательству, истинному во всех возможных мирах, искренне веря, что это и есть бог. Теперь наступило прозрение: математики поняли, что их бог – ложный. Но истинный бог так и не открылся, и теперь им не оставалось ничего другого, как гадать, существует ли он вообще. «Пророк Моисей», который мог бы пролить на них свет истины, так и не появился. Математикам оставалось лишь терзаться не находящими ответа вопросами.

У некоторых вполне разумных критиков оснований математики сильное раздражение вызывали нюансы, по поводу которых спорили те, кто занимался основаниями. Если математика в конечном счете основана на интуиции, спрашивал один из таких критиков Имре Лакатош (или Лакатос; 1922–1974), то почему мы должны идти всё дальше и дальше?

Почему бы нам не остановиться раньше и не заявить, что «окончательным критерием допустимости того или иного метода должен служить вопрос, является ли он интуитивно убедительным»... Почему честно не признать потенциальную возможность ошибки в математическом доказательстве и не попытаться защитить достоинство знания, возможно в чем-то и ошибочного, от циничного скептицизма, вместо того чтобы обманывать себя тем, будто мы всегда можем искусно заштопать последнюю прореху на ткани нашей «первичной» интуиции? (Ср. также [52*]¹⁵⁹.)

По поводу относительной ценности интуиции и доказательства уместно привести следующую притчу. В кабинете одного врача над дверью висела подкова. Уходя после приема, пациент спросил врача, принесла ли ему подкова удачу в жизни и в работе. «Нет, – ответил врач, – я не верю в подобные предрассудки. Но всё же подкова помогает».

Артур Стэнли Эддингтон заметил однажды: «Доказательство – это идол, во имя которого математики терзают себя». Почему же математики идут на такие муки ради строгого доказательства? Уместно спросить: чем, собственно, занимаются математики, ставящие превыше всего железную логику, если они не знают, непротиворечива ли их наука, и, в частности, не могут прийти к единому мнению относительно того, что такое правильное доказательство? Не следует ли им стать полностью безразличными к строгости, поднять руки вверх и заявить, что математика как свод твердо установленных истин не более чем иллюзия? Не должны ли они оставить дедуктивное доказательство и прибегать лишь к убедительным, интуитивно здравым аргументам? Ведь используют же интуитивные соображения физические науки, которые даже там, где они применяют математику, не придают особого значения пристрастию математиков к строгости. Но отказ от строгости вряд ли показан математике. Всякий, кто знает, какой вклад

¹⁵⁷ Название книги Клейна (*Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*) точнее было бы перевести как «Элементарная математика с высшей точки зрения», – *Прим. ред.*

¹⁵⁸ Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей, т. I, – М.–Л.: ОНТИ, 1935.

¹⁵⁹ Lakatos I. Proofs and Refutations. – New York: Cambridge University Press., 1976. [Русский перевод более краткого варианта книги: Лакатос И. Доказательства и опровержения. – М.: Наука, 1967.]

внесла математика в сокровищницу человеческого мышления, не станет жертвовать понятием доказательства.

Нельзя не признать важного значения логики для математики. Если интуиция – господин, а логика – всего лишь слуга, то это тот случай, когда слуга обладает определенной властью над своим господином. Логика сдерживает необузданную интуицию. Хотя, как мы и признали, интуиция играет в математике главную роль, всё же сама по себе она может приводить к чрезмерно общим утверждениям. Надлежащие ограничения устанавливает логика. Интуиция отбрасывает всякую осторожность – логика учит сдержанности. Правда, приверженность логике приводит к длинным утверждениям со множеством оговорок и допущений и обычно требует множества теорем и доказательств, мелкими шажками преодолевая то расстояние, которое мощная интуиция перемахивает одним прыжком. Но на помощь интуиции, отважно захватившей расположенное перед мостом укрепление, необходимо выслать боевое охранение, иначе неприятель может окружить захваченную территорию, заставив нас отступить на исходные позиции.

Интуиция может и обмануть нас. На протяжении большей части XIX в. математики – в том числе Коши, одним из первых ставший насаждать математическую строгость, – считали, что любая непрерывная функция имеет производную. Но Вейерштрасс поразил математический мир, продемонстрировав непрерывную функцию, ни в одной точке не имеющую производной.¹⁶⁰ Такая функция недоступна интуиции. Математическое рассуждение не только дополняет интуицию, но и подтверждает, исправляет, а в иных случаях и превосходит ее.

То, что дают математикам логические рассуждения, можно пояснить с помощью аналогии. Предположим, фермер купил участок непроходимого леса, намереваясь расчистить его и заняться земледелием. Вырубив лес на небольшом пятачке, он заметил рыскавших в лесу диких зверей. Опасаясь их нападения, фермер вырубил лес, примыкавший к уже расчищенному участку, и звери отступили вместе с лесом. Теперь их можно было видеть чуть дальше – там, где на границе расчищенного участка стеной поднимался девственный лес. Фермер снова взялся за топор и т.д. до бесконечности. Каждый раз он расчищал всё новый участок земли – звери отступали к кромке нетронутого леса. Спросим себя: чего же достиг фермер? По мере того как увеличивался свободный от леса участок земли, фермер обретал всё большую безопасность, по крайней мере если он работал в центре расчищенного участка. Но звери не исчезли, они лишь отступили и когда-нибудь смогут неожиданно наброситься на фермера и растерзать его, хотя по мере увеличения размеров расчищенного участка фермер обретал всё большую относительную безопасность. Аналогичным образом степень уверенности, с какой мы можем пользоваться центральным ядром математических знаний, возрастает по мере того, как логика применяется для выяснения то одной, то другой проблемы в основаниях математики. Иначе говоря, доказательство гарантирует нам относительную уверенность в правоте. Мы окончательно убеждаемся в правильности той или иной теоремы, если нам удастся доказать ее на основе разумных утверждений о числах и геометрических фигурах, которые интуитивно более приемлемы, чем доказываемая теорема. По словам Реймонда Луиса Уайлдера, доказательство – это проверка идей, подсказанных интуицией.

К сожалению, доказательства одного поколения воспринимаются другим поколением как ворох логических ошибок. Один из основоположников современной математики в США, Элиаким Гастингс Мур (1862–1932), выразил (1903) эту мысль так: «Любая наука, включая логику и математику, есть продукт своей эпохи. Наука воплощена в своих идеалах не в меньшей мере, чем в результатах». Век строгости короток – это всего лишь один день. В наше время понятие строгости зависит и от того, к какой школе принадлежит математик. Насколько можно судить, самого Уайлдера вполне устроило бы доказательство, не содержащее явных противоречий и к тому же полезное для математики. Например, он не стал бы возражать против понятия гипотезы континуума в качестве аксиомы. Не придавая особого значения доказательству, Уайлдер критиковал различные школы мышления за разобщенность. Разве не напоминает приверженность догматам одной школы в ущерб всем остальным фанатизм религиозных сектантов, провозглашающих своего бога истинным и отвергающих все остальные секты как заблудшие?

Мы не можем отрицать, что не существует ни абсолютного доказательства, ни даже доказательства, одинаково приемлемого для всех. Мы знаем, что если усомнимся в истинности

¹⁶⁰ Яглом: Ср. со сказанным на с. 205, гл. VIII.

утверждений, принятых на интуитивной основе, то сможем доказать их, лишь приняв на интуитивной же основе некие другие утверждения. Проверая истинность утверждений, непосредственно воспринимаемых интуицией, мы не можем заходить слишком далеко, не рискуя столкнуться с парадоксами или другими неразрешенными трудностями, часть которых лежит в сфере логики. В начале XX в. знаменитый французский математик Жак Адамар высказал следующую мысль: «Цель математической строгости состоит в том, чтобы санкционировать и узаконить завоевания интуиции». Мы не можем теперь согласиться с Адамаром. Более уместно повторить вслед за Германом Вейлем: «Логика – это своего рода гигиена, позволяющая математике сохранять свои идеи здоровыми и сильными». Неверно утверждать, что доказательство не играет никакой роли: оно сводит к минимуму риск противоречий.

Нельзя не признать, что абсолютное доказательство не реальность, а цель. К ней следует стремиться, но скорее всего она так никогда и не будет достигнута. Абсолютное доказательство не более чем призрак, вечно преследуемый и неизменно ускользающий. Мы должны неустанно укреплять то доказательство, которым располагаем, не надеясь на то, что нам удастся довести его до совершенства. Мораль всей истории развития математического доказательства сводится к следующему: хотя мы и стремимся к недостижимой цели, нам, возможно, удастся произвести чудесные ценности, которые математике случалось дарить миру в прошлом. Если мы изменим свое отношение к математике, то сможем более эффективно заниматься ею, несмотря на постигшее нас разочарование.

Осознание того, что в обосновании математических истин главную роль играет интуиция, а доказательству отводится лишь вспомогательная роль, означает, что математика в своем развитии описала полный круг. Математика начиналась на интуитивной и эмпирической основе. Начиная с древних греков доказательство стало целью математической деятельности, и, хотя до XIX в. эта цель пребывала в почетной отставке, в конце XIX в. математикам показалось, что они сумели достичь ее. Но попытки довести математическую строгость до пределов возможного завели математиков в тупик: логика нанесла поражение логике, подобно собаке, кусающей себя за хвост. В «Мыслях» Паскаля мы находим следующее признание: «Сила разума в том, что он признает существование множества явлений, ему непостижимых»¹⁶¹ ([119]¹⁶², с. 157).

Кант также признавал ограниченность человеческого разума. В его «Критике чистого разума» есть такие строки:

На долю человеческого разума в одном из видов его познания выпала странная судьба: его осаждают вопросы, от которых он не может уклониться, так как они навязаны ему собственной природой; но в то же время он не может ответить на них, так как они превосходят возможности человеческого разума. ([18]¹⁶³, т. 3, с. 73.)

Близкую мысль высказал знаменитый испанский писатель и философ Мигель де Унамуно (1864–1936) в «Трагическом смысле жизни»: «Высшего триумфа разум достигает, когда ему удается заронить сомнение в собственной годности».

Более пессимистических взглядов на роль логики придерживался Герман Вейль. В 1940 г. он утверждал: «Несмотря на наше критическое озарение (а может быть, благодаря ему), мы сегодня менее, чем когда-либо раньше, уверены в основаниях, на которых зиждется математика». В 1944 г. Вейль развил свою мысль подробнее:

Вопрос об основаниях математики и о том, что представляет собой в конечном счете математика, остается открытым. Мы не знаем какого-то направления, которое позволит в конце концов найти окончательный ответ на этот вопрос, и можно ли вообще ожидать, что подобный окончательный ответ будет когда-нибудь получен и признан всеми математиками. «Математизирование» может остаться одним из проявлений творческой деятельности человека, подобно музицированию или литературному творчеству, ярким и самобытным, но прогнозирование его исторических судеб не поддается рационализации и не может быть объективным.

¹⁶¹ **Яглом:** Противоположной точки зрения придерживался Гильберт – см. приведенную на с. 302 цитату из его статьи «О бесконечном» или с. 22 книги [51: Проблемы Гильберта. – М.: Наука, 1969.]. Популярно также известное высказывание А. Эйнштейна: «Самое непостижимое во Вселенной – это то, что она все-таки постижима».

¹⁶² Ларошфуко Ф. де. Максимумы. Паскаль Б. Мысли, Лабрюйер Ж. де. Характеры. – М.: Художественная литература, 1974.

¹⁶³ Кант И. Сочинения в 6-ти томах. – М.: Мысль, 1964 (т.3), 1965 (т.4), 1966 (т.6).

Как сказал Вейль, математика – это вид умственной деятельности, а не свод точных знаний. Математику лучше всего рассматривать в исторической перспективе. Рациональные конструкции и реконструкции оснований при таком подходе предстают перед нами лишь как попытки исказить историческую правду.

Наиболее крайние взгляды выразил в своей книге «Логика научного исследования» [120]¹⁶⁴ Карл Поппер. Математическое рассуждение никогда не бывает верным, оно может быть только ошибочным. Было бы опрометчивым поручиться и за истинность математических теорем. Существующей математической теорией можно продолжать пользоваться за неимением лучшей, подобно тому, как пользовались ньютоновской механикой в течение двух столетий до появления специальной теории относительности или как пользовались евклидовой геометрией до того, как была создана риманова геометрия. Уверенность в правильности математической теории недостижима.

Как свидетельствует история, не существует раз и навсегда заданного, обоснованного единого свода математических знаний. Кроме того, если история позволяет делать какие-то прогнозы, то можно сказать, что любые дополнения к существующей математике потребуют новых оснований. В этом отношении математика схожа с любой из физических наук. Физические теории приходится модернизировать и перестраивать всякий раз, когда новые наблюдения или новые экспериментальные данные вступают в противоречие с ранее установленными теориями и вынуждают формулировать новые. Математическую истину невозможно описать безотносительно ко времени. Все попытки построить математику на незыблемом основании заканчивались неудачей. Непрекращающиеся попытки – от Евклида через Вейерштрасса до современных школ в основаниях – подвести под математику прочный фундамент не дают ни малейшего повода надеяться на эволюционный прогресс, сулящий конечный успех.

Изложенные выше взгляды на роль интуиции и доказательства отражают точку зрения на современную математику, но не учитывают всех мнений о будущем. Взгляд на логику был подтвержден группой французских математиков, выступающих под коллективным псевдонимом Николá Бурбаки. В предисловии к первому тому «Элементов математики» Бурбаки пишет:

Как показывает анализ исторического развития математики, было бы неверно утверждать, что математика свободна от противоречий; непротиворечивость предстает как цель, к которой следует стремиться, как некое данное богом качество, ниспосланное нам раз и навсегда. С древнейших времен все критические пересмотры принципов математики в целом или любой из ее областей почти неизменно сменялись периодами неопределенности, когда появлялись противоречия и их приходилось решать... Вот уже двадцать пять веков математики имеют обыкновение исправлять свои ошибки и видеть в этом обогащение, а не обеднение своей науки; это дает им право смотреть в будущее спокойно. ([2]¹⁶⁵, с. 30.)

Обращение к истории, возможно, в какой-то степени утешает, но та же история учит, что новые кризисы непременно возникнут. Однако столь мрачная перспектива не охлаждает оптимизма Бурбаки.

Одни из ведущих французских математиков, бурбакист Жан Дьедонне, выразил уверенность в том, что проблемы логики, коль скоро они возникнут, непременно будут разрешены:

Если когда-нибудь будет доказано, что математика противоречива, то скорее всего станет известно, какому правилу следует приписать полученный результат. Отбросив это правило или надлежащим образом видоизменив его, мы избавимся от противоречия. Иначе говоря, математика изменит направление своего развития, но не перестанет быть наукой. Сказанное не просто умозаключение: нечто подобное произошло после открытия иррациональных чисел. Мы далеки от мысли оплакивать это открытие, потому что оно вскрыло противоречие в пифагорейской математике, а, напротив, сегодня мы считаем его одной из великих побед человеческого духа.

