NATURA CUPIDITATEM INGENUIT HOMINI VERI VIDENDI
Marcus Tullius Cicero
(Природа наделила человека стремлением к познанию истины)

Мысли
Об
Истине

Альманах «**МОИ**»
Электронное издание, **ISBN 9984-688-57-7**

Альманах «Мысли об Истине» издается для борьбы с лженаукой во всех ее проявлениях и в поддержку идей, положенных в основу деятельности Комиссии РАН по борьбе с лженаукой и фальсификацией научных исследований. В альманахе публикуются различные материалы, способствующие установлению научной истины и отвержению псевдонаучных заблуждений в человеческом обществе.

Альманах издается с 8 августа 2013 года
Настоящая версия тома выпущена **2017-09-05**

Предисловие М.О. Ипатьевой

В настоящем выпуске альманаха МОИ публикуется ряд статей Владимира Андреевича Сизенова, старшего преподавателя Могилевского государственного университета продовольствия (Белоруссия) и предваряющий их доклад (1923 г.) А.П. Котельникова.

В.А. Сизенов 28 апреля 2014 года обратился в альманах МОИ с предложением опубликовать статью «Геометрия пространства скоростей», однако более подробное знакомство с предметом привело к идее публикации не одной статьи, а целого тематического сборника.

Концепция Сизенова, которую он сам именует «Гипотезой», не дав ей какого-нибудь более индивидуального названия, описывает ту же область реального мира, которая описывается специальной теорией относительности (СТО), и поэтому «Гипотеза» оказывается некоторой альтернативой к СТО.

До появления СТО мир рассматривался (в т.н. «классической» или «ньютоновской» механике) как помещенный в бесконечное трехмерное евклидовое пространство с течением (абсолютного) времени от одной бесконечности в другую. Назовем здесь такую модель мира моделью **А**.

Появление СТО ввело другую модель мира (назовем ее моделью **В**), в которой вместо евклидового пространства имеется пространство-время Минковского, все инерциальные системы отсчета равноправны, абсолютного времени нет.

На СТО с самого момента ее появления производились яростные нападки. Подавляющее большинство нападающих требовали возврата от модели **В** к модели **А**, а аргументация их была чрезвычайно примитивна и вульгарна (см., например, выпуск MOI_07). В результате многолетнего отрицания этих нападок в течение более, чем столетия, вокруг СТО сложилось такое положение, что любое отступление от СТО стало автоматически рассматриваться как признак научной крамолы; СТО превратилась из науки в схоластику, а научный прогресс в этой области стал считаться остановившимся.

Я многократно декларировала (см., например, Предисловие к выпуску MOI_02), что возврата к модели **А** быть не может (потому что она – порождение отражающих механизмов мозга – «хронотоп», не совпадающий с реальным миром – «темпомундусом»). Однако столько же раз я дкларировала: мы не имеем гарантии, что модель **В** описывает темпомундус с предельной точностью, что невозможна какая-то третья модель **С**, описывающая реальный мир еще более точно, чем модель **В** (СТО).

«Гипотеза» В.А. Сизенова как раз и представляет собой один вариант такой «уточняющей» модели **С**. Правильны или неправильны эти уточнения – в конечном счете, как при всякой физической теории, должна решать лишь экспериментальная проверка.

Марина Ипатьева

27 июня 2014 года

Предисловие В.А. Сизенова

В основе появления статей по инерциальным системам отсчёта лежит элементарное любопытство. Однажды я задался вопросом: «Почему материальные тела движутся по инерции?».

Ответ стал искать по стандартному алгоритму. Вначале определился с необходимостью и достаточностью начальных условий, то есть отсёк всё лишнее.

Движение материального тела можно рассматривать как упорядоченное перемещение в пространстве элементарных частиц, образующих это тело. В первом приближении элементарную частицу можно подменить материальной точкой. Для того чтобы материальная точка массой m начала двигаться в пространстве, к ней нужно приложить импульс силы $F \cdot \Delta t$. Природа силы, массы и времени в данном случае меня не интересует. Для манипуляций с этими величинами достаточно использовать известные соотношения классической механики.

Сложнее с пространством. У пространства в виде «абсолютной пустоты» физические свойства отсутствуют, так как оно «схлапывается» в ничто. Если «абсолютной пустоте» гипотетически придать свойство протяжённости, то о скорости материальной точки в таком пространстве нельзя сказать ничего определённого. Пространство же в виде материальной среды обладает свойством протяжённости, и движение материальной точки можно объяснить взаимодействием (например, обменом энергией) с этой средой. Природа этого пространства меня в данном случае не интересует. Важно то, что в нём могут перемещаться материальные точки. Следовательно, пространство и движущуюся по инерции материальную точку можно рассматривать как равновесную саморегулирующуюся инерциальную систему. То есть, материальная точка движется по инерции за счёт баланса между излучённой в пространство энергией и полученной обратно в виде отклика.

Ну что ж, модель, объясняющая движение тела по инерции, вроде бы построена. Осталось уточнить некоторые детали.

Если к материальной точке приложить конечный импульс силы, то инерциальная система перейдёт в новое состояние равновесия. Каждому такому состоянию будет соответствовать своя инерциальная система отсчёта (ИСО). Соответственно возникает вполне очевидный вопрос: «Что кроме скорости изменится при переходе инерциальной системы из одного равновесного состояния в другое?». Можно предположить, что изменится количество энергии, участвующей в обмене между материальной точкой и пространством. Однако, это не очевидно. Может быть, изменится скорость обмена энергией, что будет эквивалентно изменению масштаба времени для материальной точки? И это спорно. Возникает тупиковая ситуация. Однако к ответу на поставленный вопрос можно подойти и с другой стороны.

В реальном пространстве скорость материальной точки v изменяется от нуля до некоторой предельной величины c ($0 \le v < c$), что и является основанием для ввода противодействующей силы F_W. Математически эту силу можно определить следующей формулой:

$$F_W = f(v) \cdot F,$$

где F – сила, приложенная к материальной точке;

$f(v)$ – безразмерный коэффициент противодействия.

То есть можно предположить, что при переходе инерциальной системы из одного равновесного состояния в другое изменяется также и коэффициент противодействия изменению скорости.

Соответственно результирующая сила F_V, изменяющая скорость материальной точки, определится соотношением

$$F_V = (F - F_W) = F \cdot [1 - f(v)]. \qquad (1)$$

Отсюда для второго закона Ньютона можно записать соотношение

$$F \cdot dt = \frac{m \cdot dv}{1 - f(v)} \quad . \qquad (2)$$

Если $f(v) \equiv 0$, то соотношение (2) будет соответствовать второму закону Ньютона для классической механики, в которой скорость материальной точки может изменяться от нуля до бесконечности. Остаётся определиться с видом функции $f(v)$ для реального пространства. Проведя анализ соотношения (2) для случаев, при которых функция $f(v)$ имеет вид $\alpha \cdot v$ и $(\alpha \cdot v)^2$, где α – коэффициент, я надолго забыл о проделанной работе.

В конце 2006 года мне представилась возможность опубликовать одну из моих статей в материалах какого-то научного симпозиума. Я быстро доработал заготовку, касающуюся исследования формулы (2), до статьи, но в материалах научного симпозиума она так и не появилась. Тогда я обратился в редакцию университетского вестника, где мою статью согласились напечатать, разумеется, только при наличии положительной рецензии.

Несмотря на все старания, получить рецензию я так и не смог. Основной аргумент потенциальных рецензентов был один: «Статья противоречит специальной теории относительности (СТО), поэтому положительную рецензию я дать не могу, а отрицательную вроде бы и писать не на что». Реально мне помог только кандидат физико-математических наук Соболевский А.Н.. Он предоставил мне подборку журнальных статей по СТО, скопированную из различных источников.

После ознакомления с монографией Угарова В. А. «Специальная теория относительности», я доработал статью. Во-первых, ограничился только соотношением

$$F_V = F \cdot [1 - (\alpha \cdot v)^2] \quad . \tag{3}$$

Во-вторых, более детально проанализировал формулу скорости материальной точки

$$v = c \cdot \operatorname{th} \chi \quad , \tag{4}$$

где c – предельная скорость;

$\chi = \dfrac{F \cdot t}{m \cdot c}$ – гиперболический угол.

Аналогичная формула скорости материальной точки в неявной форме имеется и в монографии Угарова, но гиперболический угол в ней не определён.

Доработанную статью я отправил на рецензию в институт физики Белорусской академии наук. Из института физики я довольно быстро получил ответ, в котором мне рекомендовалось дополнительно рассмотреть преобразования Лоренца. Я добавил в статью преобразования Лоренца и снова отослал её в институт физики. Полученная из института рецензия категорически запрещала публикацию моей статьи в научной печати.

Разумеется, я ожидал, что рецензия будет отрицательной. Но из отрицательной рецензии, тоже можно кое-что извлечь. Во-первых, критики моей статьи фактически не было. Значит с математикой всё в порядке. Во-вторых, в рецензии отмечалось, что я занялся направлением, отвергнутым наукой сто лет назад. Значит, если покопаться, то по тематике моей статьи можно кое-что найти. Но возникал вопрос: «Что делать дальше?».

Я прикинул вероятность того, насколько гипотеза, изложенная в моей статье, соответствует реальности, и оценил эту вероятность выше пятидесяти процентов. Кроме того, из гипотезы следовало, что плоскость орбиты Земли по отношению к направлению движения Солнечной системы должна иметь положение близкое к перпендикулярному. Я заглянул в атлас звёздного неба, расположение Млечного пути соответствовало гипотезе. Значит, имеет смысл потратиться. Я разбил статью на две части и отправил первую половину в платный журнал. Вторую половину статьи я отправил после опубликования первой.

Но оставался ряд нерешённых задач. Во-первых, я рассмотрел движение материальной точки только по прямой. Нужно было рассмотреть движение материальной точки также и на плоскости. Во-вторых, полученные в статье преобразования координат были «сырыми» и требовали доработки. В-третьих, необходимо было определиться с геометрией.

В статье «Эффект Доплера» я рассмотрел движение материальной точки на плоскости и получил соотношения для предельных скоростей. В следующей статье «Преобразования координат» я провёл сравнение моделей СТО и гипотезы, изложенной в предыдущих статьях, а также получил более полные соотношения для преобразования координат.

Наступила очередь геометрии, но за неё мне браться не хотелось. Я прекрасно понимал, что критики будет больше, чем достаточно. И, кроме того, был риск «утонуть» во всевозможных теоремах, аксиомах и определениях. Но математика опережает развитие науки, значит, имеется вероятность того, что и для моей гипотезы найдётся что-нибудь подходящее. Проконсультировался с преподавателями кафедры математики. Из их рекомендаций я понял, что для моей гипотезы, скорее всего, подойдёт геометрия Минковского, а в геометрию Лобачевского лучше и не заглядывать: «Там такие математические дебри!».

Но к моей гипотезе, в которой основную роль играет пространство скоростей, практически идеально подошла именно геометрия Лобачевского (гиперболическая геометрия). В итоге были написаны статьи «Геометрия Лобачевского и преобразования координат» и «Преобразования Лобачевского-Лоренца», в которых соотношения гипотезы были выведены с помощью математического аппарата, разработанного Лобачевским Н.И. и Яношем Больяи. При создании гиперболической геометрии Лобачевский и Больяи использовали свои индивидуальные методы, отражающие их стиль мышления. Благодаря этому, труды Лобачевского и Больяи взаимно дополняют и обогащают друг друга.

Как только я определился с геометрией, то в интернете нашлись и работы по моей тематике. Одним из первых мысль о возможной связи геометрии Лобачевского с принципом относительности высказал В. Варичак. Но, к сожалению, с его трудами мне не удалось ознакомиться. Фундаментальной работой по этой вопросу является доклад А.П. Котельникова «Принцип относительности и Геометрия Лобачевского», в котором он методами проективной геометрии показал, что законы классической механики определяются геометрией трёхмерного евклидова пространства, а законы специальной теории относительности геометрией трёхмерного пространства Лобачевского. В своём докладе он методами проективной геометрии вывел соотношение для скорости, аналогичное формуле (4), в котором интерпретация гиперболического угла такая же, как и в моей гипотезе.

Любая наука постигается намного легче, если она основана на конкретных примерах. Поэтому я также написал статью «Геометрия пространства скоростей», в которой с привязкой к пространству скоростей кратко изложил основные положения гиперболической геометрии. Надеюсь, что эта небольшая статья поможет изучающим геометрию Лобачевского прорваться сквозь «математические дебри».

Владимир Сизенов

26 июня 2014 года

Котельников[1] *А.П. (Москва).*
Принцип относительности и Геометрия Лобачевского[2]

§1.


А.П. Котельников

Уже в первых работах, посвященных принципу относительности и появившихся вскоре после знаменитого мемуара Einstein'a «Zur Elektrodynamik bewegter Korper», мы находим намеки на то, что Геометрия Лобачевского при изложении этого принципа и при решении выдвинутых им проблем может оказаться весьма полезной.

Так H. Minkowski в своем классическом мемуаре: «Die Grundgleichungen für die elektromagnetische Vorgange in bewegten Korper»[3], доказывая ковариантность ур. Maxwell'a–Hertz'a[4] для Лоренцова преобразования, представляет это последнее как вращение на мнимый угол в плоскости x, t и полагает при этом $v/c = g = \mathrm{i}\ \mathrm{tg}\ \mathrm{i}\psi = \mathrm{th}\ \psi$, т.е. выражает скорость при помощи гиперболического тангенса.

Воспользовавшись этим выражением скорости, A. Sommerfeld[5] показывает,[6] что теорема сложения скоростей Einstein'a может быть весьма просто представлена треугольником сферы с мнимым радиусом.

«Но», говорит Dr. V. Varićak,[7] «гиперболическая геометрия есть мнимое отображение сферической, как это уже знали Лобачевский и Bolyai»[8], и таким образом замечание A. Sommerfeld'a приводит к мысли о возможности применения Геометрии Лобачевского к принципу относительности.

---

[1] **МОИ:** Александр Петрович Котельников (1865.10.08 Казань – 1944.03.06 Москва) – математик и механик, профессор, доктор технических наук, лауреат Сталинской премии (второй степени, 1943). Сын профессора Казанского университета (помощника Лобачевского) Петра Ивановича Котельникова (1809–1879); докторская диссертация на тему «Проективная теория векторов» в 1899 г. (34 года), после чего приглашен зав.кафедрой теоретической механики Киевского политехнического института. В 1904 г. избран зав.кафедрой чистой математики Казанского университета; с 1910 декан ф.-м. факультета в Казани; с 1914 вновь в Киеве, с 1924 и до конца жизни в Москве (зав.кафедрой математики Московского высшего технического училища и курсы теоретической механики в других ВУЗах Москвы).

[2] Эта статья представляет собой доклад, читанный 29 апр. 1923 г. в Москве – Мат. Общ. и затем повторенный 16 сент. 1923 г. в Киеве на публичном соединенном заседании научно-исследовательских кафедр, посвященном принципу относительности, и 25 февраля 1926 г. в Казани на публичном заседании Казанского Физ. Мат. Общ. в день празднования столетия неэвклидовой Геометрии.

[3] Annalen der Physik. Vierte Folge. B. 17. 1905 p.p. 891–921.

[4] Nachrichten von der Köngl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Math-Phys. Klasse aus dem Jahre 1908.

[5] **МОИ:** Arnold Johannes Wilhelm Sommerfeld (1868.12.05 Кенигсберг – 1951.04.26 Мюнхен); с 1894 – ассистент Феликса Клейна в Геттингене; с 1900 в Аахене; с 1906 в Мюнхенском университете.

[6] A. Sommerfeld. *Über die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten in der Relativtheorie*. Physikalische Zeitschrift. 10 Jahrgang 1909 pp. 826–829.

[7] **МОИ:** Vladimir Varićak (писалось также Varičak: 1865.03.01 – 1942.01.17) – хорватский математик, профессор Загребского университета с 1899 года и до смерти (до Первой мировой войны это Австро-Венгрия, после – Югославия).

[8] За первыми работами V. Varićak'a в Physikalische Zeitschrift, 11, 1910 «Anwendung der Lobatschefskijschen Geometrie in der Relativtheorie» p. 93–96; «Die Relativtheorie und Lobatschefskijsche Geometrie» 287–293; «Die Reflexion des Lichtes an bewegten Spiegeln» p. 586–587; «Интерпретација Теорије релативности у Геометрiji Лобачевского» Глас Српске Кралевске Академiji, стр. 211–255, 1911; «Über die nichteuclidische Interpretation der Relativtheorie», Jahresbericht der Deutschen Math. Ver. 2103. 1912 p. 103–127 последовал целый ряд статей и заметок. Все эти работы резюмированы в книге: «Dr. V. Varićak Darstellung der Relativitätstheorie in dreidimensionalen Lobatschefskijschen Raume», 1924, 1–104.

G. Herglotz[9] пользуясь простейшими фактами неевклидовой Геометрии, которая, говорит он: «вообще в вопросах принципа относительности, напр. при сложении скоростей, может быть весьма полезна», для того, чтобы найти все возможные, согласные с принципом относительности движения твердого тела, т.е. для решения задачи, формулированной, но не вполне решенной M. Born'ом.[10]

Ряд аналогий между Геометрией Лобачевского и принципом относительности, замечание A. Sommerfeld'a и подстановка Г. Минковского v/c = th ψ натолкнули V. Varićak'a на мысль о неевклидовом истолковании принципа относительности. Результаты своих исследований он формулирует таким образом:

> «если положить в основу неевклидову терминологию, то не только существенным образом упрощаются формулы теории относительности, но они допускают также геометрическое истолкование, совершенно аналогичное интерпретации классической теории в Евклидовой Геометрии. И эта аналогия простирается местами так далеко, что можно оставить неизменной и словесную формулировку теорем с той лишь разницей, что надо заменить Евклидовы образы соответственными образами пространства Лобачевского с параметром $c = 3\cdot10^{10}$ сант.».

В своих многочисленных заметках и мемуарах V. Varićak дает много примеров, иллюстрирующих его мысль: при помощи построений в пространстве Лобачевского он весьма просто представляет закон сложения скоростей Einstein'a, принцип Doppler'a, аберрацию света, отражение света от движущегося зеркала и т.д.

В прекрасном мемуаре «О геометрических основаниях Лоренцовой группы» F. Klein[11], показав, что группа Лоренцовских преобразований есть проективная группа, оставляющая инвариантной квадратичную форму $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$, тем самым устанавливает связь ее с группой преобразований пространства Лобачевского.

§2.

Таким образом, благодаря указанным работам математиков, обнаружилось, что Геометрия Лобачевского, которая до сих пор не имела никакого значения для физических теорий, должна играть важную роль в специальном принципе относительности. Это обстоятельство может показаться несколько странным, ибо различие между механикой Einstein'a и механикой Ньютона заключается только в том, что в первой скорость света считается абсолютно постоянной, но как в той, так и в другой предполагается, что явления окружающей нас природы происходят в пространстве Евклида. Естественно возникает вопрос: почему же, несмотря на то, что в основание как механики Einstein'a, так и механики Ньютона положено пространство Евклида, до сих пор при изучении классической механики, на протяжении столетий, никогда не ощущалось потребности ни в каких других геометрических построениях, кроме тех, которым учит нас Геометрия Евклида, между тем как не прошло и пяти лет после опубликования мемуара Einstein'a, как появились вполне определенные указания на то, что Геометрия Лобачевского является весьма подходящим орудием для изучения механики Einstein'a?

Мы получим ответ на этот вопрос, если, с одной стороны, обратимся к той изящной геометрической интерпретации, которую ввел в принцип относительности Г. Минковский, а с другой воспользуемся проективной Геометрией и теорией мероопределения, развитой A. Cayley[12] и F. Klein'ом в их классических мемуарах.

Пусть x, y, z, обозначают прямоугольные координаты пространства, а t – время. «Предметом нашего восприятия», говорит Г. Минковский,[13] «являются всегда места и времена, связанные между собой. Никто не замечал места иначе как в определенное время, и не замечал времени иначе как в определенном месте». Назовем систему значений x, y, z, t «мировой точкой». Многообразие всех мыслимых мировых точек x, y, z, t Г. Минковский называет «миром». Мир Г. Минковского это пространство четырех измерений.

---

[9] G. Hergotz «Über den von Standpunkt des Relativitätsprinzips aus als "starr" zu bezeichnenden Körper», Annalen der Physik. 4 Folge B. 31 pp. 393–415.

[10] M. Born. «Die Theorie des starren Elektrons in der Kinematik des Relativitätsprinzips». Annalen der Physik. 4 Folge B. 30 pp. 1–46.

[11] Сборник «Новые идеи в математике». № 5.

[12] **МОИ:** Артур Кейли (Кэли, 1821.08.16 – 1895.01.26) – кембриджский математик.

[13] Г. Минковский «Пространство и время». Новые идеи в математике, Сборник № 5.

Какова же структура этого пространства? Будет ли оно пространством постоянной кривизны, и если оно постоянной кривизны, то принадлежит ли оно к типу пространств Евклида, Римана или Лобачевского? Сказанное мною выше о значении Геометрии Лобачевского для принципа относительности может, пожалуй, внушить мысль, что этот мир Минковского и есть пространство Лобачевского. Такая догадка была бы, однако, несколько поспешной: мир Минковского – это пространство Евклида, но только особого вида. Как в нашем обыкновенном Евклидовом пространстве могут быть поверхности постоянной положительной, отрицательной или нулевой кривизны, так и в мире Минковского 4-х измерений могут быть построены 3-х мерные пространства любой постоянной кривизны, и то пространство Лобачевского, которое играет такую выдающуюся роль в принципе относительности, должно находиться где-то в 4-хмерном мире Г. Минковского.

Но где же именно?

Чтобы ответить на этот вопрос, мы должны припомнить некоторые основные положения теории мероопределения.

§3.

С начала XVII столетия, со времени появления Геометрии Декарта, преобладающее значение получила Аналитическая Геометрия, которая позволяла все свойства фигур, будут ли то свойства метрические или проективные, изучать при помощи Декартова метода координат. Этот метод, благодаря его универсальности и могуществу, привлек к себе внимание геометров и, опираясь на основные метрические понятия, давал возможность положить их в основание всей геометрии. Отодвинув т.о. на задний план изучение проективных свойств фигур, Аналитическая геометрия расширила наши геометрические представления введением понятия о мнимых точках, линиях и поверхностях и подготовила почву для дальнейшего развития проективной Геометрии. Мало по малу проективные свойства фигур снова стали привлекать к себе внимание геометров; их значение в геометрии увеличивалось всё более и более, пока, наконец, во второй половине прошлого столетия взгляд на роль в геометрии метрических и проективных свойств не изменился. В эту эпоху стало совершенно ясно, что подобно тому, как Декартова Геометрия дает возможность свести все свойства фигур к свойствам метрическим, так проективная дает возможность проективные свойства положить в основание всей геометрии. Но при этом обнаружилось, что, изучая с точки зрения проективной геометрии метрические свойства какой либо фигуры, мы должны вместе с ней рассматривать еще и другую фигуру постоянную, неизменную, неподвижную, одну и ту же во всех случаях, которую называют абсолютом. Исключительно абсолютом обусловливаются метрические свойства пространства.

Постараюсь объяснить, что служит абсолютом Евклидова пространства.

Давно уже было замечено, что многие, по-видимому различные, теоремы Геометрии, становятся тожественными, делаются видоизменениями одной и той же теоремы, если мы будем представлять себе, что параллельные между собой линии все сходятся в одной и той же бесконечно удаленной точке, и будем считать, что все бесконечно удаленные точки одной и той же плоскости лежат на одной и той же бесконечно удаленной прямой линии и все бесконечно удаленные точки пространства образуют бесконечно удаленную плоскость.

При такой точке зрения на каждой прямой линии есть только одна бесконечно удаленная точка, в которой она пересекает бесконечно удаленную плоскость. Основное метрическое понятие, связанное с прямой линией, расстояние между двумя ее точками, рассматривается в проективной геометрии как свойство фигуры, образованной тремя точками: двумя данными и бесконечно удаленной точкой прямой. Эта последняя и образует абсолют прямой линии Евклидова пространства.

Далее геометры обратили внимание на то, что разнообразные кривые, которые мы получаем, рассекая поверхность круглого конуса плоскостью, так наз. конические сечения, легко поддаются простой классификации, если мы воспользуемся бесконечно удаленной прямой плоскости.

Дело в том, что со всякой прямой, в том числе и с бесконечно удаленной, всякое коническое сечение пересекается в двух точках, но эти две точки могут быть различны, могут сливаться в одну, когда прямая касается конического сечения, и, наконец, будут мнимы, когда прямая с коническим сечением вовсе не встречается.

Если коническое сечение пересекается с бесконечно удаленной прямой в двух действительных точках, то оно имеет вид гиперболы, если оно встречается с бесконечно удаленной прямой в двух совпадающих точках, т.е. касается с ней, то оно обращается в параболу. Наконец коническое сечение третьего типа, эллипс, пересекается с бесконечно удаленной прямой в двух мнимых точках. Круг есть частный случай эллипса, и мы должны, следовательно, сказать, что и он пересекается с бесконечно удаленной прямой в двух мнимых точках.

Ряд геометрических фактов заставляет нас считать, что все круги плоскости пересекают бесконечно удаленную прямую в одних и тех же двух мнимых точках, которые и принято называть поэтому круговыми точками.

Работы французской школы геометров первой половины прошлого столетия выяснили, что основные метрические понятия плоскости самым тесным образом связаны с бесконечно удаленной прямой и мнимыми круговыми точками на ней. Расстояние между двумя точками A и B, угол между двумя прямыми l и m рассматриваются в проективной геометрии как свойства тех фигур, которые мы получим, присоединив к точкам A и B, или к прямым l и m круговые точки. Эти последние вместе с бесконечно удаленной прямой и образуют абсолют Евклидовой плоскости.

Подобным же образом оказалось, что при изучении геометрии трехмерного пространства полезно представлять себе, что все шаровые поверхности пересекаются с бесконечно удаленной плоскостью по одному и тому же мнимому кругу, который поэтому называют шаровым кругом. С точки зрения проективной геометрии метрические свойства какой-либо фигуры суть свойства сложной фигуры, составленной из нее и шарового круга. Этот круг вместе с бесконечно удаленной плоскостью, в которой он лежит, и служат абсолютом Евклидова пространства трех измерений.

§4.

Дальнейший шаг в развитии этих идей был сделан английским математиком A. Cayley.[14] Он дал по его словам «теорию расстояний» или, как принято теперь говорить, «теорию мероопределения». Эта теория заключается в том, что мы можем, вводя основные метрические понятия, взять за абсолют прямой линии не одну точку, а две, за абсолют плоскости не бесконечно удаленную прямую с круговыми точками на ней, а любое коническое сечение. Обобщенная таким образом геометрия прямой линии обращается в геометрию Евклидовой прямой, когда две точки абсолюта сливаются в одну. Обобщенная же геометрия плоскости превращается в геометрию Евклидовой плоскости или в геометрию сферы, если коническое сечение, принятое за абсолют, обращается в пару круговых точек или становится мнимым.

Сам A. Cayley, набросав в своем мемуаре на нескольких страницах теорию мероопределения, не останавливается на дальнейшем ее развитии и не касается следствий, из нее вытекающих. А между тем эти следствия имеют весьма большое значение для всей Геометрии.

Первым, обратившим внимание на значение небольшого мемуара A. Cayley, был F. Klein.[15] Упростив математическую сторону теории мероопределения, F. Klein показывает, что не только Геометрия Евклида и Геометрия сферы, но и Геометрия Римана и Лобачевского укладываются в геометрическую схему A. Cayley. Всё различие геометрии плоскости Евклида, Римана и Лобачевского обусловливается различием абсолютов этих трех типов плоскостей. Мы уже видели, что абсолютом Евклидовой плоскости служит прямая с двумя мнимыми точками на ней. Если же за абсолют мы примем коническое сечение, то получим плоскость Римана, когда оно будет мнимым, и плоскости Лобачевского, когда оно – действительно.

Теория мероопределения A. Cayley может быть распространена и на пространство трех измерений. Если мы за абсолют примем не шаровой круг, а поверхность второго порядка, то получим или Геометрию Лобачевского, или Геометрию Римана, смотря по тому, будет ли поверхность действительной или мнимой.

Надо однако заметить, что теория мероопределения дает возможность не только просто классифицировать уже хорошо изученные типы пространств, она идет гораздо дальше и позволяет строить схемы и новых пространств, еще не изученных. До сих пор математики мало обращали на них внимания, т.к. ни в самой Геометрии, ни в других науках в них не встречалось надобности. Но принцип относительности, его геометрическая интерпретация, предложенная Г. Минковским, заставляет нас создать, пользуясь теорией мероопределения, новые пространства, которые до сих пор еще не изучались, но которые должны теперь обратить на себя внимание геометров.

[14] «A sixth memoir upon quantics». Phil. Trans, of the Royal Society of London. Vol. CXLIX p. 61–90.

[15] «Über die sogenannte Nicht-Euclidische Geometrie». M.A.B. IV. p.p. 573–625.

§5.

Обращаясь к построению мира Г. Минковского и мира Ньютона, мы всегда в дальнейшем будем предполагать, что все наши построения происходят в пространстве проективном, в котором имеют место аксиомы проективной Геометрии.

Мы должны будем теперь войти в некоторые подробности теории мероопределения. Начнем с Геометрии прямой линии.

Для того, чтобы установить метрику прямой линии, мы должны иметь средство построить на прямой шкалу, откладывая по ней один за другим разные отрезки. Мы будем иметь возможность выполнить эту операцию, если на прямой нам будет задана квадратичная инволюция, которую мы будем называть абсолютной инволюцией и обозначать буквой *J*. Ее двойные точки образуют абсолют прямой.

Когда инволюция *J* задана, и мы имеем на прямой две точки *A* и *B*, то для того, чтобы от точки *B* отложить отрезок равный *AB*, находим точку B_1, соответствующую точке *B* в абсолютной инволюции *J*, и строим точку *D*, гармонично сопряженную с *A* относительно точек *B* и B_1: отрезок *BD* считается равным отрезку *AB*. Так же построим отрезок *DE* равный *BD,* отрезок *EF* равный *DE* и т.д. и мы получим шкалу, которая и может служить для измерения расстояний между двумя точками прямой.

Характер метрики, таким образом установленной на прямой, будет зависеть от рода абсолютной инволюции.

Если абсолютная инволюция параболическая и ее двойные точки совпадают в одну *C*, то в построенной параболической шкале *ABDE*...*C* каждые три рядом стоящие точки образуют с точкой *C* гармоническую систему. В этом случае, будем ли мы откладывать отрезки равные *AB* в сторону точки *B* или в сторону точки *A*, мы будем приближаться к точке *C*, никогда ее не достигая: у прямой будет одна бесконечно удаленная точка *C*. Прямую, на которой нанесена такая шкала, мы будем называть Евклидовой прямой (*E*). Абсолютом ее служит бесконечно удаленная точка *C*.

Расстояние *u* между двумя точками *GF* будет определяться формулой

$$u = (COEG) - (COEF), \tag{1}$$

где *O* есть начало шкалы и *E* единичная точка.

Если абсолютная инволюция *J* гиперболическая и двойные ее точки *C* и C_1 действительны и не совпадают, то, откладывая отрезок *AB* в сторону точки *B*, мы будем приближаться к одной из двух точек *C* или C_1, а откладывая его в сторону точки *A* – к другой. Но ни в том, ни в другом случае, как бы далеко мы ни продолжали этот процесс, мы никогда не дойдем ни до точки *C*, ни до точки C_1: у прямой будут две бесконечно удаленные точки *C* и C_1. Прямую, на которой нанесена такая гиперболическая шкала, мы будем называть прямой Лобачевского (*Л*). Ее абсолютом служат точки *C* и C_1.

Точки *C* и C_1 делят всю прямую на две части. Устанавливая метрику прямой Лобачевского, мы предполагали, что точки *A* и *B* лежат на одной и той же части, т.е. что пары точек *A* и *B, C* и C_1 не разделяют одна другую. Часть прямой, на которой лежат точки *A* и *B,* мы назовем реальной, другую же часть идеальной.

Расстояние между двумя точками *G* и *F* определяется в этом случае формулой:

$$u = \frac{1}{2k}\lg(OC_1GF) \quad , \tag{2}$$

в которой мы будем полагать k = 1.

Наконец, если абсолютная инволюция *J* будет эллиптической и ее двойные точки мнимыми, то после конечного числа операций откладывания отрезка *AB,* мы заполним всю прямую: прямая будет иметь конечную длину. Мы будем называть ее прямой Римана (*R*) и нанесенную на ней шкалу эллиптической. Абсолютом прямой Римана служат мнимые двойные точки инволюции *J*.

Расстояние *u* между точками *F* и *G* определяется в этом случае формулой

$$u = \operatorname{arctg}\,(COEG) - \operatorname{arctg}\,(COEF), \tag{3}$$

где *C, O, E* могут быть выбраны произвольно.

Формулы (1) и (3) могут быть рассматриваемы как частные случаи (2), когда точки *C* и C_1 совпадают или делаются мнимыми.

§6.

Для изучения явлений, происходящих вдоль одной и той же прямой линии, мы должны иметь две координаты – одну пространства x, а другую времени t, и для геометрической интерпретации этих явлений мы должны построить пространство двух измерений.

Мы построим Евклидову плоскость (чертеж 1).

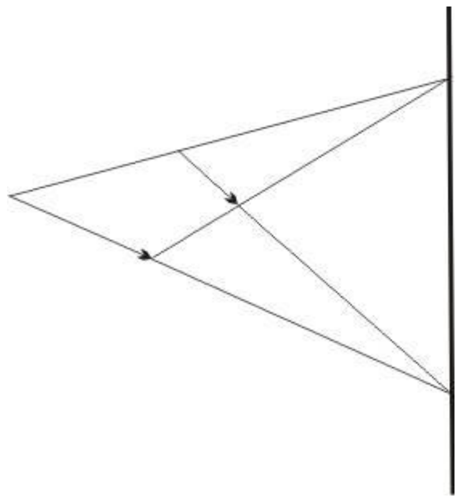
Возьмем в проективной плоскости произвольную прямую и назовем ее бесконечно удаленной прямой и построим в плоскости сначала аффинную Геометрию, опираясь на следующие определения:

Определение 1. Прямые, которые пересекаются в одной и той же точке бесконечно удаленной прямой, называются параллельными.

Определение 2. Четырехугольник, у которого противоположные стороны параллельны, называется параллелограммом.

Определение 3. Два вектора наз. равными, если, соединяя их начала и концы, мы получим параллелограмм.

Теорема Desargues'a дает возможность легко показать, что два вектора, порознь равные третьему, равны между собой, и затем распространить определение равных векторов на тот случай, когда они лежат на одной и той же прямой линии.



Чертеж 1.

При помощи определения 3 через каждую точку можно провести вектор равный данному и следовательно построить геометрическую сумму какого угодно числа векторов. Сумма не будет зависеть от точки, из которой начато сложение векторов, и потому очевидно, что операция сложения будет ассоциативна. Она будет также и коммутативна, ибо сложение двух векторов приводится к построению диагонали параллелограмма, стороны которого равны слагаемым векторам.

Определение 3 дает возможность, откладывая на прямой равные отрезки, построить шкалу, которая может служить для измерения расстояния между точками этой прямой. Нетрудно видеть, что эта шкала будет параболической тожественной с той, которую мы строили на прямой при помощи параболической инволюции: у шкалы будет только одна бесконечно удаленная точка, а именно точка пересечения прямой с бесконечно удаленной прямой. Самая прямая будет Евклидовой прямой.

Итак, все прямые плоскости будут Евклидовыми прямыми и все бесконечно удаленные точки их будут лежать на бесконечно удаленной прямой.

Шкалу, нанесенную на какой-нибудь прямой, можно перенести на любую прямую, параллельную с первой, и таким образом измерить отрезок между двумя точками, если он параллелен шкале. Но первые три определения не дают нам возможности сравнивать между собой отрезки, на параллельных прямых не лежащие. Сравнение таких отрезков становится возможным только тогда, когда на бесконечно удаленной прямой нам будет задана квадратичная инволюция, которую назовем абсолютной, и к первым трем определениям мы добавим еще четвертое.