Дьедонне мог бы привести еще один пример: лейбницевский подход к дифференциальному и интегральному исчислению (гл. VII). После всех критических замечаний, выпавших на долю

¹⁶⁴ Popper K.R. The Logic of Scientific Discovery. – London, 1959. (Неполный русский перевод в кн.: Поппер К. Логика и рост научного знания. – М.: Прогресс, 1983, с. 33–235.)

¹⁶⁵ Бурбаки Н. Теория множеств. – М.: Мир, 1965.

понятия бесконечно малой величины в XVIII в., новая формулировка (нестандартный анализ, гл. XII) придала ему строгий смысл, согласующийся с логистическим, формалистским и теоретико-множественным вариантами оснований математики.

Помимо тех, кто, подробно бурбакистам, преисполнен оптимизма и считает устранимым любое противоречие, могущее возникнуть в основаниях математики, среди математиков есть и такие, кто верит в существование единого непротиворечивого, вечного ядра математики, которое может быть применимым или неприменимым к физическому миру. По мнению этих математиков, не все идеи, образующие вечное ядро математики, могут быть известны человеку, тем не менее эти идеи существуют, – так и несогласованность и неопределенность доказательства обусловлены только ограниченностью человеческого разума. Имеющиеся ныне разногласия между математиками не более чем временное препятствие, которое постепенно будет преодолено.

Некоторые из мыслителей считают, что математика настолько глубоко внедрилась в человеческий разум (в этом отношении их можно считать кантианцами), что вопрос о ее непротиворечивости отпадает сам собой. Так, Уильям Роуан Гамильтон, хотя он и ввел объекты (кватернионы), которые породили сомнение в соответствии арифметики физическому миру, в 1836 г. высказался вполне в духе Декарта:

Такие чисто математические науки, как алгебра и геометрия, являются науками чистого разума, не подкрепляемыми опытом и не получающими от него помощи, изолированными или могущими быть изолированными от всех внешних и случайных явлений... Вместе с тем это идеи, рожденные внутри нас, обладание которыми в сколько-нибудь ощутимой степени есть следствие нашей врожденной способности, проявление человеческого начала.

В докладе, прочитанном в 1883 г. на заседании Британской ассоциации поощрения науки, один из крупнейших алгебраистов XIX в. Артур Кэли заявил: «Мы обладаем априорными знаниями, не зависящими не только от того или иного опыта, но и от всякого опыта вообще... Эти знания составляют вклад нашего разума в интерпретацию опыта».

В то время как одни (например, Гамильтон и Кэли) представляли математику как «внедрившуюся» в человеческий разум, другие считали, что она существует в мире, лежащем вне человека. Трудно понять, как могли просуществовать до начала XX в. представления о математике как о едином реальном мире математических идей. Корни таких представлений восходят к Платону (гл. I). Эти представления неоднократно возрождали, в особенности Лейбниц, проводивший различия между истинами разума и истинами факта (последние остаются истинными во всех возможных мирах). Даже Гаусс, первым по достоинству оценивший неевклидову геометрию, был убежден в абсолютной истинности арифметики (числа) и анализа (гл. IV).

Веру в существование объективного реального мира математики разделял один из искуснейших аналитиков XIX в. Шарль Эрмит (1822–1901). В письме математику Томасу Яну Стильтьесу, Эрмит утверждал:

Я убежден в том, что числа и функции анализа не являются произвольным продуктом нашего духа. Я верю, что они лежат вне нас с той же необходимостью, как предметы объективной реальности, а мы обнаруживаем или открываем и исследуем их так же, как это делают физики, химики и зоологи.¹⁶⁶

По другому случаю Эрмит сказал: «В математике мы больше слуги, чем господа».

Многие из математиков XX в., несмотря на споры по поводу оснований, заняли ту же позицию. Создатель теории множеств и трансфинитных чисел Георг Кантор считал, что математики не изобретают понятия и теоремы, а открывают их. Математические понятия и теоремы существуют независимо от человеческого мышления. Себя самого Кантор считал репортером и секретарем, записывающим эти понятия и теоремы. Годфри Гарольд Харди, скептически относившийся к предлагаемым человеком доказательствам, утверждал в 1929 г.:

Мне кажется, что ни одна философия не может вызвать сочувствие у математика, если она так или иначе не признает незыблемости и безусловной годности математической истины. Математические теоремы истинны или ложны, и их истинность или ложность абсолютно не зависит от того,

¹⁶⁶ Яглом: Ср. с примечанием 1 к Введению.

известны ли нам эти теоремы. В некотором смысле математическая истина является частью объективной реальности.

Аналогичные взгляды Харди выразил и в своей книге «Апология математика» [39*]¹⁶⁷:

Свою позицию я сформулирую догматически во избежание малейшей неясности. Я считаю, что математическая реальность лежит вне нас, что наша функция заключается в открытии и наблюдении ее и что теоремы, которые мы доказываем и высокопарно называем своими «творениями», в действительности являются не более чем записями наших наблюдений.

Выдающийся французский математик XX в. Жак Адамар (1865–1963) утверждал в работе «Исследование психологии процесса изобретения в области математики», что, «хотя истина еще не известна нам, она предсуществует и неизбежно подсказывает нам путь, которым мы должны следовать» [70]¹⁶⁸.

Гёдель также разделял мнение о существовании трансцендентального мира математики. Что касается теории множеств, то он считал вполне допустимым рассматривать все множества как реальные объекты:

Мне кажется, что допущение о существовании таких объектов столь же законно, как и допущение о существовании физических объектов, и что имеется не меньше оснований верить в их существование. Они необходимы для получения удовлетворительной теории математики в том же смысле, в каком физические тела необходимы для удовлетворительной теории наших чувственных восприятий, и в обоих случаях невозможно интерпретировать утверждения, которые мы хотим высказать об этих сущностях, как утверждения о «данных», т.е., в последнем случае, о реальных чувственных восприятиях.

Некоторые из приведенных выше высказываний принадлежат ученым двадцатого столетия, которых не очень беспокоили основания математики. Еще более удивительно, что и кое-кто из лидеров различных школ в основаниях математики, например Гильберт, Алонзо Черч и члены группы Бурбаки, утверждали, что математические понятия и свойства существуют в некотором объективном смысле и могут быть постигнуты человеческим разумом. Таким образом, математическую истину открывают, а не изобретают, и в результате открытия возникает не математика, а человеческое знание математики.

Людей, разделяющих подобные взгляды, часто называют платонистами. Хотя Платон и верил в то, что математика существует в некотором идеальном мире независимо от людей, его учение содержит много несовместимого с современными воззрениями; поэтому здесь апелляция к платонизму не столько помогает, сколько вводит в заблуждение.

Все утверждения о существовании объективного, единого ядра математики ничего не говорят о том, где же находится математика. Они указывают лишь, что математика существует в некотором «потустороннем» мире, своего рода воздушном замке, а человек лишь открывает ее. Аксиомы и теоремы отнюдь не только творения человеческого разума – их скорее можно сравнить с сокровищами, скрытыми в недрах, которые можно извлечь на поверхность, если запастись терпением и копать всё глубже и глубже. Но существование аксиом и теорем не зависит от человека, как не зависит от него, например, существование планет.

Является ли математика коллекцией алмазов, спрятанных в недрах Вселенной и постепенно извлекаемых на поверхность, или коллекцией искусственных драгоценных камней, созданных человеком и сверкающих так ярко, что они ослепили тех математиков, кто уже отчасти был ослеплен гордостью за свои творения?

Если существует мир сверхчувственных и трансцендентально абсолютных объектов и если наши логические и математические утверждения представляют собой всего лишь записи наблюдений этих объектов, то не существуют ли противоречия и ложные утверждения в том же смысле, в каком существуют истинные утверждения? Сорные семена ложности и противоречивости могут давать столь же пышные всходы, как и семена истинные и прекрасные. Дьявол

¹⁶⁷ Hardy G.H. A Mathematician's Apology. – Cambridge: University Press, 1981. [Русский перевод отрывков из книги: Харди Г.Г. Исповедь математика. – В кн.: Математики о математике. – М.: Знание, 1967, с. 4–15.]

¹⁶⁸ Адамар Ж. Исследование психологии процесса изобретения в области математики. – М.: Советское радио, 1970.

сеет свои семена и собирает жатву наряду с богом истины. Разумеется, платонисты могли бы возразить, что ложные утверждения и противоречия возникают только из-за неадекватности усилий, прилагаемых человеком для достижения истины.

Иной точки зрения (согласно которой математика – это только продукт человеческого мышления) придерживаются интуиционисты. Эта точка зрения восходит к Аристотелю. Однако если одни интуиционисты считают, что истина гарантируется разумом, то другие утверждают, что математика представляет собой не незыблемый свод непреложных знаний, а творение человеческого разума, которому свойственно ошибаться. Классическое высказывание на эту тему, появившееся задолго до современных споров, мы находим в «Мыслях» Паскаля: «Истина – слишком тонкая материя, а наши инструменты слишком тупы, чтобы ими можно было прикоснуться к истине, не повредив ее. Достигнув истины, они сминают ее и отклоняются в сторону, скорее ложную, нежели истинную»¹⁶⁹. По утверждению главы интуиционистов Аренда Рейтинга, в наше время никто не может говорить об истинной математике, т.е. о математике как едином своде правильных знаний.

Герман Ганкель, Рихард Дедекин и Карл Вейерштрасс считали математику творением человека. В письме Генриху Веберу Дедекин утверждал: «По-моему, то, что мы понимаем под числом, само по себе есть не класс, а нечто новое.... созданное нашим разумом. Мы божественная раса и обладаем... способностью творить». Ту же мысль Вейерштрасс выразил такими словами: «Истинный математик всегда поэт». Ученик Рассела философ Людвиг Виттгенштейн (1889–1951) считал, что математик – изобретатель, а не открыватель. Все эти и многие другие мыслители рассматривали математику как нечто далеко выходящее за пределы эмпирических данных или рациональных дедуктивных умозаключений. В пользу их мнения свидетельствует хотя бы тот факт, что такие элементарные понятия, как иррациональные и отрицательные числа, не являются ни дедукциями из эмпирических данных, ни объектами, заведомо существующими в некотором внешнем мире.

Герман Вейль с большой иронией относился к вечным истинам. В книге «Философия математики и естественных наук» [93*]¹⁷⁰ он писал:

Гёделю с его истовой верой в трансцендентальную логику хочется думать, что наша логическая оптика лишь немного не в фокусе, и надеяться, что после небольших коррекций мы будем видеть четко, и тогда всякий согласится, что мы видим верно. Но того, кто не разделяет этой веры, смущает высокая степень произвола в системе Z [Цермело] или даже в системе Гильберта... Никакой Гильберт не сможет убедить нас в непротиворечивости на вечные времена. Мы должны быть довольны, если какая-нибудь простая аксиоматическая система математики пока выдерживает проверку наших сложных математических экспериментов. Если на более поздней стадии появятся расхождения, то мы еще успеем изменить основания.

Лауреат Нобелевской премии американский физик и философ Перси Уильям Бриджмен в своей книге «Логика современной физики» (1946) решительно отвергает существование объективного мира математики: «Это общеизвестная истина, очевидная с первого взгляда, что математика – изобретение человека». Теоретическая наука – игра математического воображения. Все, кто считал математику творением человека, утверждали также, что математика испытала на себе сильное влияние тех культур, в рамках которых она развивалась. Математические «истины» в такой же мере зависимы от людей, как восприятие цвета или английский язык. Лишь относительно широкое принятие математических доктрин – по сравнению с политическими, экономическими и религиозными – создает иллюзию, будто математика представляет собой свод истин, объективно существующих вне человека. Математика может существовать независимо от

¹⁶⁹ **Яглом:** Здесь естественно вспомнить о знаменитом физическом принципе неопределенности Гейзенберга, одна из распространенных интерпретаций которого говорит о неизбежном изменении физической интуиции при попытке ее наблюдения, скажем, об отклонении частицы от первоначального положения при падении на нее фотона света, без чего частицу нельзя увидеть. Аналогично этому филологи иногда говорят об определенной деформации природного явления при описании его на том или ином языке (Аристотель говорил о бесконечности природных явлений и конечности числа слов любого языка) и т.д.

¹⁷⁰ Weyl H. *Philosophy of Mathematics and Natural Sciences*. – Princeton: University Press, 1949. [Немецкий оригинал: Weyl H. *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaften*. – München: Oldenberg, 1922; русский перевод (частичный): Вейль Г. О философии математики. – М.: Гостехиздат, 1934, с. 34–91; 2-е изд. доп. и перераб. München: Leibniz Verlag, 1950; русский перевод отрывков – в кн.: Прикладная математика (под ред. Э. Беккенбах.) – М.: Мир, 1968, с. 309–361.]

любого человека, но не от культуры, которая его окружает. Перефразируя Германа Вейля, можно сказать, что математика не отдельное техническое достижение, а неотъемлемая часть человеческого существования во всей его общности – и в этом она находит свое обоснование.

Тех, кто разделяет взгляд на математику как на творение человека, по существу, можно было бы назвать кантианцами, ибо они усматривают источник математики в организующей силе человеческого разума. Но эти современные кантианцы подчеркивают, что математика связана не с морфологией или физиологией мозга, а с его деятельностью. Разум организует, используя эволюционные методы. Творческая деятельность разума постоянно порождает всё более новые, высшие формы мышления. В математике человеческий разум отчетливо видит, что он способен создать совокупность знаний, которые ему интересны или полезны. Область его созидательной деятельности не замкнута. Формулируемые разумом понятия применимы как к существующим, так и к вновь возникающим областям знания. Разум обладает способностью возводить структуры, охватывающие опытные данные и упорядочивающие их. Источник математики лежит в прогрессивном развитии самого разума.

Острые споры о природе математики и потере ею прежнего статуса свода общепринятых неизблемых истин, бесспорно, свидетельствует в пользу концепции математики, созданной человеком. Как сказал Эйнштейн, «каждый, кто осмеливается взять на себя роль судьи во всем, что касается Истины и Знания, терпит крушение под смех богов».

По иронии судьбы, мыслители Века разума, рассматривая математику как пример способности человека мыслить и получать истины, без тени сомнения утверждали, что разум разрешит все человеческие проблемы. Современные мыслители, даже если некоторые из них разделяют веру в могущество разума, заведомо не считают математику эталоном или парадигмой. Такой поворот событий не так далек от интеллектуальной катастрофы. Математика по-прежнему остается самой длительной и последовательной попыткой человека создать точное и эффективное мышление, а достижения математики по-прежнему служат мерилем того, на что способен человеческий разум. Математика устанавливает верхний предел, которого мы можем лишь надеяться достичь во всех рациональных областях. К сожалению, споры относительно того, что такое «настоящая» математика, не прекращаются. Именно поэтому Гильберт так страстно стремился восстановить истинность в смысле объективных, достоверных умозаключений. В его статье 1925 г. «О бесконечном» говорится: «Где же еще искать надежность и истинность, если даже само математическое мышление дает осечки?» ([50]¹⁷¹, с. 349.)

Озабоченность Гильберта судьбами математики явственно слышится в его докладе «Проблемы обоснования математики» на Международном математическом конгрессе в Болонье (1928):

Что было бы с истинностью наших знаний вообще и как обстояло бы дело с существованием и прогрессом науки, если бы в математике не было достоверной истины? В наше время нередко даже в специальных изданиях и в открытых докладах высказывается сомнение и уныние по поводу науки; это есть в некотором роде оккультизм, который я считаю вредным. ([50], с. 399.)

Непрестанные, нескончаемые поиски абсолюта могут показаться менее привлекательными, чем реальное достижение абсолюта, но Гете уже давно усмотрел в этих поисках спасение человеческого рода:

Wer immer strebend sich bemüht
Den können wir erlösen.
[Спасти можно лишь того,
Кто неустанно борется за свое спасение.]

Не будучи столь уверенным в существовании абсолютных истин, один из выдающихся математиков современности Андре Вейль утверждает, что занятия математикой необходимо продолжать, хотя математика теперь уже не то прежнее величественное творение человеческой мысли. Вот что он говорит:

Для нас, чьи плечи ноют под тяжестью наследия греческой мысли, кто идет по стопам героев эпохи Возрождения, цивилизация немыслима без математики. Подобно постулату о параллельности,

¹⁷¹ Гильберт Д. Основания геометрии. – М.–Л.: Гостехиздат, 1948.

постулат о том, что математика выживет, утратил свою «очевидность». Но если первый постулат перестал быть необходимостью, то без второго мы жить бы не смогли.

Будущее математики никогда не внушало особых надежд. Природа математики никогда не была вполне понятной. Тонкий анализ очевидного привел к нескончаемой цепи осложнений. Но математика продолжает бороться с проблемами, возникающими в ее основаниях. Как сказал Декарт, «я буду продолжать до тех пор, пока не установлю нечто несомненно истинное или по крайней мере не устраню все сомнения в том, что ничего несомненно истинного не существует».

Если верить Гомеру, боги обрекли царя Коринфа Сизифа на тяжкое наказание после смерти: он должен вкатывать на гору огромный камень; но как только камень почти достигает вершины, он начинает скатываться вниз, к подножию горы. Сизиф не мог питать никаких иллюзий, что его напрасный труд когда-нибудь завершится. Математики почти инстинктивно мобилизуют всю свою волю и мужество, чтобы дополнить и укрепить основания своей науки. Их борьба также может оказаться нескончаемой, а труд – напрасным. Но современные Сизифы не сдаются.

XV. Авторитет природы

Я возношу молитву, твердо зная,
Что не предаст Природа никогда
Ее так верно любящего сердца.

Уордсворт



Для получения новых результатов математики могут избрать любое из множества соперничающих направлений. Поскольку внутренних критериев, позволяющих отдать предпочтение одному направлению перед другим или как-то обосновать принятое решение, не существует, математик вынужден при выборе направления руководствоваться внешними соображениями. Наиболее важным из них по-прежнему остается традиционный и наиболее объяснимый довод в пользу создания новой и развития уже существующей математики – ее ценность для других наук. Ставшую ныне очевидной неопределенность в вопросах, связанных с истинными основаниями математики, и зыбкость ее логики можно в какой-то мере игнорировать (хотя и не исключить полностью), если акцентировать внимание на внешних приложениях математики. Последуем же завету Эмерсона и «построим в материи дом для ума». Из априорных соображений невозможно

установить, будут ли получаемые математические теоремы непосредственно применимы, или же они, что тоже неплохо, в сочетании с разумными физическими принципами приведут к физически значимым результатам. Приложения служат своего рода практическим критерием, которым мы проверяем математику. Теоремы, приводящие к правильным результатам, с каждым разом можно применять всё увереннее. Например, если мы, постоянно используя аксиому выбора, получаем подтверждаемые физическим экспериментом результаты, то сомнения в приемлемости этой аксиомы если и не рассеются полностью, то по крайней мере уменьшатся.

С исторической точки зрения апелляция к приложениям не означает радикального изменения сути математики, как это может показаться современным блюстителям математической строгости. Математические понятия и аксиомы берут свое начало из наблюдений реального мира. Даже законы логики, как теперь стало ясно, являются не более чем продуктом опыта. Проблематика, обдумывая которую математик приходит к своим теоремам, и даже наводящие соображения, касающиеся методов доказательства теорем, черпаются из того же источника. О ценности, или значимости, результатов, полученных из аксиом, лет семьдесят пять назад судили по пригодности этих результатов для описания реального мира. Почему бы и теперь не судить о правильности математики в целом по тому, насколько хорошо она продолжает описывать и предсказывать природные феномены? Если правильность математики оценивать по ее приложимости к реальному миру, то никакого абсолютного критерия истинности нет и быть не может. Теорема может великолепно сработать в n случаях и дать осечку в $(n+1)$ -м случае. Одно-единственное расхождение с опытом полностью дисквалифицирует теорему. Видоизменяя формулировку теоремы, математики могут прийти (и неоднократно приходили) к поправкам, делающим новый вариант вполне применимым – а значит, «истинным».

Среди тех, кто отстаивал наличие у математики эмпирических оснований и критериев, видное место занимал Джон Стюарт Милль (1806–1873). Он допускал, что математика обладает большей общностью, чем некоторые физические науки, но видел «оправдание» математики лишь в том, что ее утверждения проверены и подтверждены шире и основательнее, чем утверждения физических наук. Следовательно, заключал Милль, глубоко заблуждаются те, кто считает, что

математические теоремы качественно отличаются от подтвержденных гипотез и теорий других наук. Причина подобного заблуждения заключается в том, что эти люди считают математические теоремы вполне достоверными, а физические теории – весьма вероятными или всего лишь подкрепляемыми опытом.

Милль обосновал свои взгляды философскими соображениями задолго до того, как возникла современная дискуссия по основаниям математики. Тем больше оснований быть прагматиками у тех, кто работал и работает в основаниях математики. Как заметил Гильберт, «и познаешь их по плодам их». Еще одно высказывание Гильберта по этому поводу – «Успех здесь [в математике] необходим; он является высшей инстанцией, перед которой все преклоняются» ([50]¹⁷², с. 340) – относится к 1925 г.

Мнение Гильберта разделяет один из выдающихся специалистов по основаниям математики поляк Анджей Мостовский. На конгрессе, состоявшемся в Польше в 1953 г., он заявил:

Единственная непротиворечивая точка зрения, согласующаяся не только со здравым смыслом, но и с математической традицией, сводится по существу к допущению того, что источник и высший смысл понятия числа (не только натурального, но и вещественного) лежит в опыте и практической применимости. То же относится и к понятиям теории множеств в том объеме, в каком они необходимы для классических областей математики.

Мостовский идет дальше. Он утверждает, что математика – естественная наука. Ее понятия и методы восходят к опыту, и любые попытки обосновать математику безотносительно к ее естественнонаучному происхождению, приложениям и даже истории обречены на провал.

Более удивительно другое: с тезисом, провозглашающим, что о «правильности» математики можно судить по степени ее применимости к физическому миру, согласился интуиционист Вейль. Вейль внес огромный вклад в математическую физику,¹⁷³ поэтому, сколь ни твердо он отстаивал интуиционистские принципы, ему, разумеется, не хотелось жертвовать полезными результатами из-за чрезмерной приверженности этим принципам. В своей «Философии математики и естественных наук» (1949) Вейль сделал такое признание:

Насколько более убедительны и ближе к фактам эвристические аргументы и последующие систематические построения в общей теории относительности Эйнштейна или в квантовой механике Гейзенберга–Шредингера. Подлинно реалистическая математика наряду с физикой должна восприниматься как часть теоретического описания единого реального мира и по отношению к гипотетическим обобщениям своих оснований занять такую же трезвую и осторожную позицию, какую занимает физика.

Вейль открыто выступает за то, чтобы рассматривать математику как одну из естественных наук. Математические теоремы, подобно физическим утверждениям, могут быть формально не обоснованными, но экспериментально проверяемыми гипотезами. Иногда они подлежат переделке, но надежным критерием их правильности служит их соответствие реальности.

Еще дальше пошел выдающийся представитель формалистской школы Хаскелл Б. Карри. В его «Основаниях математической логики»¹⁷⁴ (1963) мы читаем:

¹⁷² Гильберт Д. Основания геометрии. – М.–Л.: Гостехиздат, 1948.

¹⁷³ **Яглом:** Так, от Вейля идет, в частности, важная идея классификации физических объектов по свойственным им группам симметрии [121: Weyl H. Gruppentheorie und Quantenmechanik. – Leipzig: Leubner, 1928. (Существуют более поздние издания и переводы на другие языки.)] (независимо от Вейля эту идею выдвинул в 1963 г. американский физик венгерского происхождения Юджин (Эуген) Вигнер (1963), уже после смерти Вейля удостоенный за нее Нобелевской премии по физике); Вейлю же принадлежит первый, притом выдающийся, учебник [122: Weyl H. Raut, Zeit, Materie. – Berlin: Springer, 1918. (Существуют более поздние издания и переводы на другие языки.)] общей теории относительности, содержащий свежие физические идеи, сыгравшие большую роль в дальнейшем прогрессе физической науки (ср., например, [123: Бергман П. Единые теории поля. – УФН, т. 132, вып. I, 1980, с. 177–190.], а также [124: Яглом И.М. Герман Вейль. – М.: Знание, 1967.]).

¹⁷⁴ **Яглом:** Учебник математической логики [125: Карри Х.Б. Основания математической логики. – М.: Мир, 1969.] отличается от многих других пособий широким обсуждением (гл. 1–4, с. 17–244) общих вопросов (смежных между математической логикой и философией математики) обоснования математической науки; с этой точки зрения вдумчивому читателю, желающему глубже ознакомиться с затронутыми в настоящей книге вопросами, вполне можно порекомендовать книгу [125: Эйнштейн А. Собрание

Нужна ли математике для своего оправдания абсолютная надежность? Зачем, скажем, нам так уж нужно быть уверенными в непротиворечивости теории или в том, что ее можно вывести с помощью абсолютно определенной интуиции чистого времени, прежде чем использовать эту теорию? Ведь ни к какой другой науке мы не предъявляем таких требований. В физике, например, теории всегда гипотетичны; мы принимаем теорию, коль скоро на ее основе можно делать полезные предсказания, и видоизменяем или отвергаем ее, коль скоро этого сделать нельзя. Именно так случалось и с математическими теориями, когда в связи с обнаружением в них противоречий приходилось модифицировать не оспариваемые до того времени доктрины. Так почему мы не можем поступать так же и в будущем? ([125]¹⁷⁵, с. 38–39.)

Выдающийся математический логик Уиллард Ван Орман Куайн, предпринявший много безуспешных попыток упростить «Основания математики» Рассела и Уайтхеда, также выразил желание (по крайней мере, заявил о нем сравнительно недавно) воспользоваться как критерием математических результатов физической истинностью следующих из них выводов. В работе 1958 г., опубликованной в серии «Философское значение современной логики» Куайн утверждал:

Теорию множеств и всю математику разумнее представлять себе так, как мы представляем теоретические разделы естественных наук, – состоящими из истин, или гипотез, правильность которых подтверждается не столько сиянием безупречной логики, сколько косвенным систематическим вкладом, который они вносят в организацию эмпирических данных в естественных науках.

Джон фон Нейман, внесший весомый вклад в развитие формализма и теории множеств, охотно воспользовался тем же выходом из тупика, в котором оказалась современная математика. В знаменитой статье «Математик» (1947) фон Нейман, в частности, попытался объяснить, почему большинство математиков продолжают пользоваться классической математикой, хотя ни одной из нескольких школ в основаниях математики не удалось убедительно обосновать ее:

В конце концов именно классическая математика позволяет получать результаты, которые как полезны, так и красивы, и хотя прежней уверенности в ее надежности не стало, классическая математика всё же покоится на столь же прочном основании, как, например, существование электрона. Следовательно, тот, кто принимает естественные науки, не может не принять классическую систему математики. ([105]¹⁷⁶, с. 92.)

Итак, статус математики ничем не лучше статуса физики.

Даже Рассел, провозгласивший в 1901 г., что здание математической истины – логической и одновременно физической – останется незыблемым навеки, в работе 1914 г. был вынужден признать, что «наше знание геометрии физического мира носит синтетический, а не априорный характер». Иначе говоря, геометрия не следует из одной лишь логики. Во втором издании «Оснований математики» (1926) Рассел пошел на еще большие уступки. По его словам, в правильность логики и математики так же, как и в правильность уравнений Максвелла, мы «верим потому, что из наблюдений убеждаемся в правильности некоторых логических следствий, к которым они приводят».

Еще более удивительное утверждение высказал в 1950 г. Гёдель:

Роль пресловутых «оснований» сравнима с той функцией, которую в физических теориях выполняют поясняющие что-либо гипотезы... Так называемые логические или теоретико-множественные основания теории чисел или любой другой вполне сформировавшейся математической теории по существу объясняют, а не обосновывают их, так же, как в физике, где истинное предназначение аксиом состоит в объяснении явлений, описываемых физическими теоремами, а не в обосновании этих теорем.

научных трудов. – М.: Наука, 1965 (т.1), 1966 (т.2), 1967 (т.4.)] наряду, скажем, с классическим сочинением [86*: Tarski A. Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences, 2nd ed. – New York: Oxford University Press, 1946. [Русский перевод 1-го изд.: Тарский А. Введение в логику и методологию дедуктивных наук, – М.: ИЛ, 1948.]] и довольно сложными, но высокосодержательными книгами [81: Манин Ю.И. Доказуемое и недоказуемое. – М.: Советское радио, 1979; Вычислимое и невычислимое. – М.: Советское радио, 1980.].

¹⁷⁵ Карри Х.Б. Основания математической логики. – М.: Мир, 1969.

¹⁷⁶ Нейман фон Дж. Математик. – Природа, 1983, № 2, 88–95.

Итак, все эти ведущие ученые, работающие в основаниях математики, сходятся на том, что попытка создать приемлемую для всех, логически безупречную математику провалилась. Математика – одна из разновидностей человеческой деятельности, и она подвержена всем слабостям и порокам, присущим всему человеческому. Любая формальная псевдологическая система не более чем псевдоматематика, фикция, даже легенда, хотя и не лишенная оснований.

Тот же критерий «правильности» математики приняли как рабочую гипотезу и многие другие выдающиеся математики, логики и философы, занятые вопросами оснований математики. Правильность математики достаточно твердо (хотя, возможно, и не абсолютно надежно) гарантируется ее применимостью; даже если время от времени в здание математики приходится вносить кое-какие поправки, то и это ничего не меняет по существу дела. Как сказал Уордсворт, «природной тверди верит ум, что строит навсегда».