Определение 4,а. Отрезки, соединяющие точки конического сечения, сопряженного с абсолютной инволюцией и полюс бесконечно удаленной прямой, равны.

Это определение дополняет определение 3 и ему не противоречит: всегда два отрезка, порознь равные третьему, равны между собой.

Если мы хотим, пользуясь определением 4,а на прямой OV, проведенной через точку O, отложить отрезок равный OE, то мы можем поступать таким образом. Пусть V и U суть точки пересечения прямых OV и OE с бесконечно удаленной прямой и D и D_1 пара точек абсолютной инволюции, которые делят гармонически точки U и V. Прямые DE и D_1E пересекут прямую OV *в* точках F и F_1, и мы будем иметь $OF = O F_1 = OE$.

Точки D и D_1 всегда будут действительны, и предыдущее построение будет выполнимо, если абсолютная инволюция будет эллиптической или параболической. Если же она будет гиперболической и притом двойные ее точки C и C_1 будут разделять точки U и V, то определение 4,*a* мы должны дополнить определением пятым.

Определение 4,*b*. Пусть U и U_1 образуют пару точек абсолютной инволюции. Прямая, проведенная через двойную точку C или C_1 абсолютной инволюции отсекает на прямых OU и OU_1 равные отрезки OE и OE_1.

Последние два определения не противоречат одно другому и дают возможность на любой прямой отложить отрезок, равный данному, и таким образом измерять все отрезки одной и той же единицей.

Перейдем теперь к другому основному метрическому понятию, к углу между двумя прямыми линиями; при этом мы будем называть концом какой-нибудь прямой линии точку пересечения ее с бесконечно удаленной прямой.

Естественно считать два угла, заключенные между соответственно параллельными сторонами, равными. Поэтому величина угла будет зависеть только от положения концов его сторон, и мы дадим следующее определение.

Определение 5. Угол между двумя прямыми равняется расстоянию между концами его сторон, измеренному той шкалой, которую определяет на бесконечно удаленной прямой абсолютная инволюция.

Итак, мы видим, что абсолютная инволюция позволяет нам измерять как расстояния между точками, так и углы между прямыми и развить метрическую Геометрию на плоскости.

Построенную указанным способом Геометрию мы называем Евклидовой, ибо в ней на каждой прямой есть только одна бесконечно удаленная точка, иначе говоря, через каждую точку плоскости можно провести только одну прямую, параллельную данной.

§7.

Характер этой Геометрии будет однако различен в зависимости от рода абсолютной инволюции, от двойных точек ее, которые вместе с бесконечно удаленной прямой образуют абсолют Евклидовой плоскости.

Если абсолютная инволюция и шкала, которую она определяет на бесконечно удаленной прямой, будут эллиптическими, то мы будем иметь обыкновенную Евклидову Геометрию. Мы могли бы сказать, что абсолютом ее служит Риманова прямая, и назвать ее Римано-Евклидовой (*RE*).

Если абсолютная инволюция будет параболической, ее двойные точки сливаются в одну C, то бесконечно удаленная прямая будет Евклидовой прямой. Плоскость с таким абсолютом можно было бы поэтому назвать Евклидо-Евклидовой (*EE*). Мы могли бы назвать ее и Ньютоновым миром двух измерений или Ньютоновой плоскостью, ибо эту плоскость мы получаем, когда хотим интерпретировать Ньютоно-Галилееву механику прямолинейного движения при помощи мира $(x,\ t)$. При сравнении Ньютоновой механики с принципом относительности мы должны Геометрии этой плоскости уделить некоторую долю нашего внимания.

Конические сечения, сопряженные с параболической абсолютной инволюцией, или касаются бесконечно удаленной прямой в точке C, или распадаются на пары прямых, проходящих через C. Из определения 4,а поэтому следует, что отрезки, концы которых лежат на двух прямых, проведенных через C, равны между собой, и для измерения всех отрезков плоскости нам достаточно построить только одну параболическую шкалу на произвольно взятой прямой Ot, не проходящей через C. Расстояние между двумя точками A и B будет равно расстоянию между их проекциями A и B на шкалу Ot из точки C.

Измеренное таким образом расстояние между двумя точками во избежание недоразумения можно было бы назвать промежутком между ними.

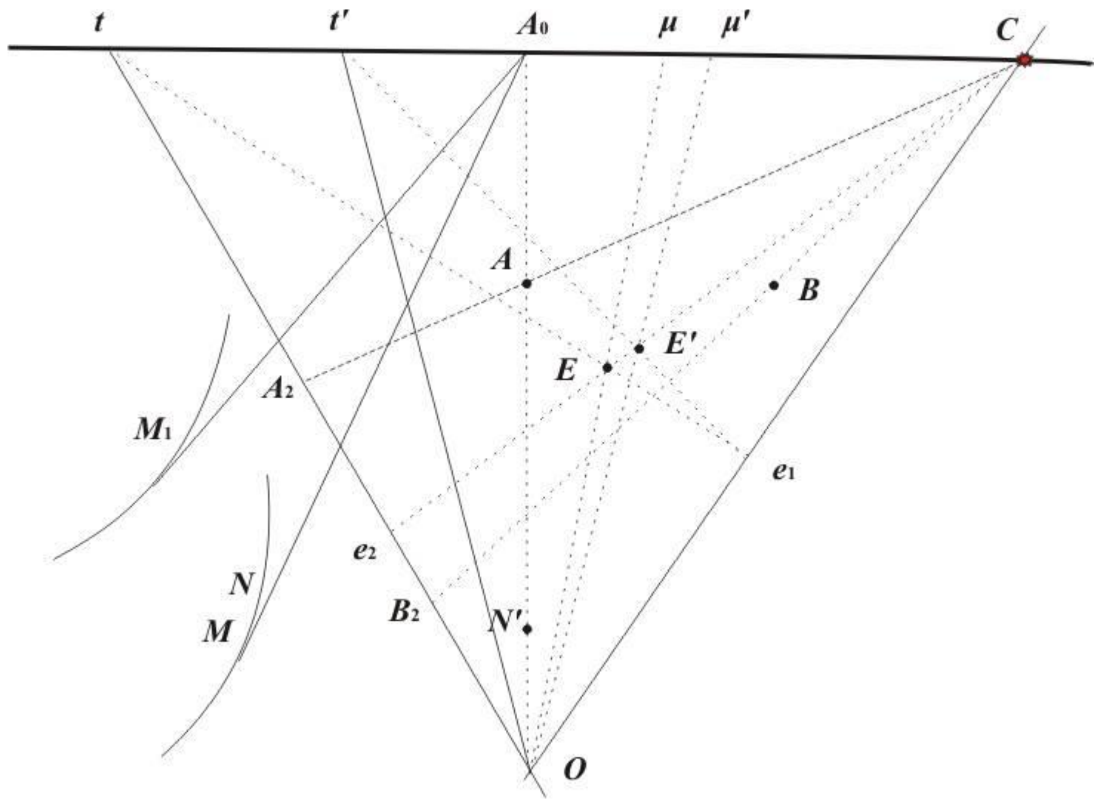
Из сказанного следует, что промежуток между точками равен нулю, если прямая, их соединяющая, проходит через точку C.

Угол, образованный двумя прямыми, измеряется отрезком между концами его сторон при помощи абсолютной параболической шкалы, которую определяет на бесконечно удаленной прямой абсолютная инволюция. Прямые, проведенные через точку C, перпендикулярны ко всем другим прямым плоскости и образуют с ними бесконечно большой угол.

Для изучения этой Геометрии введем проективные ангармонические координаты (чертеж 2), взяв за ось x какую-нибудь прямую, проходящую через точку C, и за ось t произвольную прямую. Проекции e_1, e_2 и единичной точки E из вершин треугольника OtC на противоположные стороны его определяют нам отрезки Oe_1, Oe_2, t, которые мы примем за единицы параболических шкал на бесконечно удаленной прямой и на осях xot. Координаты точки A будут

$$x = t(COEA) = (COe_1A_1)$$

$$t = C(tOEA) = (tOe_2A_2)$$



Чертеж 2.

Составим прежде всего формулы преобразования координат. Возьмем новую систему координат: изменив ось t', совместим новую ось x' со старой x и оставим единицы масштабов на осях x' и t' без изменения, т.е. за единичную точку E' возьмем точку, в которой пересекаются прямые $t'e_1$ и CEe_2. Тогда координата t точки A не изменится

$$t' = C(t'OE'A) = C(tOEA) = t \,.$$

Замечая, что по свойству пяти точек

$$t(COEA) \cdot C(OtEA) \cdot O(tCEA) = 1,$$

мы имеем

$$x/t = O(CtEA) = (Ct\mu A_0)$$

или

$$x/t = w, \; x = wt, \tag{4}$$

где $w = (Ct\mu A_0)$ есть угол между осью t и радиусом вектором OA, т.е. длина отрезка tA_0, измеренная на абсолютной шкале единицей $t\mu$.

Подобным же образом из треугольника $t'oC$ мы находим

$$x'/t' = O(ct'E'A) = (ct'\mu'A_0)$$

или

$$x'/t' = w', \;\; x' = w't',$$

где w' равняется углу $t'OA_0$ или отрезку $t'A_0$, измеренному новой единицей $t'\mu'$ абсолютной шкалы. Но из чертежа видно, что отрезки $t\mu$ и $t'\mu'$ равны, следовательно на бесконечно удаленной прямой единица осталась без изменения. Потому

$$tA_0 = tt_1 + t'A_0$$

или, обозначая угол между осями t и t', иначе говоря длину отрезка tt' через v,

$$x/t = x'/t' + v.$$

Т.о. формулы преобразования будут

$$x = x' + vt', \; t = t' \,. \tag{5}$$

Если мы будем в построенной нами Геометрии рассматривать t как время, а x как координату, определяющую положение точки на оси x, то каждому событию (x, t) будет соответствовать в плоскости точка A (x, t). Возьмем две точки A и B (x_1, t_1). Как было сказано выше, промежуток между точками A и B равняется расстоянию между проекциями их A_2 и B_2 на ось t. По формуле (1) это расстояние равняется

$$(tOe_2B_2) - (tOe_2A_2) = t_1 - t.$$

То, что мы назвали промежутком между двумя точками, представляет собой, следовательно, промежуток времени между двумя событиями, изображаемыми этими точками.

Когда мы рассматриваем t как время и x как координату движущейся по оси x точки, то выведенные выше формулы преобразования координат представляют собой так называемое Ньютоно-Галилеево преобразование, соответствующее переходу от одной системы отсчета к другой, движущейся по отношению к первой со скоростью v.

Из предыдущего ясно, что промежуток времени между двумя событиями не будет зависеть от системы отсчета, и события одновременные в одной системе будут одновременны и в другой.

Закон движения точки по оси x, $x = f(t)$, представится некоторой мировой линией. Проведем в какой-нибудь точке ее касательную MA_0 и на этой последней возьмем бесконечно малый элемент MN (dx, dt).

Если этот элемент мы перенесем параллельно самому себе и поместим точку M в начало координат, то получим вектор ON', координаты конца которого, точки N', будут (dx, dt). По формуле (4) мы получим

$$dx/dt = (ct\mu A_0) = w \tag{6}$$

скорость движения точки (x).

Допустим, что касательная к другой мировой линии в какой-нибудь ее точке M_1 (x_1, t_1) пересекает бесконечно удаленную прямую в той же точке A_0. В таком случае скорости двух точек, движение которых определяется двумя различными мировыми линиями в момент t для первой и в момент t_1 для второй, будут равны между собой. Кроме того, так как мировая линия остается неизменной, какова бы ни была система отсчета, то при переходе к новой системе точка A_0 не меняет своего положения и, следовательно, мы можем сказать, что существует однозначное соответствие между скоростями и точками абсолюта, которое остается неизменным, к какой бы системе отсчета мы ни относили движение.

Формула (6) показывает нам, что скорость точки равна отрезку бесконечно удаленной прямой, заключенному между концом оси времен и точкой, соответствующей скорости.

Если то же движение точек m и m_1 мы отнесем к системе отсчета (x', t'), то общая их скорость в рассматриваемый момент представится вектором $t'A_0$ и будет равна

$$w' = (ct'\mu' A_0) = t'A_0.$$

Но

$$tA_0 = tt' + t'A_0$$

и потому

$$w = w' + v,$$

где $tt' = v$ равняется скорости второй системы отсчета относительно первой. Это равенство выражает закон сложения скоростей.

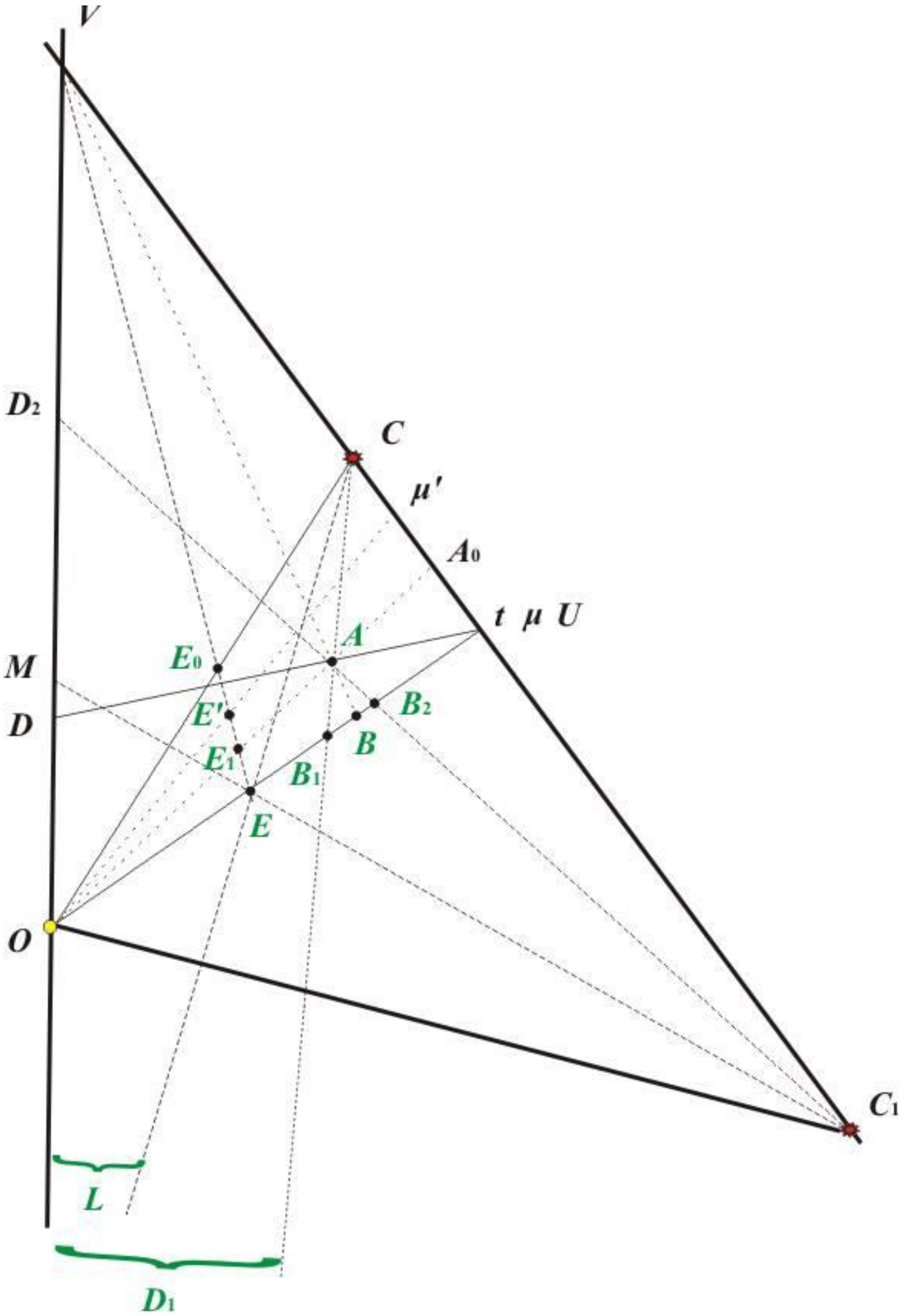
Полученные нами результаты убеждают нас в том, что метрические свойства фигур построенной нами плоскости представляют собой геометрическую интерпретацию при помощи мира двух измерений Ньютоно-Галилеевой механики прямолинейного движения точки.

Итак, абсолютом мира Ньютона двух измерений служит Евклидова прямая.

§8.

Если абсолютная инволюция будет гиперболической и ее двойные точки действительны, то бесконечно удаленная прямая будет прямой Лобачевского. В этом случае плоскость можно назвать Лобачевско-Евклидовой или миром Минковского двух измерений; к ней мы должны прибегнуть, если захотим графически представить прямолинейное движение точки, следующей законам принципа относительности.

Мы условимся говорить, что прямая плоскость имеет реальное, идеальное или абсолютное направление, смотря по тому, будет ли конец ее точкой реальной, идеальной или совпадет с одной из двойных точек абсолютной инволюции. Две прямые перпендикулярны, если концы их образуют пару соответствующих точек абсолютной инволюции; угол между двумя взаимно перпендикулярными прямыми по формуле (2) равняется $\pi i/2$. Все прямые плоскости с абсолютным направлением образуют бесконечно большой угол.



Чертеж 3.

Примем сначала за координатные оси ξ, η две прямые OC и OC_1 (чертеж 3), имеющие абсолютное направление, и за единичную точку произвольную точку E. Ту часть бесконечно удаленной прямой, на которую падает проекция точки E из точки O, будем считать реальной. Проведем через какую-нибудь точку A прямую OAA_0 и отложим на ней отрезок OE_1 равный отрезку OE. Для координат точки A мы имеем

$$\xi = C(C_1OEA) = C(C_1OEE_1) \cdot C(C_1OE_1A) = C(C_1OEE_1) \cdot (A_0OE_1A)$$

$$\eta = C_1(COEA) = C_1(COEE_1) \cdot C(COE_1A) = C_1(COEE_1) \cdot (A_0OE_1A).$$

По определению 4 точки C, C_1, E, E_1, лежат на одном и том же коническом сечении, которое касается в точках C и C_1 прямых OC и OC_1, и потому на основании известного свойства конического сечения

$$(CC_1EE_1) = C(OC_1EE_1) = C_1(COEE_1),$$

откуда

$$C(C_1OEE_1) \cdot C_1(COEE_1) = 1$$

и следовательно

$$\xi\eta = (A_0OE_1A)^2.$$

При выводе этого равенства мы предполагали, что прямые *EO* и *OA* не разделяются прямыми *OC* и OC_1. Если же направление линии *OA* будет идеально, то отрезок *OE* мы должны перенести на *OA*, пользуясь определением 6, и тогда мы получим

$$-\xi\eta = (A_0OEA)^2.$$

Мы можем различать 3 величины, связанные с двумя точками *O* и *A*.

1. Величину

$$T = \sqrt{\xi\eta}$$

мы назовем собственным промежутком между точками *O* и *A*. Из сказанного мы видим, что она действительна, когда направление *OA* реально, чисто-мнима, когда направление *OA* идеально, и равна нулю, когда направление *OA* абсолютно.

2. Величину $ciT = ci\sqrt{\xi\eta}$ назовем собственным расстоянием между точками *O* и *A*. Она действительна, когда собственный промежуток мнимый и обратно.

3. Модуль числа $T = \sqrt{\xi\eta} = (A_0OE_1A)$ назовем длиной отрезка *OA*.

Таким образом промежуток между точками *O* и *A* всегда определяется равенством

$$T^2 = \xi\eta \tag{7}$$

Далее по свойству пяти точек из треугольника CC_1O мы имеем

$$C(C_1OEA) \cdot C_1(OCEA) \cdot O(CC_1EA) = 1$$

или

$$\xi / \mu = e^{-2\varphi}$$

где

$$\varphi = ½ \lg (CC_1\mu A_0)$$

равняется отрезку μA_0, измеренному абсолютной шкалой Лобачевского, или, иначе говоря, углу, который прямая *OA* составляет с прямой *OE*. Ангармоническое отношение $(CC_1\mu A_0)$ будет величиной положительной и φ действительной, когда направление *OA* реально. Если же направление *OA* будет идеально, то $(CC_1\mu A_0)$ будет отрицательно и

$$\varphi = ½\, \pi i + ½ \lg (CC_1\mu A'_0) = ½\, \pi i + \varphi_0,$$

где A'_0 есть точка, сопряженная с A_0 в абсолютной инволюции, и φ_0 величина действительная.

Из (7) и (8) получаем основные формулы

$$\xi = Te^{-\varphi}$$
$$\eta = Te^{+\varphi}. \tag{9}$$

Перейдем теперь от этой системы координат к ортогональной системе, одна ось которой *t*, совпадает с прямой *OE* и пересекает бесконечно удаленную прямую в точке *U*, а другая ось *x*, перпендикулярна к оси *t* и имеет своим концом точку *V* сопряженную с *t* в абсолютной инволюции. За единичную точку возьмем точку E_0, в которой *VE* пересекается с осью η. Если спроектируем гармоническую систему CC_1UV из точки *A* на новые оси *x* и *t*, то получим две гармонические системы B_1B_2UB и D_1D_2DV и следовательно

$$(UBB_1B_2) = (VDD_1D_2) = -1. \tag{10}$$

Из чертежа 3 мы усматриваем

$$\xi = C(C_1OEA) = (UOEB_1)$$
$$\eta = C_1(COEA) = (UOEB_2)$$
$$t = V(UOE_0A) = (UOEB)$$

и вследствие соотношений (10) имеем

$$(\eta - t)/(\xi - t) = -1,$$

откуда

$$t = (\xi + \eta)/2 \quad . \tag{11}$$

Подобным же образом, проектируя гармоническую систему CC_1UV из точки *E* на ось *x*, получаем гармоническую систему *LMOV*

$$(VOLM) = -1$$

и по чертежу имеем

$$\xi = C(C_1OEA) = (VOLD_1) = (VOLM)\,(VOMD_1) = (VOMD_1)$$
$$\eta = C_1(COEA) = (VOMD_2)$$
$$x = U(VOE_0A) = (VOMD)$$

и затем вследствие соотношений (10)

$$(\eta - x) / (-\xi - x) = -1,$$

откуда

$$x = (\eta - \xi) / 2.$$

Если бы за единичную точку мы взяли точку E', лежащую на прямой VE, но не лежащую на абсолютной прямой OC, то для x мы получили бы

$$x = U(VOE'A) = U(VOE'E_0)\,U(VOE_0A) = (VEE'E_0)(VOMD)$$
$$x = (VU\mu'C)\,(VOMD)$$

или

$$x/c = (VOMD) \quad , \tag{12}$$

где

$$c = (VU\mu'C)$$

и c^2 есть степень абсолютной инволюции. В этом случае вместо (12) мы имели бы

$$x/c = (\eta - \xi) / 2. \tag{13}$$

Из формул (9) (11) (13) получаем

$$\begin{gathered} t = T \operatorname{ch} \varphi,\ x = cT \operatorname{sh} \varphi \\ x/t = c \cdot \operatorname{th} \varphi,\ T^2 = t^2 - x^2/c^2. \end{gathered} \tag{14}$$

Помощью этих формул нетрудно получить формулы для перехода от системы осей Oxt к другой ортогональной системе $x'Ot'$, ось которой t' образует угол u с осью t. Означив через φ' угол между осью t' и вектором OA, по предыдущим формулам мы имеем

$$t' = T \operatorname{ch} \varphi',\ \ x' = cT \operatorname{sh} \varphi',$$

но $\varphi' = \varphi - u$ и потому

$$t' = T \operatorname{ch} (\varphi - u) = T \operatorname{ch} \varphi \operatorname{ch} u - T \operatorname{sh} \varphi \operatorname{sh} u,$$
$$x' = cT \operatorname{sh}(\varphi - u) = cT \operatorname{sh} \varphi \operatorname{ch} u - cT \operatorname{ch} \varphi \operatorname{sh} u$$

или

$$\begin{gathered} t' = t \operatorname{ch} u - x'/c \operatorname{sh} u \\ x'/c = x/c \operatorname{ch} u - t \operatorname{sh} u. \end{gathered} \tag{15}$$

Будем теперь рассматривать t как время и x как координату точки, находящейся на оси x. Тогда каждому событию, совершающемуся в точке (x) в момент t, будет соответствовать на плоскости мировая точка $A(x,t)$ и свойства фигур построенной Геометрии будут представлять собой геометрическую интерпретацию законов механики точки, движущейся прямолинейно. Мы будем иметь механику Einstein'a. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим несколько примеров.

Если в формулах преобразования координат (15), мы положим

$$v/c = \operatorname{th} u,$$

то они превратятся в формулы

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \quad , \qquad t' = \frac{t-(v/c^2)x}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

преобразования Лоренца, соответствующего переходу от одной системы отсчета (x, t) к другой (x', t'), движущейся по отношению к первой со скоростью v.

Закон движения точки m по оси x, $x = f(t)$ представится мировой линией. Проведем в точке $M(x,t)$ к этой линии касательную MA_0 (чертеж 4) на ней возьмем бесконечно малый элемент MN, (dx, dt) и перенесем его параллельно самому себе в положение ON так, чтобы точка M упала в O. Тогда координаты точки N будут dx, dt и, означив через dx собственный промежуток между точками M и M_1, по формулам (14) будем иметь

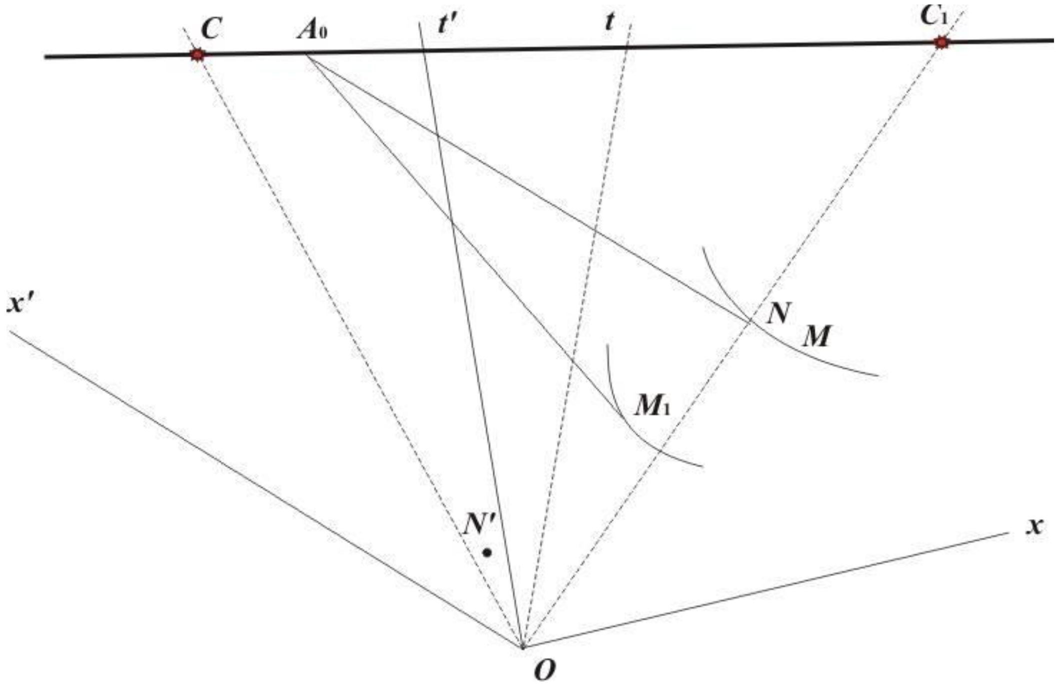
$$\frac{dt}{d\tau} = \operatorname{ch}\varphi \quad , \quad \frac{dx}{d\tau} = c \cdot \operatorname{sh}\varphi \quad , \quad d\tau = \sqrt{dt^2 - dx^2/c^2} \tag{16}$$

и для скорости точки m мы получим

$$w = \frac{dx}{dt} = c \cdot \operatorname{th}\varphi \tag{17}$$

где φ = углу, который касательная MA_0 образует с осью t, иначе говоря, φ = отрезку tA_0, измеренному абсолютной шкалой.

Первая группа формул показывает нам, что собственный промежуток между точками M и M_1 равняется элементу собственного времени движущейся точки m. Чтобы уяснить важное значение последней формулы, вообразим другую точку m_1, движущуюся вдоль оси x по другому закону, который характеризуется мировой линией M_1. Если касательная к этой линии в какой-нибудь ее точке $M_1(x_1,t_1)$ пересекается с касательной MA_0 к мировой линии первой точки m на бесконечно удаленной прямой в точке A_0, то, как показывает формула (17), скорости точек m и m_1, первой в момент t, второй в момент t_1, будут равны. Поэтому одной и той же скорости будет соответствовать одна и та же точка абсолюта. Но вид мировой линии, характеризующей движение точки, всегда остается одним и тем же независимо от системы отсчета, а потому от системы отсчета положение точки A_0 также не зависит.



Чертеж 4.

Т.о. можно установить однозначное соответствие между скоростями и точками абсолюта: каждой скорости, к какой бы системе отсчета мы ее не относили, всегда соответствует одна и та же точка абсолюта.

Формула (17) показывает нам, что скорость точки m в системе отсчета (x, t) может быть представлена вектором tA_0 между концом оси времен, t, и точкой A_0, которая соответствует скорости; величина скорости пропорциональна гиперболическому тангенсу длины этого отрезка, измеренной абсолютной шкалой.

Так как $tC = tC_1 = \infty$, то двойным точкам абсолютной инволюции будет соответствовать скорость $w = c$, т.е. скорость света, и мы могли бы поэтому назвать их световыми точками, а относительно бесконечно удаленной прямой Лобачевского сказать, что абсолютом ее служит пара световых точек. Гиперболический тангенс для действительных значений аргумента меньше единицы и делается больше единицы для аргумента $\pi i/2 + u_0$, а потому реальным точкам бесконечно удаленной прямой будут соответствовать скорости, меньшие скорости света, а идеальным – скорости большие света.

Точке t будет соответствовать скорость $w = c \text{ th } 0 = 0$, т.е. скорость самой системы отсчета (x,t).

Если мы отнесем движение к другой системе отсчета (x',t'), то в ней скорость v старой системы (x,t) и скорость точки m представятся векторами $t't = u$, $t'A_0 = \varphi'$, и мы будем иметь

$$v = c \text{ th } u,\ w' = c \text{ th } \varphi'.$$

Так как $\varphi = \varphi' + u$, то

$$w = \frac{w' + v}{1 + (w' \cdot v)/c^2} \tag{18}$$

Мы получаем таким образом формулу сложения скоростей Einstein'a и видим, что сложение скоростей в принципе относительности приводится к сложению отрезков на прямой Лобачевского, которая служит абсолютом плоскости.

Проведем через пять точек: точку M, две бесконечно близкие к ней точки мировой линии и световые точки, соприкасающееся с мировой линией коническое сечение. Оно будет сопряжено с абсолютной инволюцией и потому полюс H бесконечно удаленной прямой будет на основании определения 4-го находиться на равных расстояниях от всех его точек. Это коническое сечение играет, следовательно, роль соприкасающегося круга, и радиус его ρ есть радиус кривизны мировой линии в точке *M*. Если в точке *N* мировой линии, бесконечно близкой к точке *M,* мы проведем вторую касательную NA_0, то угол между этими касательными, угол смежности, будет $d\varphi = A_0A_0$, а отношение его к бесконечно малому собственному расстоянию между точками MN_1, $cd\tau$: $\frac{d\varphi}{c\cdot d\tau}$ будет равно 1/ρ – кривизне мировой линии

$$\frac{d\varphi}{d\tau}=\frac{c}{\rho} \quad .$$

С другой стороны $A_0A_0 = d\varphi$ есть бесконечно малое перемещение точки A_0, соответствующей скорости точки *m* за бесконечно малый собственный промежуток времени $d\tau$, и $\frac{c\cdot d\varphi}{d\tau}$ – производная от скорости, взятая по собственному времени. Эту величину мы могли бы поэтому назвать абсолютным ускорением точки *m* и на основании предыдущей формулы мы нашли бы, что оно равно

$$j_a = c^2/\rho, \tag{19}$$

т.е. квадрату скорости света, деленному на радиус кривизны мировой линии.

Дифференцируя равенства (16) и замечая, что $\frac{d\varphi}{d\tau}=\frac{c}{\rho}$, мы находим

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}=\frac{c^2}{\rho}\cdot ch\varphi \quad , \qquad c\cdot\frac{d^2t}{d\varphi^2}=\frac{c^2}{\rho}\cdot sh\varphi=\frac{d}{d\tau}(c\cdot ch\varphi) \quad .$$

Первая формула определяет ускорение в движении точки *m*, отнесенное к ее собственному времени, а вторая представляет производную от величины, которая будучи умножена на массу и скорость *c*, дает кинетическую энергию. Этим ур. можно дать геометрическое толкование: $\frac{d^2x}{d\tau^2}$ и $\frac{d^2t}{d\tau^2}$ суть проекции на оси координат вектора c^2/ρ, отложенного по нормали к мировой линии.

Если в диф. ур. движения точки

$$m\frac{d^2x}{d\tau^2}=\frac{dt}{d\tau}\cdot F_x$$

мы подставим значения $\frac{d^2x}{d\tau^2}$, $\frac{dt}{d\tau}$ то найдем, что сила, движущая точку,

$$F_x = m\frac{c^2}{\rho}=m\cdot j_a \quad , \tag{20}$$

т.е. равна массе, помноженной на абсолютное ускорение, и пропорциональна кривизне мировой линии. Если сила постоянна, то и ρ постоянно, и мировая линия обращается в коническое сечение, проходящее через световые точки. В этом случае точка *m* будет иметь так называемое гиперболическое движение, которое определяется ур.

$$x^2 - c^2t^2 = \text{const.},$$

если начало координат поместим в центре мировой линии, т.е. в полюсе бесконечно удаленной прямой. Когда световые точки совпадают в одну, мир Минковского обращается в мир Ньютона, мировая линия гиперболического движения превращается в коническое сечение, касающееся бесконечно удаленной прямой в точке *C* (параболу), и гиперболическое движение обращается в равномерно ускоренное.

Приведенные примеры убеждают нас в том, что геометрические свойства фигур построенной плоскости дают нам законы механики Einstein'a, если мы рассматриваем как фигуры, устанавливающие связь между пространством и временем. Мы можем, следовательно, сказать, что мир Минковского двух измерений представляет собой Евклидову плоскость, абсолютом которой служит прямая Лобачевского.

Таким образом мы построили Евклидову плоскость трех типов (*RE*), (*EE*), (*ЛE*), отличающихся одна от другой их абсолютами (*R*), (*E*), (*Л*). Я не буду входить в дальнейшие подробности метрической Геометрии этих плоскостей. Замечу только, что некоторые тригонометрические формулы, которые легко получаются из (9), читатель найдет в моей работе

«Проективная теория векторов»[16], в первой главе, посвященной теории комплексных чисел с двумя единицами. Эта теория представляет довольно подходящий инструмент для изучения различных типов Евклидовых плоскостей, причем каждому типу плоскости соответствует особый тип комплексных чисел.

§9.

Чтобы построить трехмерное Евклидово пространство, возьмем в трехмерном проективном пространстве R_3 какую-нибудь плоскость P_2 и назовем ее бесконечно удаленной плоскостью. Оставляя без перемены определения 2 и 3, заменим определение 1-ое следующим:

Определение 1. Прямые, которые пересекаются в одной и той же точке, плоскости, которые пересекаются по одной и той же прямой бесконечно удаленной плоскости, называются параллельными.

Эти три определения дают возможность построить аффинную Геометрию. В ней все прямые будут Евклидовыми прямыми и все плоскости Евклидовыми плоскостями.

Чтобы установить метрику этого пространства, нам должно быть дано в бесконечно удаленной плоскости коническое сечение K или полярное поле.

Это сечение K согласно теории мероопределения определяет геометрию бесконечно удаленной плоскости. Оно вместе с тем определяет и метрические свойства всего пространства, ибо всякая плоскость Q пересекается с бесконечно удаленной плоскостью по прямой. На этой прямой лежит сопряженная с коникой K инволюция, которая будучи принята за абсолютную инволюцию плоскости Q, определяет геометрию ее, а тем самым и геометрию всего пространства. Всякая плоскость пространства R_3 будет плоскостью одного из рассмотренных выше типов (*RE*), (*EE*), (*ЛE*), смотря по тому, будет ли она пересекать конику K в мнимых, совпадающих или действительных точках.