Может показаться, что, принимая прагматический критерий применимости математики к естественным наукам, логицисты, формалисты, интуиционисты и представители теоретико-множественного направления в основаниях математики отказались тем самым от своих собственных принципов и убеждений. Но хотели они того или не хотели, принятый ими критерий являлся критерием истинности математики во все времена. Что заставляло верить в свою науку математиков, работавших в длившееся не одно столетие смутное время ее нелогичного развития (гл. V–VIII)? Не подозревая, что предлагаемые доказательства страдают дефектами, они считали, что им удалось получить некие результаты. Им было известно, что ни отрицательные, ни иррациональные, ни комплексные числа, как и покоящиеся на этом шатком основании алгебра и анализ, не имели под собой никакого логического фундамента. Но математики продолжали работать, считая, что применимость полученных ими результатов сама по себе является гарантией их правильности.

Надежда на применимость математики к естественным наукам (можно сказать, к эмпирическим данным) привела к результату, о котором стоит рассказать. Евклидов идеал предполагал, что, начав с аксиом, истинность которых не вызывает сомнений, мы затем станем выводить из них теоремы по раз и навсегда установленным логическим правилам, исключаящую любую ошибку в рассуждениях. Полагаясь на применимость к физике, мы обращаем вспять всю концепцию математики. Если полученные на завершающем этапе заключения истинны в силу их применимости, то аксиомы по крайней мере разумны, хотя, возможно, и не единственны (могут существовать другие аксиомы, приводящие к тем же заключениям). Истинность, понимаемая как полезность (или применимость) математики, против течения не поплывет.

Лидерам различных школ в основаниях математики случалось иногда надолго отходить от собственных убеждений. Так, один из основателей интуиционизма Леопольд Кронекер получил превосходные результаты в области алгебры, никак не согласующиеся с его собственными стандартами строгости. Как заметил Пуанкаре, Кронекер предал забвению собственную философию. Брауэр, провозгласив философию интуиционизма в своей диссертации 1907 г., следующее десятилетие посвятил плодотворным исследованиям в области топологии, в которых полностью игнорировал интуиционистские доктрины.

Итогом всей этой бурной и разнообразной деятельности стал вывод о том, что правильная математика должна определяться не основаниями (каковыми бы те ни были), безошибочность которых можно и оспаривать, – о «правильности» математики следует судить по ее применимости к реальному миру. Математика – такая же эмпирическая наука, как и ньютоновская механика. Математика правильна, лишь покуда она действует, а если что-то не срабатывает, то в нее необходимо вводить надлежащие поправки. Математика не свод априорных знаний, каковой ее считали в течение более чем двух тысячелетий; она не абсолютна и не неизменна.

Но коль скоро математику надлежит рассматривать как одну из естественных наук, важно досконально представить себе, как устроены и как работают естественные науки. В любой такой науке производят наблюдения над природными явлениями или ставят специально организованные эксперименты, а затем на основании полученных результатов строят теории – движения, света, звука, теплоты, электричества, химического строения вещества и т.д. Все эти теории созданы человеком, и правильность их оценивается по соответствию сделанных на их основе предсказаний с последующими наблюдениями и экспериментами. Если предсказания подтверждаются (во всяком случае, в пределах ошибки эксперимента), то теория считается верной. Тем не менее впоследствии такая теория может быть опровергнута; поэтому ее всегда надлежит

рассматривать как «полуэвристическую» теорию (где, впрочем, доли «теоретичности» и «эвристичности» могут варьироваться в весьма широких пределах), а не как абсолютную истину, входящую неотъемлемой составной частью в структуру физического мира. Мы привыкли к подобному взгляду на естественнонаучные теории, поскольку нам неоднократно приходилось быть свидетелями того, как одни естественнонаучные теории (корпускулярная теория света, флогистон, эфир, в какой-то степени даже ньютонова механика и волновая теория света Гюйгенса) опровергались и уступали место новым теориям.¹⁷⁷ Единственная причина, по которой подобный взгляд не распространялся на математику, состояла, как отметил Милль, в том, что элементарная арифметика и евклидова геометрия сохраняли эффективность на протяжении многих веков и люди ошибочно приняли эту эффективность за абсолютную истинность.¹⁷⁸ Однако не следует упускать из виду, что любая область математики предлагает только такую теорию, которая дееспособна. Покуда она эффективна, мы можем следовать ей, но впоследствии нам, возможно, понадобится более усовершенствованный вариант теории. Математика выполняет миссию посредника между человеком и природой, между внутренним миром человека и тем, что его окружает. Математика – это отличающийся необычайной смелостью линий грандиозный мост между нами и внешним миром. Горько сознавать, что концы его не закреплены ни в реальности, ни в умах людей.

Разум обладает способностью прозревать истину только в том, что строит по собственному плану и, хотя начать построение он может, руководствуясь своими идеями, на более позднем этапе ему необходимо с помощью эксперимента вывести у природы, насколько удачны предложенные им идеи. Вот тогда и наступает время для теории и для проверки ее соответствия реальному миру. В основном математика отличается от естественных наук одной особенностью: в то время как в физике на смену одним теориям приходили другие, радикально новые, в математике значительная часть логики, теории чисел и классического анализа успешно функционировали на протяжении многих веков. Более того, они применимы и поныне. Независимо от того, являются ли названные выше составные части математики абсолютно надежными или нет, они отлично нам служат – у нас нет ни оснований, ни права усомниться в них. Все эти разделы математики можно было бы назвать «квазиэмпирическими», ибо эмпирические их истоки потонули в глубине веков и для нас почти неразличимы.

В подтверждение сказанного приведем пример из истории дифференциального и интегрального исчисления. Несмотря на несмолкавшие споры о логических основах исчисления, как методология оно оказалось вполне успешным. По иронии судьбы именно теория бесконечно малых Лейбница (а не весь аппарат математического анализа) во второй половине нашего столетия неожиданно получила строгое обоснование (так называемый нестандартный анализ; см. гл. XII).

Критерием применимости к внешнему миру можно воспользоваться даже для проверки аксиомы выбора. Сам Цермело в работе 1908 г. утверждал: «Каким образом Пеано приходит к своим основополагающим принципам ... если в конечном счете он не может их доказать? Ясно, что он получает их, анализируя способы логического вывода, признанные правильными в ходе исторического развития, и отмечая, что эти принципы интуитивно очевидны и необходимы для науки...». Отстаивая правомерность использования аксиомы выбора, Цермело ссылаясь на успехи, достигнутые с помощью этой аксиомы. В работе 1908 г. он отметил, сколь полезной оказалась (даже тогда) аксиома выбора в теории трансфинитных чисел, в теории вещественного числа Дедекинда (см. [46]¹⁷⁹ и [47]¹⁸⁰) и в решении более специальных проблем анализа.

Лидеры различных математических школ и направлений, рекомендуя использовать приложения к естественным наукам как путеводную нить и критерий доброкачественности

¹⁷⁷ **Яглом:** При этом, разумеется, следует различать, скажем, *опровержения* теорий флогистона или эфира, полностью отброшенные современной наукой, и *уточнения* ньютоновской механики и гюйгенсовской оптики, не отменяющие, а лишь дополняющие эти выдающиеся достижения науки XVII в.

¹⁷⁸ **Яглом:** По поводу возможных вариантов геометрической структуры физического пространства, отличных от классической геометрии Евклида, см. гл. IV. Что касается случаев, в которых может оказаться неприемлемой обычная арифметика, то здесь можно, например, порекомендовать читателю неконкретную, но весьма выразительно написанную заметку [30: Рашевский П.К. О догмате натурального ряда. – Успехи математических наук, 28, вып. 4 (172), 1973, с. 243–246.].

¹⁷⁹ Дедекин Р. Непрерывность и иррациональные числа. – Одесса: Матезис, 1923.

¹⁸⁰ Дедекин Р. Что такое числа и для чего они служат. – Казань: Изд-во Императорского университета, 1905.

математики, руководствуются не только желанием выбрать одно из течений в основаниях математики. Все они сознают, что силы математики в решении физических проблем неизмеримо возросли, и считают недопустимым игнорировать услуги, оказываемые математикой человечеству в познании мира, только потому, что сохранились разногласия в основаниях математики. Хотя многие математики на протяжении без малого последних ста лет и перестали заниматься естественнонаучными приложениями, величайшие из математиков XX в. – Пуанкаре, Гильберт, фон Нейман и Вейль – внесли существенный вклад в современную физику.

К сожалению, большинство математиков – в силу указанных ранее (гл. XIII) причин, которые следует считать скорее предосудительными, чем похвальными, – и поныне не работают в области приложений своей науки; вместо этого они продолжают во всё возрастающем темпе создавать всё новые теоремы чистой математики. Некоторое представление о размахе современных исследований по (чистой и прикладной) математике можно получить по журналу *Mathematical Review*,¹⁸¹ печатающему краткие рефераты наиболее значительных новых работ, – ежемесячно в этом журнале публикуется около 2500 рефератов, т.е. около 30 000 рефератов в год.

Можно было бы думать, что тупик, в который зашел нескончаемый спор о том, какую именно математику можно считать «правильной» и какая школа математической мысли является наиболее последовательной, а также множество направлений, по которым математика может далее развиваться (даже оставаясь в рамках одного и того же течения в области оснований), позволит чистым математикам воспользоваться «паузой» и переключиться на решение проблем, связанных с основаниями математики, вместо того, чтобы достраивать в разных направлениях здание математической науки, игнорируя шаткость фундамента и рискуя тем, что новые теоремы могут оказаться логически неверными. Но этого не происходит, так что математики пренебрегают как философскими вопросами оснований, так и критерием практической приложимости. Почему же они так охотно работают в областях математики, далеких от приложений?

Это объясняется несколькими причинами. Многие математики ничего не знают о работах по основаниям математики. Стиль деятельности, выработавшийся у математиков XX в., типичен для подхода наших современников ко многим проблемам. Почти каждый математик работает в своем уголке на каком-то этаже огромного здания математики. Покуда те, кто занимается основаниями математики, копают всё глубже и глубже, дабы придать зданию устойчивость, обитатели верхних этажей продолжают оставаться на своих рабочих местах и выполнять свои функции. Специалисты по основаниям математики зарылись в землю так глубоко, что их просто не видно. Работающие в здании даже не знают, что кто-то заботится о его устойчивости, и не подозревают, что оно может рухнуть. Без тени сомнения они спокойно продолжают пользоваться традиционной математикой. Пребывая в счастливом неведении о вызовах, бросаемых господствующей доктрине, они трудятся в рамках этой доктрины, не интересуясь ни ее обоснованием, ни дополнительными подкреплениями, коими может служить критерий практики.

Другие математики прекрасно осведомлены о разногласиях и пробелах в основаниях математики, но предпочитают держаться в стороне от этих, как они называют, философских (в отличие от чисто математических) проблем. Таким математикам трудно поверить в существование сколько-нибудь серьезных проблем, связанных с основаниями математики, по крайней мере таких, которые касались бы их собственной деятельности. Они предпочитают оставаться верными обветшалому символу веры. Их неписанный девиз гласит: будем действовать так, словно за последние семьдесят пять лет ничего не произошло. Они говорят о доказательстве в некотором общепринятом смысле, хотя этот «зверь» не то что занесен в «Красную книгу», но просто давно вывелся, пишут и публикуют работы, словно никаких разногласий по поводу оснований математики не было и в помине. Единственное, что их интересует, – это число новых публикаций. Чем больше, тем лучше. Если «прагматики» и заботятся о надежных основаниях, то исключительно по воскресеньям, и даже в эти дни они либо возносят молитвы об отпущении грехов, либо воздерживаются от писания новых статей только для того, чтобы почитать, чем занимаются их соперники. Личное преуспеяние – превыше всего, а будут ли основания математики надежными, не так уж важно.

Но разве нет власти, способной наложить запрет на массовое производство новых результатов на том основании, что, прежде чем продвигаться дальше, необходимо навести

¹⁸¹ **Яглом:** Сходные результаты может дать анализ русского РЖ «Математика» или немецкого (ГДР–ФРГ) журнала *Zentralblatt für Mathematik*.

порядок в основаниях математики? Редакторы математических журналов могли бы отказаться печатать новые работы. Но редакторы и рецензенты – такие же математики и находятся в таком же положении, как и большинство их коллег – и работы, хотя бы отдаленно отвечающие требованиям строгости, т.е. требованиям начала XX в., охотно принимаются к печати и публикуются. Если король голый и придворным также нечем прикрыть наготу, то появление голого человека никого уже не удивляет и не приводит в замешательство. Как сказал однажды Лаплас, прогресс стоит человеческому разуму меньших усилий, чем познание самого себя.

Как бы то ни было, проблемы оснований отступили для многих математиков на задний план. Правда, те, кто занимается математической логикой, уделяют основаниям математики значительное внимание, но математическую логику нередко считают лежащей за пределами собственно математики.

Не следует думать, будто все математики, игнорирующие проблемы оснований и действующие так, словно этих проблем никогда не было, достойны осуждения. Некоторые из них серьезно озабочены применением математики и в подтверждение своего *modus vivendi* [образа жизни] ссылаются на примеры из истории математики. Как мы уже видели (гл. V–VI), несмотря на отсутствие логических обоснований системы чисел и правил действий над ними, а также дифференциального и интегрального исчисления, по поводу чего на протяжении почти ста лет велись жаркие споры, математики продолжали использовать материал и получать новые результаты, эффективность которых не вызвала никаких сомнений. Приводимые доказательства были грубыми и даже содержали прямые ошибки. Когда обнаруживались противоречия, математики пересматривали свои рассуждения и вносили в них надлежащие изменения. Часто и исправленный вариант доказательства не был строгим даже по тем критериям, которые предъявлялись к строгости в конце XIX в. Если бы математики вздумали ждать до тех пор, пока им удастся достичь уровня строгости, они не смогли бы продвинуться ни на шаг.¹⁸² Как заметил Эмиль Пикар, если бы Ньютон и Лейбниц знали, что непрерывные функции не обязательно должны быть дифференцируемыми, математический анализ никогда не был бы создан. В прошлом смелость и разумная осторожность приводили к наилучшим результатам.

Философ Джордж Сантаяна отметил в своей книге «Скептицизм и слепая вера», что скептицизм и сомнения важны для мышления, тогда как слепая вера важна для поведения. Значительная часть математических работ отличается высокими достоинствами, и, если мы хотим, чтобы эти достоинства приумножались, математические исследования необходимо продолжать. Слепая вера позволяет действовать без колебаний.

Лишь немногие математики проявили озабоченность по поводу спорных вопросов в основаниях математики, обесценивающих их работу. Эмиль Борель, Рене Бэр и Анри Лебег открыто выразили сомнения в пригодности теоретико-множественных методов, но продолжали пользоваться этими методами с некоторыми оговорками относительно надежности получаемых с их помощью результатов. Борель заявил в 1905 г., что охотно допускает всякого рода рассуждения о канторовских трансфинитных числах, поскольку эти числа оказываются весьма полезными в важных математических исследованиях. Но курс, избранный Борелем и некоторыми другими математиками, не следует расценивать как проявление своего рода математического легкомыслия. Прислушаемся, что сказал по этому поводу Герман Вейль, один из наиболее глубоких математиков современности и, несомненно, наиболее эрудированный из них:

Сейчас мы менее, чем когда-либо, уверены в первичных основаниях математики и логики. Мы переживаем свой «кризис» подобно тому, как переживают его всё и вся в современном мире. Кризис этот продолжается вот уже пятьдесят лет [Вейль написал эти строки в 1946 г.]. На первый взгляд кажется, будто нашей повседневной работе он особенно не мешает. Тем не менее я должен сразу же признаться, что на мою математическую работу этот кризис оказал заметное практическое влияние: он направил мои интересы в области, которые я считал относительно «безопасными», и постоянно подтачивал энтузиазм и решимость, с которой я занимался своими исследованиями. Мой опыт, вероятно, разделили и другие математики, небезразличные к тому, какое место их собственная научная деятельность занимает в этом мире в общем контексте бытия человека, интересующего, страдающего и созидającego.

¹⁸² **Яглом:** Здесь естественно вспомнить призыв Д'Аламбера, хорошо понимавшего шаткость оснований, на которых зиждилась математика его времени: «Работайте, работайте – понимание придет потом».

Коль скоро о степени обоснованности математики мы намереваемся судить по ее приложениям, сразу же возникает вопрос: насколько эффективна математика в этом отношении? Рассказывая о математике, созданной и применявшейся до XIX в., мы привели несколько примеров, показывающих, сколь хорошо математика описывает и предсказывает явления реального мира (гл. III). Но в XIX в. математики, руководствуясь, несомненно, вескими доводами, ввели ряд понятий и теорий, не заимствованных непосредственно из природы и даже, казалось, противоречивших ей, например бесконечные ряды и неевклидовы геометрии, комплексные числа и кватернионы, необычные алгебры и бесконечные множества различной мощности, а также другие не менее странные объекты, которых мы не касались. Никаких оснований ожидать априори, что эти понятия и теории окажутся применимыми, разумеется, не было. Итак, прежде всего убедимся, что вся современная математика работает в приложениях, причем делает это великолепно.

Все величайшие достижения физики за последние сто лет – теория электромагнитного поля, теория относительности и квантовая механика – широко используют современную математику. Мы рассмотрим лишь теорию электромагнитного поля, наиболее знакомую неспециалистам. В первой половине XIX в. физики и математики провели многочисленные исследования электричества и магнетизма. Им удалось получить небольшое число математических законов, описывающих различные электрические и магнитные явления. В 60-е годы XIX в. Джеймс Клерк Максвелл поставил перед собой задачу собрать все эти разрозненные законы и выяснить, насколько они совместимы. Максвелл обнаружил, что для математической совместимости необходимо ввести в уравнения еще один член, который он назвал током смещения. Единственный физический смысл, который Максвелл мог придать току смещения, состоял в утверждении, что источник электричества (грубо говоря, проводник с током) должен быть источником электромагнитного поля (т.е. от него исходит – и распространяется в пространстве – электромагнитная волна). Испускаемые источником электромагнитные волны имеют различные частоты. Это могут быть радиоволны, улавливаемые антеннами наших радиоприемников и телевизоров, гамма-лучи, видимый свет, инфракрасное и ультрафиолетовое излучение. Так, из чисто математических соображений Максвелл предсказал существование огромного класса ранее не известных явлений и пришел к правильному выводу об электромагнитной природе света.

Электромагнитные волны, как и гравитация (гл. III), обладают одной замечательной особенностью: мы не имеем ни малейших представлений о том, какова их физическая природа. Существование этих волн подтверждается только математикой – и только математика позволила инженерам создать радио и телевидение, которые нашим предкам показались бы поистине сказочными чудесами.

То же самое можно сказать и о всевозможных явлениях атомной и ядерной физики. Математики и физики-теоретики говорят о полях (гравитационном, электромагнитном, поле электрона и других частиц) так, словно все эти поля – «материальные» волны, которые распространяются в пространстве и вызывают различные наблюдаемые эффекты, подобно, скажем, волнам на воде, бьющим о борт судна или разбивающимся о скалы. Но все эти поля не более чем фикции. Их физическая природа нам неизвестна. Они лишь отдаленно связаны с наблюдаемыми явлениями, например с ощущениями света, звука, движения материальных тел, с радио и телевидением. Беркли некогда назвал производную призраком навсегда ушедших величин. Современная физическая теория имеет дело с призраком материи.¹⁸³ Но, формулируя математические законы, которым подчиняются фиктивные поля, не имеющие наглядных аналогов в реальности, и выводя из этих законов логические следствия, мы приходим к выводам, допускающим при надлежащем переводе на язык физики проверку с помощью чувственных восприятий.

Фиктивный характер современной науки подчеркивал еще в 1931 г. Альберт Эйнштейн:

¹⁸³ **Яглом:** Сложность трактовки материи в квантовой механике (упомянутые в этой книге «размазанность» элементарных частиц в задание их исключительно с помощью абстрактных математических конструкций) не отменяет, скажем, понятия массы, играющего основную роль как в физике макромира, так и в описании колоссальных объектов современной астрофизики и в физике микромира.

Согласно ньютоновской системе, физическая реальность характеризуется понятиями пространства, времени, материальной точки и силы (взаимодействия материальных точек)...

После Максвелла физическая реальность мыслилась в виде непрерывных, не поддающихся механическому объяснению полей, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных. Это изменение понятия реальности является наиболее глубоким и плодотворным из тех, которое испытала физика со времен Ньютона...

Нарисованной мною картине чисто фиктивного характера основных представлений научной теории не придавалось особого значения в XVIII и XIX вв. Но сейчас она приобретает всё большее значение, по мере того, как увеличивается в нашем мышлении расстояние между фундаментальными понятиями и законами, с одной стороны, и выводами, к которым они приводят в отношении нашего опыта, с другой стороны, по мере того как упрощается логическая структура, уменьшается число логически независимых концептуальных элементов, необходимых для поддержания структуры. ([126]¹⁸⁴, т. 4, с. 136–139.)

Современную науку неоднократно восхваляли за то, что, дав рациональные объяснения явлений природы, она исключила духов, дьяволов, ангелов, демонов, мистические силы и анимизм. К этому необходимо добавить теперь, что, постепенно изгоняя физическое и интуитивное содержание, апеллирующее к нашему чувственному восприятию, наука исключила и материю. Теперь она имеет дело только с синтетическими и идеальными понятиями, такими, как поля и электроны, о которых единственно, что нам известно, это управляющие ими математические законы. После длинных цепочек дедуктивных умозаключений наука сохраняет лишь небольшой, но жизненно важный контакт с чувственными восприятиями. Наука – это рационализованная фикция, и рационализована она математикой.

Выдающийся физик Генрих Герц (1857–1894), первым экспериментально подтвердивший предсказание Максвелла о том, что электромагнитные волны могут распространяться в пространстве, был настолько восхищен могуществом математики, что воскликнул: «Трудно отделаться от ощущения, что эти математические формулы существуют независимо от нас и обладают своим собственным разумом, что они умнее нас, умнее тех, кто открыл их, и что мы извлекаем из них больше, чем было в них первоначально заложено».

Роль математики в изучении природы подчеркивал Джеймс Джинс (1877–1946). В книге «Загадочная Вселенная» он утверждал: «Самый важный факт состоит в том, что все картины природы, рисуемые наукой, которые только могут находиться в согласии с данными наблюдений, – картины математические... За пределы математических формул мы выходим на свой страх и риск». Физические понятия и механизмы подсказывают, как построить математическое описание явлений, после чего, как ни парадоксально, становится ясно, что вспомогательные физические средства не более чем фантазии и что только математические уравнения надежно следуют явлениям.

Аналогичную мысль Джинс высказал и в книге «Между физикой и философией». С помощью моделей или картин, доступных нашим органам чувств, человеческий разум не в силах постичь, как функционирует природа. Нам не дано понять, что представляют собой явления, и приходится ограничиваться описанием схем явлений на математическом языке. Урожай, пожинаемый физикой, всегда состоит из набора математических формул. Подлинная сущность материальной субстанции непознаваема.

Итак, как мы видим, роль математики в современной науке отнюдь не сводится к почетным обязанностям главного инструмента познания. О математике нередко говорят, что она резюмирует и систематизирует в символах и формулах данные физических наблюдений или экспериментов, извлекая из формул дополнительную информацию, недоступную прямому наблюдению и эксперименту. Такое описание умалчивает о многом из того, что делает математика в естественных науках. Математика выражает саму суть естественнонаучных теорий, и приложения чисто математических понятий позволили в XIX–XX вв. получить гораздо более сильные и неожиданные результаты, чем это удавалось сделать в предшествующие столетия математикам, оперировавшим с математическими понятиями, непосредственно связанными с физическими явлениями. Хотя достижениями современной науки – радио, телевидением, авиацией, телефоном, телеграфом, высококачественной звукозаписывающей и звуковоспроизводящей аппаратурой, гамма-лучами, транзисторами, атомной энергией (и, к сожалению, атомными бомбами!), если говорить только о некоторых наиболее известных достижениях, – мы

¹⁸⁴ Эйнштейн А. Собрание научных трудов. – М.: Наука, 1965 (т.1), 1966 (т.2), 1967 (т.4).

обязаны не только математике, роль математики намного больше и оценить ее гораздо труднее, чем вклад экспериментальной науки.

Френсис Бэкон в XVII в. скептически относился к таким теориям, как астрономические теории Коперника и Кеплера. Бэкон опасался, что философские убеждения или религиозные верования (например, тезисы о том, что господь бог стремится к простоте или что природа построена богом по плану, основанному на математических принципах) сказываются на формировании этих теорий в большей степени, чем согласие с наблюдениями или экспериментом. Отношение Бэкона к теориям, несомненно, имеет некие разумные основания, но современные математические теории доминируют в физике только потому, что они эффективны. Разумеется, согласие с наблюдениями является неперенным условием принятия любой математической теории в физике.

Итак, на любой вопрос о том, работает ли математика, мы можем с уверенностью дать положительный ответ. Гораздо труднее ответить на вопрос, почему она столь эффективна. Во времена античности и много столетий спустя математики считали, что знают верные приметы того, где следует искать «золото» (математика была сводом истин о физическом мире, и заложенные в ее основу логические принципы также были абсолютными истинами), и поэтому копали энергично, с размахом и настойчиво. Им удалось добиться замечательных успехов. Но теперь-то мы знаем, что они принимали за золото какой-то совсем другой, пусть даже и не менее драгоценный, металл. Этот «металл» позволял с замечательной точностью описывать явления природы. Вопрос о том, почему он служил так хорошо, требует особого рассмотрения. Действительно, почему некая независимая, абстрактная конструкция, плод «точной» мысли, должна соответствовать физическому миру человека?

Один из возможных ответов состоит в том, что математические понятия и аксиомы подсказаны человеку опытом. Даже законы логики человек заимствовал из опыта; поэтому они и согласуются с опытом. Но такой ответ чрезмерно упрощает суть дела. Разумеется, он позволяет объяснить, почему, прибавив к пятидесяти коровам еще пятьдесят, мы получим сто коров. В арифметике и в элементарной геометрии повседневный опыт может подсказать правильные аксиомы, и используемая здесь логика не выходит за рамки обычного здравого смысла. Но в алгебре, дифференциальном и интегральном исчислении, в теории дифференциальных уравнений и в других более «высших» областях математики были созданы математические понятия и методы, далеко выходящие за рамки повседневного опыта.

Помимо этих примеров «неэмпирической» математики необходимо также иметь в виду, что математическая прямая состоит из несчетного множества точек. В математическом анализе используется понятие времени, состоящего из мгновений, «спрессованных», как числа на вещественной прямой. Понятие производной (гл. VI) было навеяно физическим представлением о скорости за некоторый «бесконечно малый» промежуток времени; однако описывающая скорость производная соответствует мгновенной скорости, т.е. понятию, которое трудно признать интуитивно ясным. Разнообразие типов бесконечных множеств вовсе не подсказано повседневным опытом, тем не менее оно используется в математических рассуждениях и так же необходимо для удовлетворительной математической теории, как физические тела для чувственного восприятия. Математика ввела в научный обиход такие понятия, как, скажем, электромагнитное поле, физическая природа которого полностью не ясна и по сей день.

Даже если законы логики и некоторые основные физические принципы выведены из опыта, в процессе длинного математического доказательства, требующегося для получения физически значимого заключения, эти законы используются однократно – и всё наше доказательство опирается только на логику. Чисто математические рассуждения позволяют предсказывать некоторые явления. Так, на основе математического предсказания была открыта планета Нептун. Означает ли это, что природа подтверждает логические принципы? Иначе говоря, существуют ли (как угодно открытые) законы логики, которые говорили бы, как должна вести себя природа в тех или иных случаях? То, что целые теории, состоящие из сотен теорем и тысяч дедуктивных умозаключений об абстрактных понятиях, всё же отклоняются от реальности не более, чем исходные аксиомы, убедительно свидетельствуют о способности математики описывать и предсказывать реальные явления с поразительной точностью. Почему длинные цепочки, чисто умозрительных заключений должны приводить к выводам, столь хорошо согласующимся с природой? В этом – величайший парадокс математики.

Итак, перед человеком стоит загадка двоякого рода. Почему математика безотказно, срабатывает даже там, где заключение, требующее сотен дедуктивных выводов, оказывается

столь же применимым, как и исходные аксиомы, хотя физические явления описываются не на математическом, а на физическом языке? И почему математика эффективна там, где мы располагаем лишь непроверенными гипотезами о сущности физических явлений и где при описании этих явлений вынуждены почти целиком полагаться на одну математику? От этих вопросов нельзя бездумно отмахнуться: слишком уж многое в нашей науке и технике зависит от математики. Может быть, эта наука, хотя ее и используют как непобедимое знамя истины, одерживает свои победы с помощью какой-то таинственной внутренней силы и действительно наделена какими-то волшебными чарами?

Этот вопрос интересовал и продолжает интересовать многих. Неоднократно задавал его себе и Альберт Эйнштейн в книге «Вокруг теории относительности» (1921):

В этой связи возникает вопрос, который волновал исследователей всех времен. Почему возможно такое превосходное соответствие математики с реальными предметами, если сама она является произведением только человеческой мысли, не связанной ни с каким опытом? Может ли человеческий разум без всякого опыта, путем только одного размышления понять свойства реальных вещей?

...Если теоремы математики прилагаются к отражению реального мира, они не точны; они точны до тех пор, пока они не ссылаются на действительность. ([126]¹⁸⁵, т. 2, с. 83.)

Далее Эйнштейн поясняет, что аксиоматизация математики сделала это различие очевидным. Хотя Эйнштейн понимал, что аксиомы математики и принципы логики выведены из опыта, его интересовало, почему длинная и сложная цепь чисто логических рассуждений, которые не зависят от опыта и используют понятия, созданные человеческим разумом без всякой апелляции к эксперименту и природным феноменам, может приводить к выводам, находящим столь широкие применения.