Если коническое сечение будет мнимым, то бесконечно удаленная плоскость будет плоскостью Римана (R_2). Все же другие плоскости будут обыкновенными Евклидовыми плоскостями (*RE*). В этом случае мы имеем обыкновенную Евклидову Геометрию (*RE*). Ее можно было бы назвать Римано-Евклидовой.

Если коническое сечение K вырождается в пару мнимых точек, лежащих на прямой R и определяющих на ней эллиптическую инволюцию, то бесконечно удаленная плоскость будет обыкновенной Евклидовой (*RE*). В этом случае и все плоскости, проходящие через R, будут обыкновенными Евклидовыми (*RE*) с одной и той же общей им всем абсолютной инволюцией R. Всякая другая плоскость пересечется с прямой R только в одной точке; ее абсолютная инволюция будет параболической; следовательно, сама плоскость будет Евклидо-Евклидовой (*EE*).

Т.о. в пространстве мы будем иметь пучок обыкновенных плоскостей (*RE*), проходящих через прямую R, одна из них будет бесконечно удаленной плоскостью. Все же другие плоскости будут Ньютоновыми плоскостями (*EE*).

Если оси x и y возьмем таким образом, чтобы они пересекали прямую R в сопряженных точках абсолютной инволюции, ось t возьмем произвольно, то плоскость xoy будет обыкновенной Евклидовой, плоскости же xot, yot – Ньютоновыми, и геометрические свойства фигур пространства будут выражать законы механики Ньютона двух измерений. На этом основании мы можем назвать рассматриваемое пространство Ньютоновым миром трех измерений. Принимая же во внимание, что абсолютом для него служит обыкновенная Евклидова плоскость – Евклидо-Евклидовым пространством (*REE*).

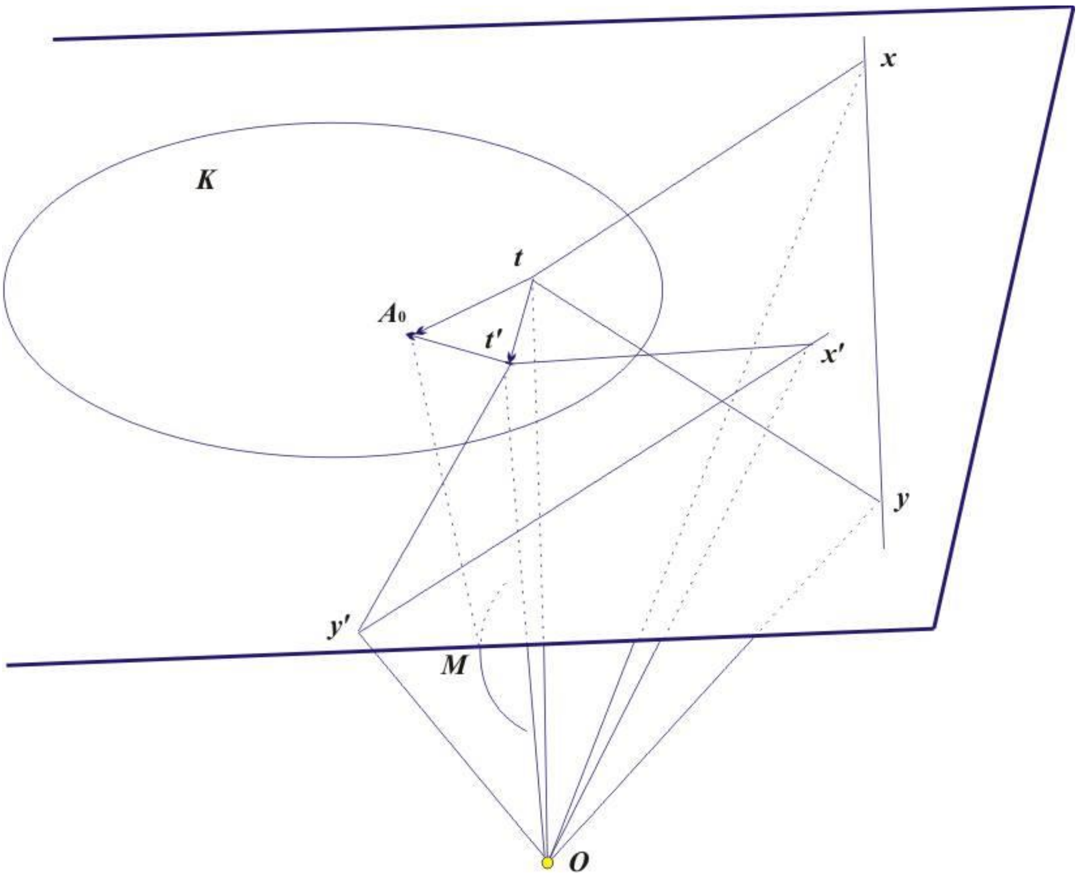
§10.

Наконец, если коническое сечение K действительно, то бесконечно удаленная плоскость будет плоскостью Лобачевского $Л_2$ и пространство может быть названо Лобачевско-Евклидовым ($Л_2E$). Оно представляет собой мир Минковского 3-х измерений, служащий для геометрической интерпретации движений, происходящих в Евклидовой плоскости согласно с принципом относительности.

Всякая плоскость этого пространства будет плоскостью одного из изученных нами трех типов в зависимости от того, пересекается ли она с коникой K в действительных, мнимых или совпадающих точках.

---

[16] Известия Каз. Физ.-Мат. Общ. томы VIII и IX, 2 серия.



Чертеж 5.

Всякая прямая пересекает бесконечно удаленную плоскость в одной точке, в конце прямой. Возьмем ортогональную систему координат, концы осей которой *t*, *x*, *y* образуют автополярный треугольник (чертеж 5). Если конец оси времен *t* – точка реальная, т.е. находится внутри коники *K*, то концы осей *x* и *y* будут идеальны и находятся вне коники *K*. При таком расположении осей плоскость *xOy* будет обыкновенной Евклидовой плоскостью (*RE*), плоскости же *xOt* и *yOt* будут типа (*ЛЕ*). Преобразование координат соответствует переходу от одного автополярного треугольника к другому.

Пусть точка *m* движется в Евклидовой плоскости и ее движение определяется ур. $x = f(t)$ и $y = f_1(t)$; эти ур. в трехмерном пространстве определяют мировую линию. Проведем к ней в какой-нибудь точке (x, y, z, t) касательную, которая, положим, пересечет бесконечно удаленную плоскость в точке A_0. Рассуждая совершенно так же, как и в случае прямолинейного движения, мы убедимся, что между скоростями и точками бесконечно удаленной плоскости может быть установлено однозначное соответствие, которое не зависит от системы отсчета, и что скорость точки *m* может быть представлена вектором tA_0.

Если бы бесконечно удаленная плоскость была обыкновенной Евликдовой и пространство миром Ньютона N_3, то скорость точки *m* была бы

$$w = \varphi,$$

где $\varphi = tA_0$ = длине отрезка tA_0.

Когда же бесконечно удаленная плоскость будет плоскостью Лобачевского и пространство – миром Минковского, то

$$w = c \cdot \mathrm{th}\,\varphi,$$

где φ также равно tA_0. В этом случае реальным точкам, лежащим внутри коники *K*, будут соответствовать скорости меньше, чем скорость света, точкам идеальным, лежащим вне коники *K*, – скорости больше скорости света и точкам, находящимся на *K*, скорости равные скорости света. Мы могли бы поэтому назвать конику *K* световой кривой или световым абсолютом бесконечно удаленной плоскости Лобачевского $Л_2$.

Если движение точки m мы отнесем к другой системе отсчета (x', y', t'), то скорость ее в тот момент, который характеризуется точкой M, представится вектором $t'A_0$, скорость же системы (x', y', t') по отношению к системе (x, y, t) вектором tt'.

В том случае, когда движение происходит по законам Ньютоновой механики, бесконечно удаленная плоскость есть Евклидова плоскость, и треугольник A_0tt' будет половиной параллелограмма: скорости будут складываться по правилу параллелограмма. Если же движение происходит по законам принципа относительности, то бесконечно удаленная плоскость есть плоскость Лобачевского, и скорость точки m в системе (x', y', t') будет

$$w' = c\cdot\mathrm{th}\,\varphi',$$

где $\varphi' = t'A_0$, скорость же системы (x', y', t') по отношению к системе (x, y, t)

$$v = c\cdot\mathrm{th}\,u,$$

где $u = tt'$. В этом случае стороны треугольника будут связаны основной тригонометрической формулой Геометрии Лобачевского

$$\mathrm{ch}\,\varphi = \mathrm{ch}\,\varphi'\,\mathrm{ch}\,u - \mathrm{sh}\,\varphi'\,\mathrm{sh}\,u\cos\alpha\,,$$

где α есть угол между скоростями v и w'. Преобразуя эту формулу, получаем

$$\mathrm{w} = \frac{\sqrt{\mathrm{w}'^2 + \mathrm{v}^2 + 2\mathrm{w}'\mathrm{v}\cos\alpha - \dfrac{(\mathrm{w}'\mathrm{v}\sin\alpha)^2}{\mathrm{c}^2}}}{1 + \dfrac{\mathrm{w}'\mathrm{v}\cos\alpha}{\mathrm{c}^2}}$$

формулу сложения скоростей Einstein'a.[17]

Таким образом мы построили трехмерное Евклидово пространство трех типов:

Евклидово пространство (R_2E), абсолютом которому служит плоскость Римана R_2,

Ньютонов мир трех измерений (REE), абсолютом которому служит обыкновенная Евклидова плоскость (RE),

Мир Минковского трех измерений ($Л_2E$), абсолютом которому служит плоскость Лобачевского.

Я не буду более приводить примеров, подтверждающих совпадение Геометрии миров Ньютона и Минковского с классической механикой и принципом относительности, и перейду к построению 4-х мерного пространства Евклида.

§11.

Вообразим четырехмерное проективное пространство R_4 и возьмем в нем линейное трехмерное пространство P_3, которое назовем бесконечно удаленным. С этим пространством P_3 всякая прямая пересечется в одной точке, плоскость – по прямой линии, и линейное трехмерное пространство – по плоскости. Чтобы установить аффинную Геометрию пространства R_4, оставим без изменения определения 2 и 3 и заменим первое следующим.

<u>Определение 1</u>. Две прямые, которые пересекаются в одной и той же точке, две плоскости, которые пересекаются по одной и той же прямой, и два трехмерных линейных пространства, которые пересекаются по одной и той же плоскости пространства P_3, называются параллельными.

Метрические свойства R_4 определяются метрикой бесконечно удаленного пространства P_3, каковое и служит абсолютом пространства R_4.

Совершенно так же, как при помощи прямой Римана, Евклида и Лобачевского мы построили трех типов Евклидовы плоскости, при помощи плоскости Римана, Евклида и Лобачевского – трех типов пространства 3-х измерений, так мы можем при помощи трехмерных пространств Римана, Евклида и Лобачевского построить 4-х мерные Евклидовы пространства трех типов.

Если мы за абсолют P_3 возьмем трехмерное Риманово пространство (R_3), то мы получим естественное обобщение обыкновенного Евклидова пространства (R_2E), отличие которого от

---

[17] **Прим. В. Сизенова:** смотри Фок В.А. *Теория пространства времени и тяготения* / М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955 – 504 стр., формула (17.29), стр. 72:

$$\frac{(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)^2 - \frac{1}{c^2}\,[\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2]^2}{\left(1 - \frac{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2}{c^2}\right)^2} = c^2\,\mathrm{th}^2\,s. \qquad (17.29)$$

обыкновенного заключается только в том, что к трем координатам *x, y, z* присоединяется четвертая *t*.

Возьмем за абсолют P_3 пространства R_4 обыкновенное трехмерное Евклидово пространство (R_2E) и пусть Риманова плоскость R_2 служит абсолютом этому последнему. Концы осей *x, y, z* ортогональной системы *Oxyzt* будут лежать на плоскости R_2, конец же оси *t* может находиться в любой точке абсолюта P_3. Координатные пространства *Oxyt, Oyzt, Ozxt* будут трехмерными Ньютоновыми пространствами (N_3), пространство же *Oxyz* обыкновенным трехмерным Евклидовым (R_2E). Законы механики Ньютона в этом последнем будут интерпретироваться как Геометрические свойства фигур пространства R_4. Это пространство может быть названо поэтому миром Ньютона четырех измерений (N_4).

§12.

Возьмем наконец за абсолют P_3 пространство Лобачевского трех измерений и пусть его абсолютом служит некоторая поверхность S_2 второго порядка.

Каждая прямая пространства R_4 встретит пространство $Л_3 = P_3$ только в одной точке, в конце прямой, каждая плоскость пересечется с $Л_3$ по бесконечно удаленной прямой и каждое линейное пространство трех измерений – по бесконечно удаленной плоскости. Концы двух взаимно перпендикулярных линий пространства R_4 сопряжены по отношению к поверхности S_2, а линии пересечения с $Л_3$ двух перпендикулярных плоскостей образуют взаимные поляры S_2. Концы осей ортогональной системы *Oxyzt* находятся в вершинах автополярного по отношению к S_2 тетраэдра. Замена одной координатной системы другой соответствует замене одного тетраэдра *x, y, z, t* другим *x′, y′, z′, t′*.

Если *t*, конец оси *t*, находится внутри поверхности S_2, есть точка реальная, то точки *x, y, z*, концы осей *x, y, z*, будут идеальными. Плоскости *yzt, zxt, xyt* пересекутся с поверхностью S_2 по действительным кривым и будут плоскостями Лобачевского, координатные же пространства *Oyzt, Ozxt, Oxyt* пространствами Минковского трех измерений. Плоскость *xyz* будет плоскостью Римана, а пространство *Oxyz* – обыкновенным пространством Евклида. Этот характер координатных пространств убеждает нас в том, что геометрические свойства фигур четырехмерного пространства *Oxyzt*, устанавливая связь между *x, y, z, t* и их производными, будут выражать законы механики Einstein'a. Пространство $R_4 \equiv M_4 \equiv (Л_3E)$ будет, следовательно, миром Минковского четырех измерений, и преобразование Лоренца представится как переход от одного координатного теграедра *xyzt*, к другому *x′y′z′t′*.

Движение точки *m* в Евклидовом пространстве *Oxyz*, заданное ур. $x = f(t)$, $y = f_1(t)$, $z = f_2(t)$, представится в пространстве M_4 мировой линией, касательная проведенная к ней в какой-нибудь точке $M(x,y,z,t)$ пересечет абсолют $Л_3$ в точке A_0. Скорость точки *m* в момент *t* в системе (*x, y, z, t*) представится вектором tA_0 и будет равна

$$v = c \cdot \operatorname{sh} u, \tag{21}$$

где *u* есть длина отрезка tA_0. Рассуждая совершенно так же, как и в случае движения точки по прямой или по плоскости, мы можем установить однозначное соответствие между скоростями и точками абсолюта, остающееся неизменным при переходе от одной системы отсчета к другой. При этом скоростям, меньшим скорости света *c*, будут соответствовать реальные точки абсолюта $Л_3$, лежащие внутри поверхности S_2, скоростям большим чем *c* – точки идеальные, и, наконец, скоростям равным скорости света – точки самой поверхности S_2. Мы можем поверхность S_2 назвать световой поверхностью или световым абсолютом пространства Лобачевского $Л_3$.

Сложение скоростей приведется к сложению отрезков в пространстве $Л_3$ и выразится основной тригонометрической формулой Геометрии Лобачевского, которая легко преобразуется в формулу Einstein'a.

Если скорость точки *m* меняется, то точка A_0, ей соответствующая, будет в пространстве $Л_3$ двигаться, и скорость ее, измеренная собственным временем точки *m* и умноженная на скорость света *c*, может быть названа абсолютным ускорением точки *m*. Оно представится вектором j_a, отложенным по касательной к траектории точки S_0 и не зависящим от системы отсчета. Если мы построим комомент[18] вектора j_a относительно конца оси *t*, то получим вектор

[18] Термин заимствован из моей работы «Проективная теория векторов». Известия Казанского Ф.М. Общ. 2-ая серия тт. VIII и IX.

$$k\mu_r j_a = j_r \cdot \frac{1}{[1-(v/c)^2]^{3/2}} = j_r \cdot ch^3 u \tag{22}$$

где j_r есть ускорение точки m, v – скорость ее в системе (x,y,z,t) и $u = tA_0$. Если же в конце оси t мы поместим вектор $F(x,y,z)$, изображающий силу, действующую на точку m в системе (x,y,z,t), то диф. ур. движения точки

$$m \cdot \ddot{x} = \dot{t} \cdot F_x \quad , \qquad m \cdot \ddot{y} = \dot{t} \cdot F_y \quad , \qquad m \cdot \ddot{z} = \dot{t} \cdot F_z \quad .$$

где m покоящаяся масса (Ruhmasse) точки m и производные берутся по собственному времени, в векторной форме, могут быть переписаны так

$$k\mu_{A_0} F = m \cdot j_a \tag{23}$$

Таким образом, компонент силы, приложенной к концу оси t относительно точки A_0, соответствующей скорости u, равняется произведению массы на абсолютное ускорение. В такой форме может быть представлен второй закон динамики в принципе относительности.

Из сопоставления равенств (22) (23) легко убеждаемся, что продольная и поперечная массы соответственно равны

$$m \cdot \frac{1}{[1-(v/c)^2]^{3/2}} = m \cdot ch^3 u \quad , \qquad m \cdot \frac{1}{[1-(v/c)^2]^{1/2}} = m \cdot chu \quad .$$

Я не буду более рассматривать примеров из кинематики динамики и обращу только внимание на то простое геометрическое толкование, которое получает электромагнитный вектор, т.е. вектор, состоящий из электрического смещения и магнитной силы, и закон, управляющий этим вектором при переходе от одной системы отсчета к другой.

В своем мемуаре «Пространство и время»[19] Г. Минковский говорит:

> «При описании поля, вызываемого электроном, оказывается, что разделение поля на электрическую и магнитную силы есть разделение относительное и зависит от избранной оси времен; наиболее целесообразно рассматривать одновременно обе силы, руководствуясь при этом известною, хотя и неполною, аналогией, силовым винтом механики».

Эти слова Минковского должны быть исправлены в том смысле, что электромагнитный вектор представляет собой совершенно полную аналогию с винтом механики, но только не в пространстве Евклида, а в пространстве Лобачевского $Л_3$, которое служит абсолютом миру Минковского.

Действительно, рассмотрим кинематический винт пространства Лобачевского. Перемещение твердого тела в пространстве Лобачевского мы можем разложить на поступательное, которое определяется перемещением какой-нибудь точки A тела и задается вектором V, и вращательное, вокруг оси, проходящей через ту же точку A, и определяемое вектором Ω. Но это разложение перемещения на поступательное и вращательное относительно. Если бы для характеристики того же самого перемещения тела мы избрали бы другую точку B, то оно – перемещение – определилось бы двумя другими векторами V' и Ω′, связанными с векторами V, Ω законами кинематики пространства Лобачевского. Эта зависимость между V, Ω и V', Ω′ и будет как раз той зависимостью, которая связывает элементы одного и того же вектора, отнесенного один раз к системе отсчета (x, y, z, t), у которой концом оси t служит точка A, а в другой раз к системе (x', y', z', t'), у которой конец оси t' совпадает с точкой B. Едва ли проще можно представить себе эту зависимость. Она показывает нам, что каждому электромагнитному вектору соответствует винт в абсолюте $Л_3$.

Я не буду входить в дальнейшие подробности, ограничусь только общим замечанием, что теория векторов неевклидовых пространств, изложенная в моей работе: «Проективная теория векторов» (1899), имеет много общего с теорией векторов мира Минковского, разработанной A. Sommerfeld′ом в его мемуаре: «Zur Relativitätstheorie»[20]. Та точка зрения, которую устанавливает на мир Минковского проективная Геометрия, как на пространство четырех измерений, абсолютом которому служит трехмерное пространство Лобачевского, представляет теорию векторов мира Минковского в новом освещении, благодаря которому эта теория значительно выигрывает в простоте и ясности и связывается самым тесным образом с теорией векторов в пространстве

[19] Новые идеи в Математике. Сборник № 5 стр. 19.
[20] Annalen der Physik, B. 32, 1910; pp. 749–776; B. 33, 1910; pp. 619–689.

Лобачевского. Вместе с тем устанавливается связь между геометрической интерпретацией принципа относительности при помощи Геометрии Лобачевского, предложенной Varičak'ом, и миром Минковского, и становится ясным, что реальная часть пространства Лобачевского $Л_3$, которая служит абсолютом мира Минковского, и есть то пространство, которым пользуется Varičak в своих многочисленных работах.

Итак, резюмируя всё выше сказанное, мы видим, что **механика Евклидова пространства трех измерений может быть рассматриваема как Геометрия мира (*x, y, z, t*) четырех измерений. Для классической механики мы имеем мир Ньютона N_4, для механики Einstein'а – мир Минковского M_4**.

Бесконечно удаленные элементы мира образуют его абсолют.

Абсолютом мира Ньютона служит обыкновенное трехмерное Евклидово пространство; абсолютом последнего – мнимое коническое сечение (шаровой круг).

Абсолютом мира Минковского служит трехмерное пространство Лобачевского; абсолютом последнею – световая поверхность 2-го порядка.

Так как Геометрией Лобачевского определяются метрические свойства мира Минковского, а эти свойства выражают законы принципа относительности, то можно сказать, что **Геометрия пространства Лобачевского трех измерений определяет законы механики Einstein'а**.

В том же смысле **Геометрия Евклидова пространства трех измерений определяет законы механики Ньютона**.

* * *

Со времени моего доклада Московскому Мат. Общ. 29 апр. 1923 г. появились две работы, имеющие отношение к вопросам, мною затронутым. Работа Н.А. Глаголева[21]: «Римановы многообразия проективного типа», в которой автор между прочим доказывает теорему об абсолюте мира Минковского помощью дифференциальной Геометрии, из выражения элемента собственного времени

$$d\tau^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2,$$

и работа L. Silberstein'a[22] «Projective Geometry of Galileian Space-Time».

[21] Математический Сборник т. 32.

[22] Phil. Mag. October 1925 p.p. 681–696.

Сизенов В.А.

Прямолинейное движение тела под действием постоянной силы

Введение

Цель настоящей статьи – на основе уравнений классической механики и гипотезы Луи де Бройля вывести формулу скорости тела, общую как для классической механики, так и для механики больших скоростей, а затем с позиции полученной формулы рассмотреть уравнения механики для неподвижной инерциальной системы отсчёта.

§1. Скорость

В соответствии с соотношением Луи де Бройля [1,[23] формула (24-5) $p = h / \lambda$ и $E = h \cdot f$, стр. 429] с увеличением скорости любых материальных частиц их волновые свойства меняются, и на изменение этих свойств тратится энергия. Следовательно, если к телу приложена сила F, то какая-то составляющая этой силы будет направлена на изменение волновых свойств частиц, образующих это тело. Математически определим эту составляющую следующей формулой:

$$F_w = f(v) \cdot F,$$

где F – сила, приложенная к телу;

F_w – составляющая силы F, изменяющая параметры волновых свойств частиц;

$f(v) < 1$ – безразмерный коэффициент пропорциональности, зависящий от скорости движения тела v.

В классической механике движение материального тела можно рассматривать как упорядоченное перемещение в пространстве элементарных частиц, образующих это тело. Рассмотрим случай одномерного движения. Пусть тело массой m находится в состоянии покоя в инерциальной системе отсчёта (ИСО) с осями декартовых координат x, y, z, которую будем считать неподвижной. Приложим к телу в направлении оси x силу $\vec{F}$ и определим её следующим образом:

$$\vec{F} = \vec{F}_v + \vec{F}_w,$$

где $\vec{F}_v$ – составляющая силы $\vec{F}$, изменяющая скорость v тела.

Предположим, что векторы сил $\vec{F}$, $\vec{F}_v$ и $\vec{F}_w$ параллельны и направлены в одну сторону. Исходя из этого, можно записать:

$$F = F_v + F_w = F_v + f(v) \cdot F \quad . \tag{1.1}$$

Рассмотрим случай, когда $f(v) = (\alpha \cdot v)^2$, где α является коэффициентом пропорциональности. При выполнении этого условия часть полученных в настоящей статье соотношений хорошо согласуется с соответствующими им уравнениями релятивистской механики. Для этого случая формулу (1.1) можно переписать в следующем виде:

$$F_v = F \cdot [1 - (\alpha \cdot v)^2] \quad . \tag{1.2}$$

Так как сила F_v направлена на изменение скорости тела v, то согласно второму закону Ньютона [1, стр. 53] для неё можно записать

$$F_v = \frac{dP}{dt} = m \cdot \frac{dv}{dt} \quad , \tag{1.3}$$

[23] Орир Дж. *Физика*, Т.1, 2; / Дж. Орир – М.: МИР, 1981 – 622 с.

где $P = mv$ – импульс тела; (1.3а)
m – масса тела; v – скорость тела; t – время.

Подставляя (1.2) в (1.3), получим:

$$F_v = F \cdot [1 - (\alpha \cdot v)^2] = m \cdot \frac{dv}{dt} \quad . \tag{1.4}$$

Из выражения (1.4) следует, что

$$F = \frac{F_v}{1 - (\alpha \cdot v)^2} = \frac{m}{1 - (\alpha \cdot v)^2} \cdot \frac{dv}{dt} \quad . \tag{1.5}$$

Решая дифференциальное уравнение (1.5) относительно скорости тела v при $F = const$ получим:

$$v = \frac{1}{\alpha} \cdot (1 - k \cdot e^{-\frac{2F\alpha}{m} \cdot t}) \cdot (1 + k \cdot e^{-\frac{2F\alpha}{m} \cdot t})^{-1}.$$

Постоянную интегрирования $k = 1$ найдём из условия, что при $t = 0$ начальная скорость тела $v = 0$. Коэффициент пропорциональности $\alpha = 1/c$ найдём из условия, что при $t = \infty$ скорость тела бесконечно близка к предельной скорости движения тел, которую обозначим буквой c. Соответственно текущая скорость тела определится следующим выражением:

$$v = c \cdot (1 - e^{-\frac{2F \cdot t}{m \cdot c}}) \cdot (1 + e^{-\frac{2F \cdot t}{m \cdot c}})^{-1} = c \cdot (1 - e^{-2 \cdot \chi}) \cdot (1 + e^{-2 \cdot \chi})^{-1} \quad , \tag{1.6}$$

где c – предельная скорость движения тел;
t – время действия на тело внешней силы;

$$\chi = \frac{F}{m \cdot c} \cdot t = 0,5 \cdot [\ln(1 + v/c) - \ln(1 - v/c)] \quad . \tag{1.7}$$

Из формулы (1.7) следует, что χ (хи) является безразмерной величиной.

С помощью гиперболических функций [2,[24] стр. 132] формулу (1.6) для скорости тела можно переписать в следующем виде:

$$v = c \cdot \mathrm{th}\chi \quad , \tag{1.8}$$

где $\mathrm{th}\,\chi = \mathrm{sh}\,\chi / \mathrm{ch}\,\chi$ – тангенс гиперболический χ;
$\mathrm{sh}\chi = 0,5 \cdot (e^{\chi} - e^{-\chi})$ – синус гиперболический χ;
$\mathrm{ch}\chi = 0,5 \cdot (e^{\chi} + e^{-\chi})$ – косинус гиперболический χ.

Параметру χ по аналогии с названиями, принятыми в тригонометрии, присвоим наименование гиперболический угол. Функцию $\chi(t)$ по аналогии с функцией тригонометрического угла, изменяющегося во времени, опишем следующим уравнением:

$$\chi(t) = \omega \cdot t + \varphi \quad , \tag{1.8а}$$

где $\omega = F / mc$ – скорость изменения во времени гиперболического угла;
φ – начальное значение гиперболического угла (фаза).

Формула (1.7) устанавливает однозначное соответствие между гиперболическим углом χ и скоростью тела v.

Если постоянная сила F будет приложена к телу в сторону, противоположную направлению оси x, то формула (1.8) запишется в следующем виде:

$$v = c \cdot \mathrm{th}(-\chi) = -c \cdot \mathrm{th}\chi \quad . \tag{1.8б}$$

То есть тела с одинаковыми χ вне зависимости от направления своего движения имеют по абсолютной величине одинаковые скорости относительно неподвижной ИСО.

В уравнениях классической механики $v << c$ и соответственно $\chi << 1$. При $\chi << 1$ соотношение (1.8) запишется в следующем виде:

---

[24] Двайт Г.Б. *Таблицы интегралов и другие математические формулы* / Г.Б. Двайт – М.: Наука, 1973 – 228 с.

$$v \approx c \cdot \chi = a \cdot t \quad , \tag{1.8в}$$

где $a = F/m = F_{v=0}/m$ – начальное ускорение;

$F_{v=0} = F$ – сила F_v при скорости тела v равной нулю.

Уравнение (1.8), полученное с помощью второго закона Ньютона, не является новым. Аналогичное уравнение было использовано в [3,[25] формулы (2.27), (2.28), стр. 60] при выводе «преобразований Лоренца как следствия инвариантности интервала между событиями». Однако в [3] не найдено конкретной формулы для гиперболического угла, а сам угол в [3] получил название «параметр скорости» и обозначение ϑ.

§2. Ускорение

Продифференцировав выражение (1.6) по времени, найдём формулу для ускорения:

$$a(v) = \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} \cdot [1 - (v/c)^2] = a \cdot [1 - (v/c)^2] = a / ch^2\chi \quad . \tag{2.1}$$

Полученная формула (2.1) хорошо согласуется с исходным уравнением (1.4). При $\chi \ll 1$ $a(v) \approx a$.

§3. Сила

В настоящей статье природа силы F нас не интересует. Формулы для силы F и её составляющей F_w с помощью гиперболических функций можно представить в следующем виде:

$$F = F_v \cdot ch^2\chi \quad , \tag{3.1}$$

$$F_w = F_v \cdot sh^2\chi \quad . \tag{3.2}$$

где F_v – составляющая силы F, изменяющая скорость v тела.

Для классической механики (при $\chi \ll 1$) сила $F \approx F_v$, а $F_w \approx 0$.

Формулы (3.1) и (3.2) были получена на основании гипотезы Луи де Бройля, в предположении, что согласно третьему закону Ньютона существует некая сила $F_k = - F_w$, препятствующая равномерному изменению скорости тела. То есть имеется сила, ослабляющая или демпфирующая в этом отношении силу F. Если бы её не было, то ничто не мешало бы телу разгоняться под действием постоянной силы F до бесконечной скорости. Релятивистское торможение ускоряемых частиц, обнаруженное В. Кауфманом в 1902 году [4,[26] стр. 17] говорит о том, что такая сила в природе существует. Поэтому силу F_k можно, по-видимому, классифицировать как демпфирующую силу Кауфмана.

Гипотеза Луи де Бройля (соотношение $p = h / \lambda$) лежит в основе квантовой механики [1, стр.438]. Так почему бы этой же гипотезе (соотношение $E = h \cdot f$) не найти применение и в механике высоких скоростей? Тем более что и А. Эйнштейн отметил, что «теорию масштабов и часов следовало бы выводить из основных уравнений (учитывая, что эти предметы имеют атомную структуру и движутся), а не считать её независимой от них» [5,[27] стр. 280]. Кроме того, в [6,[28] стр. 268] подчёркивается, что «справедливость соотношения ($E = h \cdot \nu$, (69.5)) для любых частиц вытекает из согласия с опытом тех результатов, которые с его помощью установлены в современной атомной и ядерной физике». Природа волн де Бройля в настоящей статье нас не интересует. Достаточен тот факт, что с увеличением скорости частиц меняется частота волн де Бройля и на изменение этой частоты тратится энергия $E = h \cdot f$.

---

[25] Угаров В.А. *Специальная теория относительности* / В.А. Угаров – М.: Наука, 1977 – 384 с.

[26] Черний А.Н. *Обратный гравитационный эффект*; Геодезия и картография, 1996, № 10, с. 13–19.

[27] Эйнштейн А. *Автобиографические заметки*, Собрание научных трудов, т. 4 / Альберт Эйнштейн – М.: Наука, 1967, стр. 259–293.

[28] Яворский Б.М. *Основы физики*, Т. 2 / Б.М. Яворский, А.А. Пинский – М.: Физматлит, 2000 – 574 с.

§4. Импульс силы

В соответствии с [1, формула (7.3), стр. 102] импульс силы, сообщаемый телу за время от t_1 до t_2, определяется как

$$I \equiv \int_{t_2}^{t_2} F dt \cdot$$

Для постоянной силы F соотношение импульса силы с учётом формулы (1.7) перепишется следующим образом:

$$I_{12} = \int_{t_1}^{t_2} F dt = F(t_2 - t_1) = m \cdot c \cdot (\chi_2 - \chi_1) = m \cdot c \cdot \chi_{12} \quad . \tag{4.1}$$

Отсюда следует, что

$$\chi_2 = \chi_1 + \chi_{12} = \chi_1 + \frac{I_{12}}{mc} \quad . \tag{4.1a}$$

То есть сообщаемый телу импульс силы однозначно определяет изменение гиперболического угла χ, а, следовательно, как и в классической механике, он однозначно определяет изменение скорости тела. Свойства гиперболического угла комментируются в [3, стр. 163] следующим образом: «В релятивистском случае следует рассматривать не приращение скорости, а приращение параметра скорости, поскольку параметры скорости складываются (аддитивны), а скорости нет (см. (3.37)). Выпишем связь между скоростью и параметром скорости ϑ (см. (2.27), (2.28)): $\mathrm{th}\vartheta = \beta$; $\mathrm{ch}\vartheta = \gamma$; $\mathrm{sh}\vartheta = \gamma \cdot \beta$». Здесь согласно [3, формулы (3.15), стр. 83] $\beta = v/c$; $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$.

Для справки. В [3, стр. 95] формула (3.37) имеет следующий вид:

$$\beta \equiv \mathrm{th}\theta = \frac{\beta' + B}{1 + \beta' B} = -\frac{\mathrm{th}\theta' + \mathrm{th}\vartheta}{1 + \mathrm{th}\theta' \cdot \mathrm{th}\vartheta} = -\mathrm{th}(\theta' + \vartheta) \cdot$$

В [3, стр. 95] также отмечается, что «Это интересный результат. В классической теории складываются скорости, в релятивистской теории параметры скоростей; …».

Для силы F_v соотношение импульса силы с учётом формулы (3.1) перепишется следующим образом:

$$I(v)_{12} = \int_{t_1}^{t_2} F_v dt = m \cdot c \cdot \int_{\chi_1}^{\chi_2} \mathrm{ch}^{-2}\chi \cdot d\chi = m \cdot c \cdot (\mathrm{th}\chi_2 - \mathrm{th}\chi_1) = m \cdot (v_2 - v_1) \quad . \tag{4.2}$$

где $d\chi = \dfrac{F}{mc} dt$.

То есть для силы F_v связь между импульсом силы и изменением импульса (количества движения) тела ΔP остаётся такой же, как и в классической механике [1, формула (7.4), стр. 102]:

$$\int_{t_1}^{t_2} F_v \cdot dt = P_2 - P_1 = \Delta P \cdot$$

Из соотношения (4.2) следует, что

$$\Delta P = m \cdot (v_2 - v_1) = m \cdot V_{12} \quad . \tag{4.3}$$

Из формул (4.1), (4.1a) и (4.2) следует, что в механике больших скоростей могут складываться как гиперболические углы, так и сами скорости. Однако при сложении скоростей во избежание получения некорректных результатов нужно жёстко придерживаться соотношения (4.2).