Современное объяснение необычайной эффективности математики восходит к Иммануилу Канту. Кант утверждал (гл. IV), что мы не знаем и не можем знать природы. Мы располагаем лишь чувственными восприятиями. Наш разум, обладая врожденными интуитивными представлениями о пространстве и времени, организует чувственные восприятия в соответствии с тем, что диктуют эти врожденные представления. Так, наши пространственные восприятия мы организуем в соответствии с законами евклидовой геометрии, потому что этого требует наш разум. Упорядоченные разумом, пространственные восприятия продолжают подчиняться законам евклидовой геометрии. Разумеется, Кант заблуждался, считая евклидову геометрию единственно возможной, но главное в его учении заключалось в другом: человеческий разум определяет, как ведет себя природа при неполном (частичном) объяснении. Разум формирует наши концепции пространства и времени. Мы видим в природе то, что предопределено нам видеть нашим разумом.

Взглядов, близких к воззрениям Канта, но выходящих далеко за их пределы, придерживался один из выдающихся физиков нашего времени – Артур Стэнли Эддингтон (1882–1944). По мнению Эддингтона, человеческий разум решает, как должна себя вести природа:

...там, где наука ушла особенно далеко в своем развитии, разум лишь получил от природы то, что им было заложено в природу. На берегах неизвестного мы обнаружили странный отпечаток. Чтобы объяснить его происхождение, мы выдвигали одну за другой остроумнейшие теории. Наконец нам всё же удалось восстановить происхождение отпечатка. Увы! Оказалось, что это наш собственный след.

В XX в. предложенное Кантом объяснение эффективности математики было подробно разработано Уайтхедом и поддержано Брауэром в работе 1923 г. Основная идея неокантианского объяснения состоит в том, что математика является не чем-то независимым от явлений, происходящих во внешнем мире, и применимым к ним, а элементом нашего способа восприятия явлений. Физический мир не дан нам объективно. Он является лишь нашей интерпретацией ощущений, конструкцией из них, и математика – основной инструмент, позволяющий упорядочивать ощущения. Из сказанного почти автоматически следует, что математика описывает внешний мир в той мере, в какой он известен человеку. То, что математическая организация ощущений оказывается одинаковой у многих людей, неокантианцы объясняют, ссылаясь на сходство в функционировании человеческого разума или на общность языка и

¹⁸⁵ Эйнштейн А. Собрание научных трудов. – М.: Наука, 1965 (т.1), 1966 (т.2), 1967 (т.4).

культуры, вынуждающую различных людей принимать одну и ту же математическую схему. В пользу такого объяснения свидетельствует, например, господствующее положение, занимаемое евклидовой геометрией, хотя она не является последним словом в вопросах, связанных со структурой физического пространства. То же можно сказать и о гелиоцентрической системе мира. Своим происхождением она обязана отнюдь не расхождениям между птолемеевой теорией и наблюдениями. Кроме того, если бы теория Птолемея была сохранена и усовершенствована в соответствии с новыми наблюдениями, то, несмотря на несколько большую математическую сложность, она могла бы служить потребностям астрономов и мореплавателей с не меньшим успехом, чем теория Коперника.

Суть изложенных выше взглядов сводится к следующему. Мы пытаемся абстрагировать из сложного переплетения явлений какие-то простые системы, свойства которых допускают математическое описание. Поразительно точным математическим описанием природы мы обязаны силе этой абстракции. Более того, мы видим лишь то, что позволяет нам видеть наша математическая «оптика». Ту же мысль мы находим, в частности, в «Прагматизме» философа Уильяма Джеймса: «Все грандиозные достижения математики и естественных наук... проистекают из нашего неутомимого желания придать миру в наших умах более рациональную форму, чем та, которую придал ему грубый порядок нашего опыта».

Один из современных авторов выразил эту мысль более «поэтически»: «Реальность – самая очаровательная из куртизанок, ибо делает то, что вы ожидаете от нее в данный момент, но она отнюдь не скала, на которой может утвердиться ваш дух, ибо соткана из призрачных видений. Реальность не существует вне ваших мечтаний, и зачастую это не более чем блик, отбрасываемый вашими мыслями на лицо природы».

Однако кантовское объяснение, согласно которому мы видим в природе лишь то, что разрешает нам видеть наш разум, не дает полного ответа на вопрос, почему математика эффективна. Такие достижения науки послекантовского периода, как создание теории электромагнитного поля, вряд ли можно отнести к порождениям чистого разума или способности разума упорядочивать ощущения. Ведь, скажем, радио и телевидение существуют вовсе не потому, что разум организовал какие-то ощущения в соответствии с некоторой «внутренней структурой», позволившей нам заняться разработкой радио и телевидения как следствий врожденных представлений разума о том, как природа должна себя вести.

Некоторые математики полагают, что математика автономна (гл. XIV), т.е. что ее аксиомы рождены чистым разумом или подсказаны опытом, а вся остальная математика построена на них уже независимо от опыта. Если встать на эту точку зрения, то как объяснить, почему математика применима к реальному миру, и особенно к физическим явлениям. На этот вопрос существует несколько ответов. Один из них состоит в том, что в математические аксиомы входят неопределяемые понятия, и, по-разному интерпретируя эти понятия, можно достичь согласия с описываемой физической ситуацией. Так, например, эллиптическая неевклидова геометрия применима и к обычным прямым на эллиптической плоскости, под которой можно понимать и обычные «физические» плоскости (ведь «в пределе» при очень большой длине каждой прямой эллиптическая геометрия переходит в евклидову!), и к геометрии на сфере, где «прямыми» служат дуги больших окружностей сферы, отсекаемых из нее плоскостями, проходящими через центр сферы.

Объяснение такого рода предложил Пуанкаре. Ему хотелось, чтобы математика была чисто дедуктивной наукой, которая лишь шаг за шагом выводит следствия из исходных аксиом. Используя правдоподобные аксиомы, возможно подсказанные его чувственными восприятиями, человек создает евклидову или неевклидову геометрии. Аксиомы и теоремы этих геометрий не являются ни эмпирическими, ни априорными истинами. Они истинны или ложны ничуть не больше, чем правильно или неправильно использование полярных координат по сравнению с прямоугольными. Пуанкаре назвал эти геометрии соглашениями для упорядочения и измерения тел или замаскированными определениями понятий. Мы используем ту геометрию, которая наиболее удобна. Тем не менее, подчеркивал Пуанкаре, мы всегда используем евклидову геометрию с прямыми, понимаемыми в обычном смысле, т.е. как натянутые нити или край линейки, потому что евклидова геометрия самая простая. Почему же теоремы геометрии должны быть применимы к физическому миру? Ответ, данный Пуанкаре, гласил: потому что мы изменяем физические законы, стремясь привести их в соответствие с математикой, «подогнать» под нее.

Чтобы проиллюстрировать выдвинутый Пуанкаре тезис, рассмотрим, как геодезисты определяют расстояния. Сначала они выбирают удобный базис – отрезок AB (рис. 15.1), длина которого измеряется мерной лентой. Чтобы определить расстояние AC , геодезист измеряет угол CAB , визируя в специальную трубу, установленную в точке A , направление на точку C , а затем наводя трубу на точку B . По лимбу на теодолите геодезист узнает, на какой угол была повернута труба, и тем самым измеряет угол CAB . Аналогичным образом геодезист измеряет угол ABC . Предполагается, что лучи света, идущие из C в A и из B в A , совпадают с отрезками прямых (натянутыми нитями), соединяющими точки C и B с точкой A . Но мы

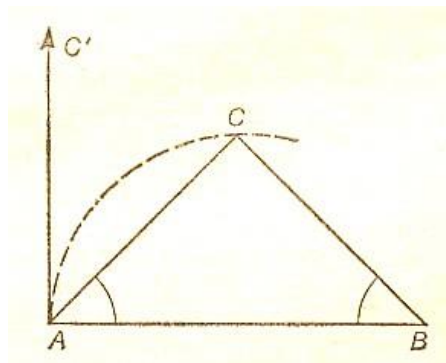


Рис. 15.1. Измерение расстояний методом триангуляции

знаем, что аксиомы евклидовой геометрии согласуются с представлением о прямой как о натянутой нити, поэтому геодезист при вычислении расстояний AC и BC смело использует евклидову геометрию. Предположим теперь, что полученные геодезистом расстояния всё же оказались неверными. Как это могло произойти? Луч света, идущий из точки C в точку A , мог распространяться по траектории, показанной на рис. 15.1 пунктиром; при этом, чтобы поймать световой «зайчик», геодезисту приходилось наводить теодолит в точке A по касательной к описываемой лучом света траектории. Следовательно, теодолит мог быть наведен на точку C' , хотя геодезист видел точку C , и вместо угла CAB он измерил угол $C'AB$. В этом случае применение евклидовой геометрии могло бы дать неверные значения расстояний AC и BC .

Итак, возникает вопрос: по какому пути распространяются лучи света? Иногда они распространяются по «настоящим» (обычным) прямым, иногда изгибаются вследствие рефракции в атмосфере. Предположим, что геодезист определил расстояния AC и BC неверно. Не имея никаких оснований считать лучи света искривленными, он тем не менее счел их таковыми и в своих вычислениях обращался с отрезками AC и BC как с криволинейными. Введя надлежащие поправки в измерения углов в пунктах A и B , геодезист мог бы воспользоваться евклидовой геометрией и получить правильные значения расстояний AC и BC .

Приведем еще один пример, поясняющий тезис Пуанкаре о том, что математику можно подогнать под физическую реальность; этот пример касается вращения Земли. По мнению Пуанкаре, вращение Земли необходимо принять как физический факт, так как в астрономии это допущение приводит к более простой математической теории рассматриваемых явлений. Действительно, простота математической теории была единственным аргументом, который Коперник и Кеплер смогли привести в пользу гелиоцентрической системы по сравнению со старой геоцентрической системой Птолемея.

Развитая Пуанкаре философия науки обладает несомненным достоинством. Мы действительно пытаемся обходиться возможно более простой математикой и изменять в случае необходимости физические законы так, чтобы наши умозаключения находились в согласии с физическими фактами. Но современные физики и математики используют в качестве критерия простоту математической и физической теории в целом. И если для получения простейшей комбинированной [физико-математической] теорий нам придется воспользоваться неевклидовой геометрией, как это сделал Эйнштейн в своей теории относительности,¹⁸⁶ то мы пойдем на это.

Хотя объяснение эффективности математики, предложенное Пуанкаре, было более подробным, в определенных пределах он считал верным и кантовское объяснение, а именно ту его часть, где говорится, что согласие между математикой и природой создается человеческим разумом. Так, в «Ценности науки» Пуанкаре утверждает:

Но та гармония, которую человеческий разум полагает открыть в природе, существует ли она вне человеческого разума? Без сомнения – нет; невозможна реальность, которая была бы полностью

¹⁸⁶ **Яглом:** Здесь имеются в виду описывающая пространство-время специальной теории относительности (СТО) так называемая *псевдоевклидова геометрия Минковского* (см. по этому поводу, например, классическую книгу [127: Борн М. Эйнштейновская теория относительности. – М.: Мир, 1964.]) и *риманова* (точнее, *псевдориманова*) геометрия, являющаяся базисом общей теории относительности (см., скажем, основополагающую статью [128: Эйнштейн А. Основы общей теории относительности. – В кн.: [126], т.1, с. 452–504. [См. также: Лоренц Г. и др. Принцип относительности. – М.–Л.: ОНТИ, 1935, с. 231–305.]] или ту же книгу [127]).

независима от ума, постигающего ее, видящего, чувствующего ее. Такой внешний мир, если бы даже он и существовал, никогда не был бы нам доступен. Но то, что мы называем объективной реальностью, в конечном счете есть то, что общо нескольким мыслящим существам и могло бы быть общо всем. Этой общей стороной, как мы увидим, может быть только гармония, выражающаяся математическими законами. ([1]¹⁸⁷, с. 158.)

Есть и другое, несколько туманное, возможно, чрезмерно упрощенное объяснение эффективности математики. Согласно этому объяснению, существует объективный физический мир и человек стремится согласовать с ним свою математику. Мы вносим необходимые коррективы, когда приложения обнаруживают неточности математического описания или прямые ошибки в нашей математике. Подобную точку зрения Гильберт высказал в докладе на II Международном математическом конгрессе в 1900 г.:

А между тем во время действия созидательной силы чистого мышления внешний мир снова настаивает на своих правах: он навязывает нам своими реальными фактами новые вопросы и открывает нам новые области математического знания. И в процессе включения этих новых областей знания в царство чистой мысли мы часто находим ответы на старые нерешенные проблемы и таким путем наилучшим образом продвигаем вперед новые теории. На этой постоянно повторяющейся и сменяющейся игре между мышлением и опытом, мне кажется, и основаны те многочисленные и поражающие аналогии и та кажущаяся предустановленной гармония, которые математик так часто обнаруживает в задачах, методах и понятиях различных областей знания, ([51]¹⁸⁸, с. 16–17.)

В более простых (и в наше время менее правдоподобных) объяснениях эффективности математики повторяются тезисы, которые математики выдвигали с античных времен и примерно до середины XIX в. И сейчас находятся люди, продолжающие верить в то, что природа устроена на математических началах. Скрепя сердце им приходится признать несовершенство прежних математических теорий, созданных для объяснения физических явлений. В то же время такие люди полагают, что при непрерывном усовершенствовании математические теории могут не только охватить более широкий круг явлений, но и достигнуть более тонкого согласия с наблюдениями. Так, механика Ньютона пришла на смену механике Аристотеля, а специальная теория относительности внесла поправки в ньютоновскую механику. Разве из исторического развития науки не следует, что окружающий нас мир основан на неких определенных принципах и что человеческий разум всё более приближается к их познанию? Именно такое объяснение взаимосвязи между математикой и естествознанием дал Шарль Эрмит:

Если я не ошибаюсь, существует мир, представляющий собой собрание математических истин и доступный нам только через наш разум, – точно так же существует мир физической реальности. Как один, так и другой не зависят от нас, они оба – творение господина бога и различимы лишь по слабости нашего разума, тогда как на более высокой ступени мышления они суть одно и то же. Синтез этих двух миров отчасти проявляется в чудесном соответствии между абстрактной математикой, с одной стороны, и всеми отраслями физики – с другой.

В письме к Лео Кёнигсбергеру Эрмит добавил, что «эти понятия анализа существуют самостоятельно вне нас, образуя единое целое, лишь часть которого беспрепятственно, хотя и несколько загадочно, открывается нам; это целое ассоциируется с другой совокупностью объектов, которые мы воспринимаем органами чувств».

Джеймс Джинс в «Загадочной Вселенной» также разделяет неоднократно высказывавшиеся ранее взгляды: «...судя по некоторым специфическим особенностям своего творения, великий создатель Вселенной начинает представать перед нами как чистый математик». Однако до этого Джинс считал необходимым заявить, что «математика, созданная человеком, пока еще не вошла в контакт с первозданной реальностью». На последующих страницах книги Джинс становится более догматичным в своих высказываниях:

Природа, по-видимому, великолепно осведомлена о правилах чистой математики в том виде, в каком их сформулировали в своих исследованиях ученые, руководствуясь внутренним сознанием и не полагаясь особо на свой опыт общения с внешним миром... Во всяком случае не подлежит

¹⁸⁷ Пуанкаре А. О науке. – М.: Наука, 1983.

¹⁸⁸ Проблемы Гильберта. – М.: Наука, 1969.

сомнению, что природа и наши сознательные математические умы действуют по одним и тем же законам.

Впоследствии Эддингтон изменил свои взгляды и стал считать, что природа основана на математических началах и что наш разум способен построить чистую науку из априорного знания («Фундаментальная теория», 1946). Эта наука – единственно возможная, любая другая содержала бы логические противоречия. Разум не может познать все детали науки, но создать общие законы – в его силах. Так, чистый разум говорит нам, что свет должен распространяться с конечной скоростью. Даже природные константы, такие, как отношение массы протона к массе электрона, могут быть определены из априорных соображений. Априорное знание не зависит от фактически произведенных наблюдений и более достоверно, чем экспериментальное знание.

Джордж Дэвид Биркгоф (первый выдающийся математик американского происхождения) в 1941 г. без колебаний повторил и поддержал мысль Эддингтона:

...Во всей системе законов физики не существует ничего, что нельзя было бы однозначно вывести из теоретико-познавательных соображений. Разум, незнающий ничего о нашей Вселенной, но знакомый с нашей системой мышления, с помощью которой человеческий разум интерпретирует для себя содержание чувственного опыта, смог бы достичь всего знания физики, которого мы достигли с помощью эксперимента... Например, он мог бы путем умозаключений прийти к выводу о существовании и свойствах радия, но не смог бы определить размеры Земли.

Не вполне адекватное, но разумное объяснение эффективности математики предложил в 1918 г. молодой Эйнштейн:

...Историй показала, что из всех мыслимых построений в данный момент только одно оказывается преобладающим. Никто из тех, кто действительно углублялся в предмет, не станет отрицать, что теоретическая система практически однозначно определяется миром наблюдений, хотя никакой логический путь не ведет от наблюдений к логическим принципам теории. В этом суть того, что Лейбниц удачно назвал «предустановленной гармонией». ([126]¹⁸⁹, т. 4, с. 41.)

Позиция Эйнштейна в зрелые годы отражена в его книге «Мир, каким я вижу его» (1934), в которой он, в частности, утверждает следующее:

Весь предшествующий опыт убеждает нас в том, что природа представляет собой реализацию простейших математически мыслимых элементов. Я убежден, что посредством чисто математических конструкций мы можем найти те понятия и закономерные связи между ними, которые дадут нам ключ к пониманию явлений природы. Опыт может подсказать нам соответствующие математические понятия, но они ни в коем случае не могут быть выведены из него. Конечно, опыт остается единственным критерием пригодности математических конструкций физики. Но настоящее творческое начало присуще именно математике. Поэтому я считаю в известном смысле оправданной веру древних в то, что чистое мышление в состоянии постигнуть реальность. ([126]¹⁹⁰, т. 4, с. 184.)

Свое убеждение Эйнштейн подтверждает и в следующем известном высказывании о боге: «Я не верю, что бог играет в кости»¹⁹¹. Если же бог и играет в кости, то, как сказал Ральф Вальдо Эмерсон, «кости господа бога налиты свинцом». В приведенном выше высказывании Эйнштейн не утверждает, что выведенные нами математические законы верны. Он лишь констатирует, что какие-то математические законы существуют вне нас – и мы надеемся приблизиться к ним возможно более. По словам самого Эйнштейна, «господь бог изощрен, но не злобен».

Один из крупнейших историков и философов науки, Пьер Дюгем, в своей книге «Цель и структура физической теории», подобно Эйнштейну, проходит эволюцию от сомнений к положительным утверждениям. Дюгем первым описал физическую теорию как «абстрактную систему, предназначенную для суммирования и логической классификации определенной

¹⁸⁹ Эйнштейн А. Собрание научных трудов. – М.: Наука, 1965 (т.1), 1966 (т.2), 1967 (т.4).

¹⁹⁰ Эйнштейн А. Собрание научных трудов. – М.: Наука, 1965 (т.1), 1966 (т.2), 1967 (т.4).

¹⁹¹ **Яглом:** Последовательное (и в ряде отношений расходящееся с современными физическими концепциями) убеждение Эйнштейна в принципиальной прогнозируемости всех физических явлений (ср., например, [129: Дайсон Ф. Будущее воли и будущее судьбы. – Природа, 1982, № 8, с. 60–70.]) обусловило непринятие им квантовой механики (отчасти базирующейся на его же классических работах по теории фотозффекта) – в связи со статистической трактовкой мира этой наукой.

группы экспериментальных законов и не претендующую на их объяснение». По Дюгему, теории носят приближенный, временный характер и «лишены ссылок на объективную реальность». Физика имеет дело лишь с данными чувственного опыта, и нам необходимо избавиться от иллюзии, будто теоретизируя, мы «срываем покров с данных чувственного опыта». Когда гениальный ученый привносит математический порядок и ясность в хаотическое нагромождение чувственных восприятий, он достигает своей цели лишь ценой замены сравнительно доступных разуму понятий символическими абстракциями, не открывающими истинной природы окружающего нас мира. Тем не менее Дюгем заканчивает утверждением: «Невозможно поверить, что этот порядок и эта организация [вносимые математической теорией] не являются отражением реального порядка и реальной организации». Мир построен великим архитектором по математическому плану. Бог вечно геометризует, и человеческая математика описывает математические начала, на которых зиждется мир.

Герман Вейль был уверен в том, что математика отражает порядок, существующий в природе. В одном из выступлений Вейль сказал:

В природе существует внутренне присущая ей скрытая гармония, отражающаяся в наших умах в виде простых математических законов. Именно этим объясняется, почему природные явления удастся предсказывать с помощью комбинации наблюдений и математического анализа. Сверх всяких ожиданий убеждение (я бы лучше сказал, мечта!) в существовании гармонии в природе находит всё новые и новые подтверждения в истории физики.

Вейль считает, что, возможно, именно мечта о гармонии Вселенной вдохнула жизнь в научное мышление, и в книге «Философия математики и естественных наук» он добавляет:

Наука погибла бы без поддержки трансцендентальной веры в истинность и реальность и без непрерывного взаимодействия между научными фактами и построениями, с одной стороны, и образным мышлением – с другой.

Хотя от высказываний Джинса, Вейля, Эддингтона и Эйнштейна невозможно просто отмахнуться, большинство современных математиков и физиков не разделяют их взглядов на взаимосвязь математики и природы. Математическое описание природы достигло столь поразительных успехов, что предлагаемые Джинсом, Вейлем, Эддингтоном и Эйнштейном объяснения представляются вполне разумными, подобно тому как евклидова геометрия на протяжении многих столетий казалась математикам неоспоримой истиной. Но в наше время вера в единый, основанный на математических принципах «план», лежащий в основе всей природы, давно угасла.

Существует еще один подход к объяснению взаимосвязи математики и природы. Он также наводит на мысль о некоем соответствии, но соответствии особого рода, которое обычно упускают из виду. За последние сто лет возник статистический подход к описанию природы. По иронии судьбы его родоначальником стал Лаплас, твердо веривший в то, что явления природы строго детерминированы в соответствии с математическими законами. Однако причины, вызывающие то или иное явление, как считал Лаплас, не всегда известны, и наблюдения обладают лишь ограниченной точностью. Чтобы определить наиболее вероятные причины и наиболее вероятные результаты, следует воспользоваться теорией вероятностей. «Аналитическая теория вероятностей» (3-е изд. – 1820) Лапласа по праву считается классическим трудом по этому разделу математики. История теории вероятностей и математической статистики весьма обширна, и нам нет необходимости входить здесь в излишние подробности (см., например, [130]¹⁹² и по поводу позиции Лапласа – [131]¹⁹³). Но менее чем за сто лет вероятностно-статистические представления привели к возникновению новых взглядов, согласно которым явления природы не детерминированы, а носят случайный характер, но существует некий наиболее вероятный, средний, режим. Именно его мы и наблюдаем, утверждая, что он детерминирован математическими законами. Поясним сказанное на примере. Продолжительность человеческой жизни колеблется в довольно широких пределах: одни умирают в младенческом возрасте, другие доживают почти до ста лет. Поэтому для всех мужчин и женщин

¹⁹² Майстров Л.Е. Развитие понятия вероятности. – М.: Наука, 1980.

¹⁹³ Тутубалин В.Н. Границы применимости (вероятностно-статистические методы и их возможности). – М.: Знание, 1977.

существует не только средняя продолжительность жизни, но и средняя продолжительность жизни по достижении определенного возраста. Строя свою деятельность с учетом этих данных, страховые компании извлекают солидные прибыли. Статистический подход к описанию природы особенно существенное распространение получил в последнее время в связи с развитием квантовой механики, которая утверждает, что не существует «твердых», дискретных, строго локализованных частиц. Каждая частица распределена с определенной вероятностью по всему пространству, но с наибольшей вероятностью она сосредоточена («локализована») в каком-то одном месте.

Согласно статистическим представлениям, математические законы природы описывают в лучшем случае наиболее вероятный режим протекания того или иного явления; однако они не исключают полностью, например, возможности того, что Земля может неожиданно сойти со своей орбиты и отправиться странствовать в глубины космического пространства. Статистический подход как бы оставляет за природой возможность «передумать» и не делать того, что наиболее вероятно. Некоторые философы, занимающиеся проблемами естествознания, пришли к заключению, что необъяснимая эффективность математики остается необъяснимой. Впервые эту точку зрения выразил американский математик, естествоиспытатель и философ Чарльз Сандерс Пирс (1839–1914): «По-видимому, в этом есть какая-то тайна, которую еще предстоит раскрыть».

Эрвин Шредингер в своей книге «Что такое жизнь с точки зрения физики» [132]¹⁹⁴ (1945) признавал, что суть открытия человеком законов природы вполне может быть недоступна человеческому разуму. Другой физик, Фримен Дайсон, также считает, что «мы, по-видимому, еще не приблизились к пониманию взаимосвязи между физическим и математическим мирами». К словам названных ученых остается только добавить высказывание Эйнштейна: «Самое непостижимое в этом мире то, что он постижим» (ср. также [129]¹⁹⁵).

Лауреат Нобелевской премии по физике Юджин Пол Вигнер, обсуждая в 1960 г. непостижимую эффективность математики в естественных науках в статье под тем же названием, не дал никакого объяснения и ограничился лишь констатацией спорного вопроса:

Математический язык удивительно хорошо приспособлен для формулировки физических законов. Это чудесный дар, который мы не понимаем и которого не заслуживаем. Нам остается лишь благодарить за него судьбу и надеяться, что и в будущих своих исследованиях мы сможем по-прежнему пользоваться им. Мы думаем, что сфера его применимости (хорошо это или плохо) будет непрерывно возрастать, принося нам не только радость, но и новые головоломные проблемы. ([96*]¹⁹⁶; см. [133]¹⁹⁷, с. 197.)

Последние из приведенных здесь «объяснений» носят скорее характер апологий. Они мало что говорят по существу, но их выразительный язык наводит на мысль, что авторы «объяснений» пребывают в неведении относительно причин непостижимой эффективности математики.

Сколь бы удовлетворительным или неудовлетворительным ни было любое объяснение эффективности математики, важно отчетливо сознавать, что природа и математическое описание природы не одно и то же, причем различие обусловлено не только тем, что математика представляет собой идеализацию (ср. [4]¹⁹⁸ или [134]¹⁹⁹). Математический треугольник, несомненно, отличается от физического треугольника. Но математика отходит от природы еще дальше. В V в. до н.э. Зенон Элейский сформулировал несколько апорий, или парадоксов. Каковы бы ни были его мотивы, первая же из апорий Зенона великолепно иллюстрирует различие между математической концептуализацией и опытом. Первая апория Зенона утверждает, что бегун никогда не сможет добежать до конца дистанции, так как для этого ему

¹⁹⁴ Шредингер Э. Что такое жизнь с точки зрения физики? – М.: ИЛ, 1947.

¹⁹⁵ Дайсон Ф. Будущее воли и будущее судьбы. – Природа, 1982, № 8, с. 60–70.

¹⁹⁶ Wigner E.P. The Unreasonable Effectiveness of Mathematics. *Com. Pure and Appl. Math.*, 1960, 13, 1–14. [Русский перевод: Вигнер Е. Непостижимая эффективность математики в естественных науках. – В кн.: Вигнер Е. Этюды о симметрии. – М.: Мир, 1971, 182–198; также: УФН, т. 94, вып. 3, 1968, с. 535–546; в кн.: Проблемы современной математики. – М.: Знание, 1971, с. 22–33.]

¹⁹⁷ Вигнер Ю. Этюды о симметрии. М.: Мир, 1971.

¹⁹⁸ Манин Ю.И. Математика и физика. – М.: Знание, 1979.

¹⁹⁹ Дайсон Ф. Математика и физика. – УФН, т. 85, вып. 2, 1965, с. 351–364; Математика в физических науках. – В кн. [137], с. 110–127.

необходимо сначала преодолеть $1/2$ дистанции, затем $1/2$ оставшейся половины, затем $1/2$ половины оставшейся половины и т.д. Следовательно, всего бегуну необходимо преодолеть

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

дистанции. Но чтобы преодолеть бесконечно большое число отрезков, бегуну, по мнению Зенона, необходимо затратить бесконечно большое время.

Одно из физических решений, причем наиболее очевидное, этого парадокса состоит в том, что бегун преодолеет всю дистанцию за конечное число шагов. Но если принять математический анализ апории, проделанный Зеноном, то окажется, что на преодоление дистанции бегун должен затратить $1/2$ мин плюс $1/4$ мин плюс $1/8$ мин и т.д., а сумма всех этих промежутков времени в точности равна одной минуте. Такой анализ расходится с физическим процессом, но тем не менее приводит к тому же результату.

Возможно, человек ввел ограниченные и даже искусственные понятия и только таким способом сумел навести порядок в природе. Созданная человеком математика не более чем рабочая схема. Сама природа, возможно, отличается несравненно большей сложностью, или структура ее не обладает особой правильностью.²⁰⁰ Тем не менее математика остается непревзойденным методом исследования и описания природы, позволяющим овладеть ею. В тех областях, где математика эффективна, она представляет собой всё, чем мы владеем; если это и не сама реальность, то самое лучшее приближение к ней, какое только доступно для нас.