§5. Импульс тела

Соотношение (1.3а) для импульса тела с учётом формулы (1.8) перепишется в следующем виде:

$$P = m \cdot v = m \cdot c \cdot \text{th}\chi \quad . \tag{5.1}$$

При $\chi << 1$ формула (5.1) примет следующий вид:

$$P = m \cdot c \cdot \chi = m \cdot v .$$

Второй закон Ньютона по отношению к силе F_V тоже остаётся прежним. Покажем это с помощью соотношения (2.1):

$$F_v = \frac{dP}{dt} = m \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{m \cdot a}{\text{ch}^2\chi} = \frac{F}{\text{ch}^2\chi} \quad . \tag{5.2}$$

§6. Кинетическая энергия

Приращение кинетической энергии, обусловленное действием на тело составляющей F_V внешней силы F, запишется в следующем виде [1, стр. 89]:

$$dW = F_v \cdot ds = F_v \cdot v \cdot dt = m \cdot \frac{dv}{dt} \cdot v \cdot dt = m \cdot v \cdot dv \quad . \tag{6.1}$$

Кинетическая энергия тела K изменяется на величину работы, которую совершает действующая на это тело сила F_V. Перепишем уравнение (6.1) в интегральной форме:

$$\int_0^W dW = \int_0^v m \cdot v \cdot dv \cdot$$

Отсюда получим:

$$W = 0{,}5 \cdot m \cdot v^2 = 0{,}5 \cdot m \cdot c^2 \cdot \text{th}^2\chi = 0{,}5 \cdot E_0 \cdot \text{th}^2\chi \quad , \tag{6.2}$$

где $E_0 = m \cdot c^2$.

Из соотношения (6.2) следует, что по отношению к силе F_V данное в классической механике определение кинетической энергии [1, формула (6.9) $K \equiv 0{,}5 \cdot m \cdot v^2$, стр.89] остаётся неизменным.

Для постоянной силы F соотношение (6.1) можно переписать следующим образом:

$$dW = F_v \cdot ds = (F / \text{ch}^2\chi) \cdot ds = F \cdot (ds / \text{ch}^2\chi) = F \cdot dS \quad , \tag{6.3}$$

где $dS = ds / \text{ch}^2\chi = (v / \text{ch}^2\chi) \cdot dt$.

Из формулы (6.3) следует, что с увеличением скорости тела механическая работа, производимая силой F за одинаковые по длительности интервалы времени, уменьшается.

Приращение кинетической энергии, обусловленное действием на тело силы F, запишется в следующем виде:

$$W = F \cdot \int_0^t \frac{v}{\text{ch}^2\chi} dt = m \cdot c^2 \cdot \int_0^\chi \frac{\text{th}\chi}{\text{ch}^2\chi} d\chi = 0{,}5 \cdot mc^2 \cdot \text{th}^2\chi \cdot$$

Полученное соотношение совпадает с выражением (6.2)

§7. Энергия

Приращение полной энергии, обусловленное действием на тело внешней силы F, запишется в следующем виде:

$$dE = F \cdot v \cdot dt = \frac{m \cdot v}{1 - (v / c)^2} \cdot dv \quad . \tag{7.1}$$

Перепишем уравнение (7.1) в интегральной форме:

$$\int_0^E dE = \int_0^v \frac{mv}{1-(v/c)^2} \cdot dv \cdot$$

Отсюда получим:

$$E = -0{,}5 \cdot m \cdot c^2 \cdot \ln[1-(v/c)^2] = m \cdot c^2 \cdot \ln(ch\chi) \quad . \qquad (7.2)$$

При $v << c$ формула (7.2) приобретёт следующий вид:

$$E \approx 0{,}5 \cdot m \cdot v^2 .$$

Формулу (7.2) можно также переписать в следующем виде:

$$E = E_0 \cdot [\chi + \ln(1+e^{-2\chi}) - \ln 2] \quad . \qquad (7.3)$$

При $\chi >> 1$ формула (7.3) приобретёт следующий вид:

$$E \cong E_0 \cdot (\chi - \ln 2) \approx \chi \cdot E_0 \quad . \qquad (7.4)$$

Приращение волновой энергии, обусловленное действием на тело составляющей F_w внешней силы F, запишется в следующем виде:

$$E_w = E - K = E_0 \cdot [\ln(ch\chi) - 0{,}5 \cdot th^2\chi] \quad . \qquad (7.5)$$

При $\chi >> 1$ формула (7.5) приобретёт следующий вид:

$$E_w \cong E_0 \cdot (\chi - 1{,}2) \approx \chi \cdot E_0 \quad . \qquad (7.6)$$

§8. Заключение

В статье вводится новое определение силы F, в котором учитывается корпускулярно-волновой дуализм природы вещества. Согласно этому определению сила F разбивается на составляющие F_V и F_W . Причём составляющая F_V направлена на изменение скорости тела, а составляющая F_W направлена на изменение волновых свойств частиц, образующих тело. Если по отношению к силе F_V соблюдаются все законы классической механики, то по отношению к силе F они соблюдаются лишь частично. Поэтому для силы F вводится новое понятие импульса силы и соответствующее ему правило сложения скоростей (§4). Кроме того, появляется новая формула полной энергии, в которой учитываются как механическая, так и волновая энергии тела (§7). Таким образом, введение нового определения силы F приводит к тому, что уже в уравнениях классической механики начинает учитываться волновая природа вещества.

Список литературы

1. Орир Дж. *Физика*, Т.1, 2; / Дж. Орир – М.: МИР, 1981 – 622 с.
2. Двайт Г.Б. *Таблицы интегралов и другие математические формулы* / Г.Б. Двайт – М.: Наука, 1973 – 228 с.
3. Угаров В.А. *Специальная теория относительности* / В.А. Угаров – М.: Наука, 1977 – 384 с.
4. Черний А.Н. *Обратный гравитационный эффект*; Геодезия и картография, 1996, № 10, с. 13–19.
5. Эйнштейн А. *Автобиографические заметки*, Собрание научных трудов, т. 4 / Альберт Эйнштейн – М.: Наука, 1967, стр. 259–293.
6. Яворский Б.М. *Основы физики*, Т. 2 / Б.М. Яворский, А.А. Пинский – М.: Физматлит, 2000 – 574 с.

Отослана в редакцию 26.11.2007 г.

Опубликована: Сизенов В.А. *Прямолинейное движение тела под действием постоянной силы*. «Актуальные проблемы современной науки», № 1, 2008 – М.: Изд. «Компания Спутник +», стр. 156–162.

Сизенов В.А.

Преобразования относительно инерциальных систем отсчёта

Введение

Цель настоящей статьи – вывести формулу сложения скоростей относительно неподвижной инерциальной системы отсчёта (ИСО) и на её основе получить правила преобразования физических величин при переходе от одной инерциальной системы отсчёта к другой.

В статье [1][29] рассматривалось движение тела постоянной массы, к которому была приложена внешняя постоянная сила F. Механизм действия на тело силы F определялся скоростью движения тела относительно неподвижной инерциальной системы отсчёта (ИСО). Выпишем из [1] соотношения, которые нам могут потребоваться.

1) Скорость v движения тела относительно неподвижной ИСО

$$v = c\cdot(1-e^{-2\chi})\cdot(1+e^{-2\chi})^{-1} = c\cdot \operatorname{th}\chi \quad , \tag{0.1}$$

где c – предельная скорость движения тел относительно неподвижной ИСО;
χ – гиперболический угол (параметр скорости).

$$\chi = \frac{F}{m\cdot c}\cdot t = \frac{a}{c}\cdot t = 0,5\cdot[\ln(1+v/c)-\ln(1-v/c)] \quad , \tag{0.2}$$

где t – время действия на тело внешней постоянной силы F;
a = F / m – начальное ускорение тела относительно неподвижной ИСО;
m – масса тела.

2) Ускорение тела относительно неподвижной ИСО

$$a(v) = \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}\cdot[1-(v/c)^2] = a/\operatorname{ch}^2\chi \quad . \tag{0.3}$$

3) Постоянная внешняя сила F и её составляющие

$$\vec{F} = \overrightarrow{F_v} + \overrightarrow{F_w} \quad , \tag{0.4}$$

$$F = F_v\cdot \operatorname{ch}^2\chi \quad , \tag{0.4а}$$

$$F_w = F_v\cdot \operatorname{sh}^2\chi \quad , \tag{0.4б}$$

где F_v – составляющая силы F, изменяющая скорость v тела;
F_w – составляющая силы F, изменяющая параметры волновых свойств частиц, образующих тело. В предельном случае тело может состоять и из одной частицы.

4) Импульс постоянной внешней силы F

$$I_{12} = \int_{t_1}^{t_2} F dt = F\cdot(t_2-t_1) = m\cdot c\cdot(\chi_2-\chi_1) = m\cdot c\cdot\chi_{12} \quad . \tag{0.5}$$

$$\chi_2 = \chi_1 + \chi_{12} = \chi_1 + I_{12}/(m\cdot c) \quad . \tag{0.5а}$$

5) Импульс силы F_v, составляющей постоянной внешней силы F

$$I(v)_{12} = \int_{t_1}^{t_2} F_v dt = m\cdot c\cdot(\operatorname{th}\chi_2 - \operatorname{th}\chi_1) = m\cdot v_2 - m\cdot v_1 \quad . \tag{0.6}$$

6) Полная энергия тела относительно неподвижной ИСО

$$E = m\cdot c^2\cdot\ln(\operatorname{ch}\chi) = E_0\cdot\ln(\operatorname{ch}\chi) \quad . \tag{0.7}$$

[29] Приведена выше в настоящем сборнике.

При $\chi >> 1$ формула (0.7) приобретает следующий вид:

$$E \approx \chi \cdot E_0 \quad . \tag{0.7a}$$

§1. Сложение скоростей

На рисунке 1 представлены три инерциальные системы отсчёта: ИСО, ИСО1 и ИСО2 с осями декартовых координат (x, y, z), (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) соответственно.

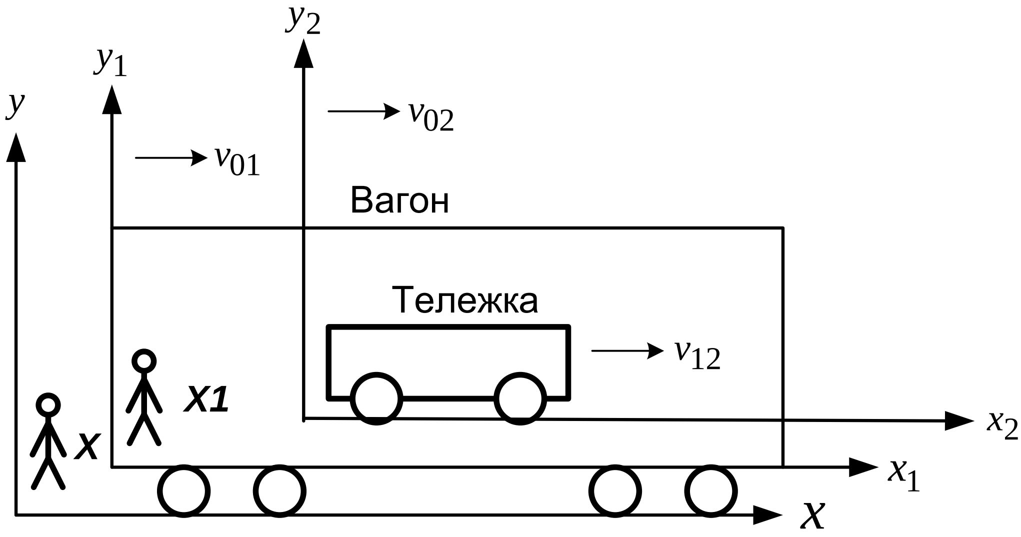


Рисунок 1 – Инерциальные системы ИСО (x, y, z), ИСО1 (x_1, y_1, z_1) и ИСО2 (x_2, y_2, z_2). Координаты z, z_1 и z_2 направлены перпендикулярно рисунку и условно не показаны. В начале координат систем ИСО и ИСО1 соответственно находятся наблюдатели X и X1.

Систему ИСО будем считать неподвижной. Система ИСО1, в которой находится вагон, движется вправо относительно ИСО со скоростью v_{01}. Система ИСО2, в которой находится тележка (тело B) также движется вправо со скоростью v_{12} относительно ИСО1 (вагона) и со скоростью v_{02} относительно ИСО. Начала координат трёх инерциальных систем ИСО, ИСО1 и ИСО2 в начальный момент времени $t_0 = t_{01} = t_{02} = 0$ совпадают, а скорость относительного движения v_{01} (v_{02} и v_{12}) направлена вдоль оси x (x_1 или x_2). Рисунок 1 является условным и приведён для наглядности. То есть здесь предполагается, что скорости v_{01}, v_{02} и v_{12} мысленно могут быть сравнимы с предельной скоростью c. Под наблюдателями могут пониматься измерительные приборы. Идея рисунка взята из [2,[30] рис. 9.1, стр. 139].

Рассмотрим упрощённо и кратко общие свойства инерциальных систем отсчёта. При рассмотрении будем руководствоваться определением [3,[31] стр.30]: «Существуют системы отсчёта, относительно которых все тела, не взаимодействующие с другими телами, движутся прямолинейно и равномерно. Системы отсчёта, удовлетворяющие этому принципу, называются инерциальными системами». Само «понятие инерциальной системы является абстракцией …» [3, стр.30], поэтому для того, чтобы придать инерциальной системе свойства, конкретизируем её. Мысленно предположим, что существует трёхмерное пространство, представляющее собой некую однородную среду. Мысленно поместим в это пространство неоднородности, называемые телами. Под телом мы будем понимать объект, масса которого сосредоточена в одной точке (в центре масс). Если теперь привязать начало координат инерциальной системы к какому-либо телу (точке отсчёта), покоящемуся относительно однородной среды, то этой системе можно придать свойства пространства, а именно свойства неподвижности и протяжённости. Соответственно все тела, покоящиеся относительно однородной среды, будут принадлежать этой системе, и иметь строго определённые координаты относительно точки отсчёта.

Для того чтобы в пространстве появилось время, мысленно заставим тела перемещаться равномерно и прямолинейно относительно однородной среды, причём с разными скоростями. Если теперь привязать начало координат инерциальной системы к телу, движущемуся относи-

[30] Орир Дж. *Физика*, Т.1, 2; / Дж. Орир – М.: МИР, 1981 – 622 с.
[31] Яворский Б.М. *Основы физики*, Т 1 / Б.М. Яворский, А.А. Пинский – М.: Физмалит, 2000 – 624 с.

тельно однородной среды, то этой системе можно придать свойство равномерного движения (скорости) относительно неподвижной ИСО. Таких движущихся инерциальных систем в соответствии с определением может быть бесчисленное множество, и каждой инерциальной системе будут принадлежать покоящиеся в ней тела.

Если какую-либо инерциальную систему рассматривать изолированно от других инерциальных систем, то время в такой системе течь не будет, потому что время предполагает наличие событий или действия. Чтобы ввести в инерциальную систему время, её нужно рассматривать в совокупности с другими системами. В качестве события в инерциальной системе определим момент перехода какого-либо тела из этой системы в другую или момент прибытия тела в эту систему. То есть под событием в инерциальной системе отсчёта будем понимать начальное изменение импульса тела относительно этой системы. В качестве единицы времени для инерциальной системы можно взять период любого равномерного циклически повторяющегося процесса. Например, период циклического ухода тела из инерциальной системы и его возвращения обратно. Определим время, текущее в какой-либо инерциальной системе, как собственное время этой системы. И соответственно быстроту перемещения тела из какой-либо инерциальной системы в соседнюю систему определим, как начальное ускорение тела относительно этой системы.

С целью привязки физических параметров (скорости, времени и т.д.) к инерциальным системам отсчёта для них в настоящей статье принята следующая система индексации: первая цифра индекса обозначает номер инерциальной системы отсчёта, по отношению к которой производится измерение величины физического параметра, вторая цифра обозначает номер системы, величина физического параметра которой измеряется. Также используются и более сложные индексы. Например, индекс (0)12 означает, что величина физического параметра ИСО2 измерена относительно ИСО1 из неподвижной ИСО.

Из рисунка 1 видно, что движение системы ИСО2 можно рассматривать как относительно ИСО1, так и относительно неподвижной ИСО. Скорости инерциальных систем ИСО1 и ИСО2 относительно неподвижной ИСО согласно (0.1) определятся соответственно следующими соотношениями:

$$v_{01} = c \cdot \mathrm{th}\chi_{01} \quad , \tag{1.1}$$

$$v_{02} = c \cdot \mathrm{th}\chi_{02} \quad . \tag{1.2}$$

Рассмотрим предысторию тела В (тележки). Мысленно предположим, что оно в какой-то момент времени покоилось в ИСО. Будем считать, что перенос тела В из ИСО в другие системы осуществляется постоянной внешней силой F. Тогда для того чтобы это тело перешло из неподвижной инерциальной системы ИСО в систему ИСО1, ему в направлении движения ИСО1 согласно (0.5) нужно сообщить импульс силы I_{01}:

$$I_{01} = F \cdot T_{01} = m \cdot c \cdot \chi_{01} \quad , \tag{1.3}$$

где T_{01} – интервал времени, необходимый для разгона тела В относительно ИСО от скорости равной нулю до скорости v_{01}.

Аналогично, для того чтобы тело В перешло из ИСО в систему ИСО2, ему в направлении движения ИСО2 нужно сообщить импульс силы I_{02}:

$$I_{02} = F \cdot T_{02} = m \cdot c \cdot \chi_{02} \quad , \tag{1.4}$$

где T_{02} – интервал времени, необходимый для разгона тела В относительно ИСО от скорости равной нулю до скорости v_{02}.