Хотя математика – творение чисто человеческое, тот путь, который она открывает нам к различным явлениям природы, приводит к результатам, превосходящим самые смелые ожидания. Как ни парадоксально, но именно абстракции, столь далекие от реальности, позволяют достичь столь многого. Возможно, что искусственное математическое описание не более чем сказка для взрослых, но сказка с моралью: человеческий разум обладает огромной силой, даже если эту силу не так-то легко объяснить,

За успехи математики заплачено определенной ценой, и эта цена – количественный подход к миру: мы рассматриваем его с точки зрения меры, веса, продолжительности и тому подобных понятий. Такое описание может давать о богатом и разнообразном опыте не более полное представление, чем рост человека о человеке. В лучшем случае математика описывает некоторые явления природы, но математические символы передают далеко не всё.

Не следует забывать, что математика рассматривает простейшие понятия и явления физического мира. Она имеет дело не с человеком, а с неодушевленной природой. Явления неодушевленной природы обладают повторяемостью, и математика может описывать их. Но в экономике, политике, психологии, а также в биологии математика пока приносит существенно меньшую пользу. Даже в физике математика имеет дело с упрощениями, лишь касающимися реальности, подобно тому как касательная лишь соприкасается с кривой и приближенно ее передает. Имеет ли орбита Земли, обращающейся вокруг Солнца, форму эллипса? Нет. Земную орбиту можно считать эллиптической только в том случае, если Землю и Солнце считать точками и пренебречь влиянием всех остальных тел во Вселенной. Повторяется ли из года в год продолжительность зимы, весны, лета и осени? Вряд ли. Они повторяются, лишь если их продолжительность оценивать приближенно, т.е. так, как только и может их оценить человек.

Станем ли мы отказываться от математики лишь по той причине, что не понимаем, почему она так эффективна в описании природы? Хевисайд как-то заметил: «Стану ли я отказываться от обеда только потому, что не до конца понимаю процесс пищеварения?» Опыт опровергает сомневающихся. Самоуверенные отвергают рациональные объяснения. При всем нашем почтении к социологии и философии, прекрасно понимая, что математика затрагивает далеко не все аспекты нашей жизни, мы, однако, не можем не признать одной простой истины: успехи математики как источника знания затмевают ее неудачи. И знания, даваемые математикой, основаны не просто на голословных утверждениях о ее правильности – они ежедневно и ежечасно подвергаются проверке в каждом работающем радиоприемнике или атомной

²⁰⁰ **Яглом:** См. примечание 17 к гл. X и книгу [69: Mandelbrot B. The Fractal Geometry of Nature. – San Francisco: Freeman, 1982.] ^{X-17}**Яглом:** Не останавливаясь подробно, упомянем лишь о методологических установках яркой и пользующейся известностью книги Б. Мандельброта [69], которые кратко (и не совсем точно) можно охарактеризовать как утверждение о том, что в реальном мире мы чаще всего встречаемся именно с нигде не дифференцируемыми («изломанными») функциями, а «гладкие» функции представляют собой не более чем идеализированное описание негладких.

электростанции, в предсказании солнечных и лунных затмений, в тысячах других явлений, происходящих в лабораториях или в повседневной жизни.

Математике доступны лишь наиболее простые проблемы физического мира, но именно в ней эти проблемы находят полное решение. Вера в могущество человека отчасти зиждется на той силе, которой наделяет его математика – она помогает человеку покорять природу и тем облегчает его ношу. Одержанными математикой победами человек может по праву гордиться.

Вопрос о том, почему математика столь эффективна, представляет не только чисто академический интерес. Если мы используем математику в технике, то в какой степени можно полагаться на нее в расчетах и проектах? Можно ли спроектировать мост с помощью теории, опирающейся на бесконечные множества или аксиому выбора? Не обрушится ли такой мост? К счастью, инженерные проекты обычно основаны на применении теорем, столь надежно подкрепленных накопленным ранее опытом, что их использование не вызывает сомнений. Многие инженерные проекты умышленно предусматривают большой запас прочности. Например, при строительстве мостов используются такие материалы, как сталь, хотя прочность материалов нам не известна досконально. Чтобы компенсировать возможные неточности, инженеры вводят «коэффициент незнания» – используют более прочные кабели и балки, чем того требует теория. Но в тех случаях, когда речь идет о проекте сооружения, не возводившегося никогда ранее, необходимо учитывать и надежность применяемой математики.²⁰¹ В таких случаях разумная осторожность подсказывает не приступать к строительству сооружения прежде, чем все расчеты не будут проверены на модели, выполненной в уменьшенном масштабе.

В этой главе мы поставили перед собой задачу попытаться наметить какой-то выход из того затруднительного положения, в котором оказались математика и ее «жрецы». Единой, общепринятой математики не существует, поэтому мы не стали бы рекомендовать в качестве возможного выхода перебор множества различных путей, отстаиваемых теми или иными группами: избрать такой «любовой» подход к решению проблемы означало бы воспрепятствовать достижению главной цели математики – способствовать прогрессу науки. Именно этой высокой целью мы и рекомендовали бы воспользоваться как эталоном. Здесь мы достаточно подробно обсудили связанные с этим проблемы и спорные вопросы.

Но хотя акцент на приложениях к естественным наукам представляется наиболее разумным курсом дальнейшего развития математики, эта программа отнюдь не исключает и другие заслуживающие внимания и вполне разумные цели в рамках самой математики. Мы отмечали (гл. XIII), что развитие прикладной математики требует основательной и разнообразной поддержки: абстракции, обобщения, строгого обоснования и усовершенствования существующих методов. Кроме того, вполне оправдана деятельность в области оснований математики, не дающая прямого выхода в математику, но доказавшая свою полезность в процессе естественнонаучных исследований. Конструктивистская программа интуиционистов, хотя те исходили из намерения заменить лишние смысла чистые теоремы существования, приводит к методам вычисления величин, о которых чистые теоремы существования сообщают нам лишь то, что эти теоремы существуют. Приведем один старый пример. Евклид доказал, что отношение площади круга к квадрату его радиуса одинаково для всех кругов (это отношение обычно обозначается греческой буквой π). Тем самым Евклид доказал чистую теорему существования. Но если мы хотим вычислить площадь какого-нибудь круга, то для этого нам необходимо знать, чему равно π . К счастью, приближенный метод вычисления π , предложенный Архимедом, и некоторые разложения в ряды, полученные впоследствии, позволили найти π задолго до того, как интуиционисты бросили вызов чистым теоремам существования. Разумеется, возможность вычисления числа π необычайно важна. Аналогично возникает необходимость и в вычислении других величин, относительно которых пока доказано лишь то, что они существуют. Следовательно, конструктивистская программа вполне заслуживает внимания.

Однако исследования в области оснований математики ценны и тем, что открывают потенциальную возможность прийти к какому-нибудь противоречию. Непротиворечивость математики не доказана, и открытие противоречия или заведомо абсурдной теоремы позволило

²⁰¹ **Яглом:** Разумеется, ненадежность здесь может быть связана, скажем, с неполным знанием начальных условий фигурирующего в решении задачи дифференциального уравнения или в неопределенности коэффициентов уравнения (связанных с физическими характеристиками сооружения), но никак не с теми относящимися к основам математики полуфилософскими трудностями, которым посвящены гл. IX–XII.

бы по крайней мере раз и навсегда разрешить эту проблему, которая поглощает сегодня немало времени и энергии некоторых математиков.

Наш обзор современного состояния математики вряд ли может пробудить чувство успокоенности. Математика лишилась своей истинности. Ныне она уже не является независимой, абсолютно надежной и прочно обоснованной областью знаний. Большинство математиков заявили о своей преданности естествознанию – акт похвальный в любой период истории, но особенно в тот момент, когда естественнонаучные приложения могут сыграть роль путеводной нити в поиске разумного направления в развитии математики. Замечательная точность и эффективность математики в описании реального мира по-прежнему ждут своего объяснения.

Несмотря на все свои недостатки и ограниченные возможности, математике есть чем гордиться. Она была и остается высшим интеллектуальным достижением и наиболее оригинальным творением человеческого духа. Музыка может возвышать или умиротворять душу, живопись – радовать глаз, поэзия – пробуждать чувства, философия – удовлетворять потребности разума, инженерное дело – совершенствовать материальную сторону жизни людей. Но математика способна достичь всех этих целей. Если же говорить о возможностях человеческого разума, то математики немало потрудились, чтобы доказать, сколь высокую надежность результатов способен обеспечить человеческий разум. Не случайно математическая точность вошла в поговорку. Математика по-прежнему остается эталоном самого надежного и точного знания, которого мы только в состоянии достичь.

Все свершения математики – это свершения человеческого разума. Показав, на что способен человек, математика вселила в людей смелость и уверенность, позволившие им вплотную взяться за разгадку ранее, казалось бы, неприступных тайн космоса, лечение страшных болезней, количественный анализ проблем, относящихся к экономике и устройству человеческого общества, что позволяет надеяться на дальнейший прогресс человечества. В решении этих проблем математика может оказаться более эффективной или менее, но с ней мы связываем определение надежды на успех.

Математика таит в себе ценности не меньшие, чем любое другое творение человеческого духа. Ценности эти нелегко воспринимаются, им не всегда воздают должное, но, к счастью, ими пользуются. Познать их труднее, чем, скажем, ценности музыки, однако того, кто сумеет преодолеть нелегкий путь познания, ждет богатое вознаграждение; в этих ценностях сосредоточено всё, что отличает лучшие творения человеческого духа. Ценности, воплощенные в математике, поистине неисчерпаемы; единственный вопрос, который может здесь возникнуть, – это вопрос о степени их важности. На этот вопрос каждый сам должен найти ответ, так как многое зависит от индивидуальных суждений, мнений и вкусов.

Математика – это высокий образец достоверного знания, идеал определенности, к которому мы будем стремиться и впредь, даже если он и недостижим. Достоверность вполне может оказаться не более чем призраком, манящим и всё время ускользающим. Но идеалы, даже недостижимые, обладают притягательной силой и ценностью. Справедливость, равноправие или бог – идеалы. Правда, во имя бога люди убивали себе подобных, а справедливость далеко не всегда торжествует. И всё же эти идеалы представляют собой главный итог многовекового развития цивилизации. Так обстоит дело и с математикой, даже если она всего лишь остается идеалом. Возможно, созерцание идеала позволяет нам с большей уверенностью выбирать направление, которым необходимо следовать для достижения истины.

Человек – песчинка в мироздании. Мы странники в бескрайних просторах Вселенной, беспомощные перед разгулом природных стихий, зависящие от них и в получении пищи, и в удовлетворении других потребностей. Человек взирает на загадочную, быстро меняющуюся, бесконечную Вселенную смущенный, озадаченный и даже испуганный собственной незначительностью. Как сказал Паскаль²⁰²,

²⁰² **Яглом:** Паскаль писал эти слова в XVII в. В настоящее время физика смело излагает свои позиции в вопросе о поведении Вселенной в ближайшей окрестности (во времени превышающей всего лишь величину порядка 10^{-33} с) так называемого Большого взрыва, от которого астрофизики датируют существование Вселенной с привычным нам «пространством-временем» (ср., например, книги [135: Вайнберг С. Первые три минуты. – М.: Энергоиздат, 1981; Силк Дж. Большой взрыв. – М.: Мир, 1982; Фундаментальная структура материи (под ред. Дж. Малви). – М.: Мир, 1984.] или статью [136: Долгов А.Д., Зельдович Я.Б. Вещество и антивещество во Вселенной. – Природа, 1982, № 8, с. 33–45]); будущее Вселенной астрофизики также прогнозируют в очень больших пределах времени – почти до ее (гипотетического) «конца».

...ибо что такое человек во Вселенной? Небытие в сравнении с бесконечностью, всё сущее в сравнении с небытием, среднее между всем и ничем. Он не в силах далее приблизиться к пониманию этих крайностей – конца мироздания и его начала, непреступных, скрытых от людского взора непроницаемой тайной, и равно не может постичь небытие, из которого возник, и бесконечность, в которой растворяется. ([119]²⁰³, с. 123.)

Монтень и Гоббс, по существу, утверждали то же, только иными словами. Человек одинок и слаб, а век его короток. Он жертва непредвиденного стечения обстоятельств.

Наделенный органами чувств, возможности которых весьма ограничены, и рассудком, позволяющим анализировать воспринимаемую органами чувств информацию, человек начал проникать в окружающие его тайны природы. Используя данные непосредственного наблюдения или результаты специально поставленных экспериментов, он сформулировал определенные аксиомы и воспользовался своей способностью мыслить. Он стремился во всем найти порядок. Целью человека было построить систему знаний, способную противостоять мимолетной смене ощущений и послужить основой для познания – и покорения – окружающего мира. Один из значительных итогов его деятельности, продукт его разума – математика. Наша наука не идеальный алмаз – возможно, даже постоянная полировка не позволит ей избавиться от всех изъянов. Тем не менее математика была и остается самой надежной нашей связью с миром чувственного восприятия, и, хотя мы знаем, что она лишена прочных оснований (что не может не вселять в нас тревогу), она тем не менее по-прежнему является драгоценнейшим украшением нашей интеллектуальной жизни, которое следует беречь. Математика по праву занимает свое высокое место в сокровищнице человеческого разума и, несомненно, останется там, даже если более детальные исследования обнаружат в ней новые изъяны.²⁰⁴ Алфред Норт Уайтхед некогда сказал: «Нельзя не признать, что занятие математикой – ниспосланное богами безумие человеческого духа». Безумие? Вполне возможно – но, несомненно, ниспосланное богами.

²⁰³ Ларошфуко Ф. де. Максимумы. Паскаль Б. Мысли, Лабрюйер Ж. де. Характеристики. – М.: Художественная литература, 1974.

²⁰⁴ **Яглом:** Ср. с принадлежащей Г. Вейлю (в статье «Место Феликса Клейна в математической современности», 1930) характеристикой той роли, какую играет математика в человеческой культуре ([124: Яглом И.М. Герман Вейль. – М.: Знание, 1967], с. 11). [Названная статья намечена к публикации в подготавливаемом издательством «Наука» сборнике научных статей Вейля и в сборнике его научно-популярных статей.]

Научно-популярное издание
«Мысли об Истине»
Выпуск № 21
Сформирован 1 сентября 2014 года

Все читатели приглашаются принять участие в создании альманаха МОИ и присылать свои статьи и заметки для этого издания по адресу: Marina.Olegovna@gmail.com. Если присланные материалы будут соответствовать направлению Альманаха и минимальным требованиям информативности и корректности, то они будут опубликованы в нашем издании.

Основной вид существования Альманаха МОИ – в виде PDF-файлов в Вашем компьютере. Держите все выпуски МОИ в одной папке. Скачать PDF-ы можно с разных мест в Интернете, и не важно, откуда номер скачан. В Интернете нет одной фиксированной резиденции МОИ.

Содержание

<i>Моррис Клайн. Утрата определенности (главы VIII–XV)</i>	2
VIII. Нелогичное развитие: у врат рая	2
IX. Изгнание из рая: новый кризис оснований математики.....	21
X. Логицизм против интуиционизма	36
XI. Формализм и теоретико-множественные основания математики	59
XII. Бедствия.....	70
XIII. Математика в изоляции	86
XIV. Куда идет математика?	109
XV. Авторитет природы	125
Содержание	146