Кривая разгона тела В постоянной внешней силой F относительно неподвижной ИСО приведена на рисунке 2. Из рисунка 2 видно, что интервал времени, необходимый для разгона относительно ИСО тела В от скорости v_{01} до скорости v_{02}, определится формулой:

$$T_{(0)12} = T_{02} - T_{01} \quad .$$

Соответственно для перехода тела В из системы ИСО1 в систему ИСО2 ему в направлении движения ИСО2 нужно сообщить импульс силы:

$$I_{(0)12} = I_{02} - I_{01} = m \cdot c(\chi_{02} - \chi_{01}) = m \cdot c \cdot \chi_{(0)12} = F \cdot T_{(0)12} \quad . \tag{1.5}$$

Если этот импульс силы сообщить телу В тогда, когда оно покоится не в ИСО1, а в ИСО, то оно соответствии с (0.1) приобретёт относительно ИСО скорость

$$V_{(01)2} = c \cdot \mathrm{th}\chi_{(0)12} .$$

Найдём соотношение, связывающее скорости v_{01}, v_{02} и $V_{(01)2}$. Для этого формулу (1.2) перепишем в следующем виде:

$$v_{02} = c \cdot \mathrm{th}\chi_{02} = c \cdot \mathrm{th}(\chi_{01} + \chi_{(0)12}) \quad . \tag{1.6}$$

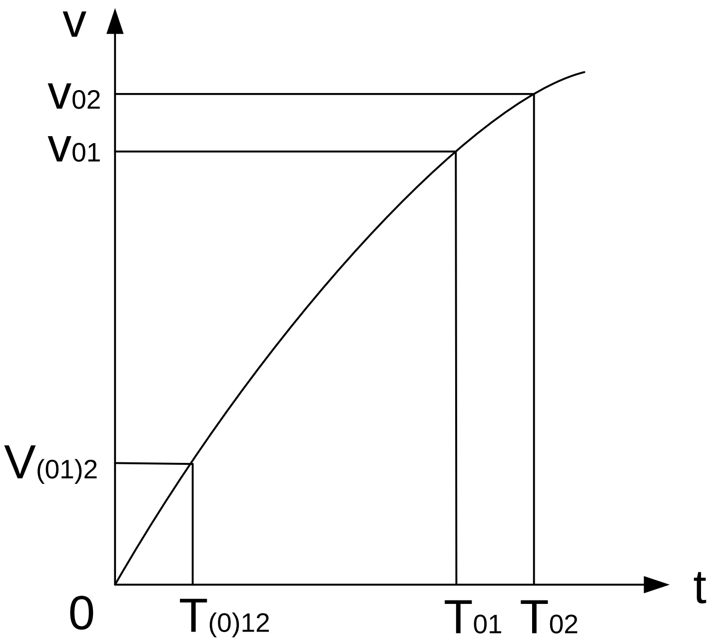


Рисунок 2 – Кривая разгона тела B постоянной внешней силой F относительно неподвижной ИСО.

Если телу B, покоящемуся в ИСО1, сообщить импульс силы $I_{(0)12}$ не в направлении движения ИСО1, а в противоположном, то $\chi_{(0)12}$ также поменяет знак, и формула (1.6) перепишется в следующем виде:

$$v_{02} = c \cdot \mathrm{th}\chi_{02} = c \cdot \mathrm{th}(\chi_{01} - \chi_{(0)12}) \quad . \tag{1.6а}$$

Для общего случая, объединив формулы (1.6) и (1.6а), получим:

$$v_{02} = c \cdot \mathrm{th}(\chi_{01} \pm \chi_{(0)12}) = c \cdot \frac{\mathrm{th}\chi_{01} \pm \mathrm{th}\chi_{(0)12}}{1 \pm \mathrm{th}\chi_{01} \cdot \mathrm{th}\chi_{(0)12}} \quad . \tag{1.7}$$

Согласно (0.1) уравнение (1.7) можно представить в следующем виде:

$$v_{02} = \frac{v_{01} \pm V_{(01)2}}{1 \pm (v_{01}/c) \cdot (V_{(01)2}/c)} \quad . \tag{1.7а}$$

Полученное соотношение (1.7а) похоже на релятивистское (или Эйнштейновское) правило сложения скоростей.

В соответствии с рисунком 2 движущееся со скоростью v_{01} тело B, при сообщении ему импульса силы $I_{(0)12}$, приобретёт относительно ИСО дополнительную скорость равную:

$$V_{(0)12} = v_{02} - v_{01} = V_{(01)2} \cdot [1 - (\frac{v_{01}}{c})^2] / (1 + \frac{v_{01} \cdot V_{(01)2}}{c^2}) \quad . \tag{1.8}$$

Для общего случая формулу (1.8) можно записать в следующем виде:

$$V_{(0)12} = \pm V_{(01)2} \cdot [(1 - (v_{01}/c)^2] / [1 \pm (v_{01}/c) \cdot (V_{(01)2}/c)] \quad . \tag{1.8а}$$

Если скорость $V_{(01)2}$ будет близка к предельной скорости c, то формула (1.8а) примет следующий вид:

$$V_{(0)12} \approx \pm c \cdot (1 \mp v_{01}/c) = \pm(c \mp v_{01}) \quad . \tag{1.8б}$$

§2. Замедление времени

Посмотрим на график, приведённый на рисунке 2, с точки зрения преобразования скорости тела В при переносе точки отсчёта из неподвижной ИСО ($v = 0$) в движущуюся ИСО1 ($v = v_{01}$). Для нахождения критериев такого преобразования рассмотрим ситуацию, при которой выполняется условие $\chi_{(0)12} << 1$. В этом случае изменение скорости в интервале времени $T_{02} - T_{01} = T_{(0)12}$ можно считать линейным, и, следовательно, для диапазона скоростей кривой разгона, ограниченного этим интервалом, будут действовать законы классической механики.

Так как при $\chi_{(0)12} << 1$ будет также выполняться условие $V_{(01)2} / c << 1$, то формула (1.8) примет следующий вид:

$$V_{(0)12} \cong V_{(01)2} \cdot [1 - (v_{01} / c)^2] = c \cdot \text{th}\chi_{(0)12} \cdot \text{ch}^{-2}\chi_{01} \quad , \tag{2.1}$$

где $\text{ch}^{-2}\chi_{01} = 1 - (v_{01} / c)^2 = \gamma^{-2}$.

При $\chi_{(0)12} << 1$ выполняется также и условие $\text{th}\,\chi_{(0)12} \approx \chi_{(0)12}$, поэтому соотношение (2.1) можно переписать в следующем виде (см. ф. (1.5)):

$$V_{(0)12} = c \cdot \chi_{(0)12} \cdot \text{ch}^{-2}\chi_{01} = a \cdot T_{(0)12} \cdot \text{ch}^{-2}\chi_{01} = a_{01} \cdot T_{(0)12} \quad , \tag{2.1а}$$

где a_{01} – начальное ускорение тела В относительно ИСО1 (см. ф. (0.3)).

По рисунку 2 определим путь, который бы прошло тело В относительно ИСО при разгоне его силой F от скорости равной нулю до скорости $V_{(01)2}$:

$$S_0 \approx 0{,}5 \cdot T_{(0)12} \cdot V_{(01)2} \approx 0{,}5 \cdot T_{(0)12} \cdot c \cdot \chi_{(0)12} = 0{,}5 \cdot a \cdot T^2_{(0)12} \quad .$$

Аналогично определим путь, который бы прошло тело В относительно ИСО1 при разгоне его силой F от скорости равной v_{01} до скорости v_{02}:

$$S_1 \approx 0{,}5 \cdot T_{(0)12} \cdot V_{(0)12} \approx 0{,}5 \cdot a_{01} \cdot T^2_{(0)12} = 0{,}5 \cdot a \cdot T^2_{(0)12} \cdot \text{ch}^{-2}\chi_{01} \quad .$$

Из полученных соотношений для S_1 и S_0 следует, что за один и тот же промежуток времени $T_{(0)12}$ одна и та же внешняя сила F на разных участках кривой разгона совершает неодинаковую работу ($S_1 < S_0$), что обусловлено неодинаковыми начальными условиями в ИСО и ИСО1. Для устранения этого несоответствия между ИСО и ИСО1 скомпенсируем уменьшение начального ускорения тела В относительно ИСО1 соответствующим замедлением времени в этой системе. Требуемую величину замедления времени в ИСО1 по отношению ко времени в ИСО определим из следующего соотношения:

$$S_0 = 0{,}5 \cdot a \cdot T^2_{(0)12} = 0{,}5 \cdot a_{01} \cdot T^2_{12} = 0{,}5 \cdot a \cdot T^2_{12} \cdot \text{ch}^{-2}\chi_{01} \quad , \tag{2.2}$$

где T12 – измеренный в единицах времени ИСО1 интервал времени, в течение которого тело В, имеющее начальную скорость v01, переместилось бы относительно ИСО1 под действием внешней силы F на расстояние S_0.

Из соотношения (2.2) следует, что

$$T_{12} = T_{(0)12} \cdot \text{ch}\chi_{01} \quad . \tag{2.3}$$

То есть время в ИСО1 (T_{12}) по отношению ко времени в ИСО ($T_{(0)12}$) замедлилось в $\text{ch}\,\chi_{01}$ раз, и это замедление времени, обусловленное реальным замедлением связанных с движением физических процессов, можно считать физической реальностью.

С учётом реального замедления времени (2.3) определим скорость v_{12} тела В относительно ИСО1, измеренную наблюдателем Х1:

$$v_{12} = a_{01} \cdot T_{12} = a_{01} \cdot T_{(0)12} \cdot \text{ch}\chi_{01} = V_{(0)12} \cdot \text{ch}\chi_{01} \quad . \tag{2.4}$$

Выражение (2.4) можно переписать следующим образом (см. ф. (2.1)):

$$v_{12} = V_{(01)2} / \text{ch}\chi_{01} = c \cdot \text{th}\chi_{(0)12} / \text{ch}\chi_{01} = c_1 \cdot \text{th}\chi_{12} \quad , \tag{2.4а}$$

где

$$\chi_{12} = F_{01} \cdot T_{12} / (m \cdot c_1) = F \cdot T_{(0)12} / (m \cdot c) = \chi_{(0)12} \quad ; \tag{2.4б}$$

$F_{01} = F_{v01} = F / \text{ch}^2\chi_{01}$ – внешняя постоянная сила в ИСО1;

$c_1 = c / \text{ch}\chi_{01}$ – предельная скорость относительно ИСО1. (2.4в)

Первый постулат Эйнштейна [4,[32] стр. 34] гласит, что «Все тождественные физические явления в инерциальных системах отсчёта при одинаковых начальных условиях протекают одинаково». В нашем случае одинаковые начальные условия для инерциальных систем отсчёта ИСО и ИСО1 достигаются замедлением времени в ИСО1, которое имеет такую же зависимость, как и в специальной теории относительности (СТО). Из соотношения (2.4б) следует, что при выполнении требования одинаковости начальных условий «гиперболический угол» χ (хи) при преобразованиях из одной инерциальной системы отсчёта в другую остаётся неизменным. Следовательно, соотношение v / c также будет инвариантным.

§3. Масштабирование

Ход времени для тел, скорость которых относительно ИСО во много раз меньше предельной скорости, можно считать одинаковым. То есть масштаб времени на интервале $T_{(0)12}$ при $(V_{(01)2} / c) \to 0$ можно считать постоянным и равным масштабу собственного времени ИСО. Обозначим собственное время неподвижной ИСО через t_0.

Аналогично ход времени для тел, скорость которых относительно ИСО1 во много раз меньше предельной скорости ($v_{12} << c$), также можно считать одинаковым. То есть масштаб времени на интервале $T_{12} = (T_{02} - T_{01}) \cdot \mathrm{ch}\,\chi_{01}$ при $(v_{12} / c) \to 0$ можно считать постоянным и равным масштабу собственного времени ИСО1. Обозначим собственное время ИСО1 через t_{01}. Отсюда

$$T_{12} / T_{(0)12} = t_{01} / t_0 \,.$$

То есть в соответствии с формулой (2.3) для собственного времени системы ИСО1 можно записать:

$$t_{01} = t_0 \cdot \mathrm{ch}\chi_{01} \quad . \tag{3.1}$$

В общем случае время T произвольной инерциальной системы (ИСОП) по отношению ко времени t_0, текущему в ИСО, будет определяться следующей формулой:

$$T = t_0 \cdot \mathrm{ch}\chi \quad . \tag{3.1a}$$

Соотношение $\mathrm{ch}\,\chi = T / t_0$, устанавливающее связь между единицей измерения времени ИСОП и единицей измерения времени неподвижной ИСО, определим в качестве масштаба времени. Масштаб времени ИСО1 определится соответственно следующей формулой:

$$M_{01} = t_{01} / t_0 = t_{01}^0 / t_0^0 = \mathrm{ch}\chi_{01} \quad , \tag{3.2}$$

где t_0^0 – одна секунда ИСО, единица измерения времени ИСО;

t_{01}^0 – одна секунда ИСО1, единица измерения времени ИСО1.

Соотношение t_p / t_q, устанавливающее связь между единицей измерения времени p-й ИСО(P) и единицей измерения времени q-й ИСО(Q) определим в качестве относительного масштаба времени. Например, относительный масштаб времени ИСО2 по отношению ко времени ИСО1 определится соответственно следующей формулой:

$$M_{12} = t_{02} / t_{01} = t_{02}^0 / t_{01}^0 = \mathrm{ch}\chi_{02} / \mathrm{ch}\chi_{01} = \kappa_{12} \cdot \mathrm{ch}\chi_{12} \quad , \tag{3.3}$$

где t_{02}^0 – одна секунда ИСО2, единица измерения времени ИСО2;

$\kappa_{12} = \dfrac{\mathrm{ch}\chi_{02}}{\mathrm{ch}\chi_{01} \cdot \mathrm{ch}\chi_{12}} = \dfrac{\mathrm{ch}(\chi_{01} + \chi_{12})}{\mathrm{ch}\chi_{01} \cdot \mathrm{ch}\chi_{12}} = 1 + \mathrm{th}\chi_{01} \cdot \mathrm{th}\chi_{12}$ – поправочный масштабирующий коэффициент.

Собственное время конкретной инерциальной системы должно течь одинаково, вне зависимости от того по отношению к какой инерциальной системе оно определено. Поэтому поправочный масштабирующий коэффициент κ_{12} логичнее относить к масштабу времени $\mathrm{ch}\,\chi_{12}$. Однако в некоторых случаях поправочный масштабирующий коэффициент удобнее относить к собственному времени инерциальной системы, например, $t_{1(2)} = t_{01} \cdot \kappa_{12}$. Определим такое время как условное или относительное собственное время инерциальной системы.

Операцию по нахождению соотношения, определяющего масштаб, назовём приведением к масштабу или масштабированием.

[32] Угаров В.А. *Специальная теория относительности* / В.А. Угаров – М.: Наука, 1977 – 384 с.

Соответственно при смене инерциальной системы отсчёта все физические параметры, зависящие от времени, должны масштабироваться. Под термином «физический параметр (например, скорость), измеренный относительно инерциальной системы отсчёта», будем понимать (если иное не оговорено особо), что этот физический параметр измерен в единицах времени этой системы. Отдавая дань сложившейся терминологии под термином «предельная скорость в инерциальной системе отсчёта» будем понимать предельную скорость, измеренную относительно этой системы.

§4. Сохранение численной величины предельной скорости *c* в различных инерциальных системах

Расстояние, пройденное телом B относительно системы ИСО1 за время t_{01}, определится следующим соотношением (см. ф. (2.4в) и (3.1)):

$$S = v_{12} \cdot t_{01} = c_1 \cdot t_{01} \cdot \mathrm{th}\chi_{12} = c \cdot t_0 \cdot \mathrm{th}\chi_{12} \quad . \tag{4.1}$$

Из формулы (4.1) следует, что

$$c_1 \cdot t_{01} = c \cdot t_0 \quad . \tag{4.1а}$$

То есть произведение предельной скорости на время при преобразованиях из одной инерциальной системы отсчёта в другую остаётся неизменным.

Исходя из инвариантности расстояния S, можно записать:

$$c_1 \cdot t_{01}^0 = c \cdot t_0^0 = S_c = \mathrm{const} \quad . \tag{4.1б}$$

Следовательно, с учётом замедления времени численное значение предельной скорости $c = S_c / t_0^0$ во всех инерциальных системах одинаково. Масштаб предельной скорости ИСО1 определится следующим соотношением:

$$c_1 / c = t_0 / t_{01} = t_0^0 / t_{01}^0 = 1 / \mathrm{ch}\chi_{01} \quad . \tag{4.1в}$$

Полученное соотношение не противоречит выражению (2.4в).

§5. Масштабирование скорости

Воспользовавшись соотношением (3.1) выведем правило масштабирования для скорости $v_{12} << c$:

$$v_{12} / V_{(01)2} = \frac{a_{01} \cdot t_{01}}{a \cdot t_0} = (\frac{t_0}{t_{01}})^2 \cdot \frac{t_{01}}{t_0} = \frac{t_0}{t_{01}} = \frac{c_1 \cdot \mathrm{th}\chi_{12}}{c \cdot \mathrm{th}\chi_{12}} = \frac{1}{\gamma} \quad . \tag{5.1}$$

Из полученного соотношения следует, что при сравнении соответствующих скоростей, измеренных относительно разных инерциальных систем отсчёта, они масштабируются так же, как и предельные скорости этих инерциальных систем, то есть по инвариантности пройденного телом пути:

$$v_{12} \cdot t_{01} = V_{(01)2} \cdot t_0 \quad . \tag{5.2}$$

Скорости v_{12} и $V_{(0)12}$, измеренные относительно инерциальной системы ИСО1 соответственно из ИСО1 и ИСО, при сравнении приводятся к одному масштабу, исходя из следующего соотношения.

$$v_{12} / V_{(0)12} = \frac{a_{01} \cdot t_{01}}{a_{01} \cdot t_0} = \frac{t_{01}}{t_0} = \gamma \quad . \tag{5.2а}$$

§6. Преобразование скорости

Перейдём теперь к рассмотрению общего случая, когда скорость v_{12} соизмерима с предельной скоростью. Предположим, что полученные правила масштабирования скорости действительны и для общего случая.

Собственное время системы ИСО2 можно выразить через собственное время ИСО1 следующим образом (см. ф. (3.3)):

$$t_{02} = t_{01} \cdot \kappa_{12} \cdot ch\chi_{12} = t_{1(2)} \cdot ch\chi_{12} \quad , \qquad (6.1)$$

где

$$t_{1(2)} = t_{01} \cdot \kappa_{12} = t_0 \cdot ch\chi_{01} \cdot (1 + th\chi_{01} \cdot th\chi_{12}) = t_0 \cdot \gamma \cdot \kappa_{12} \quad . \qquad (6.1а)$$

Время $t_{1(2)}$ здесь определено как относительное собственное время системы ИСО1 по отношению ко времени системы ИСО2. Соответственно скорость системы ИСО2 относительно ИСО1, определённая в единицах времени $t_{1(2)}$, по аналогии с соотношением (2.4а) выразится формулой:

$$v_{12} = c_{1(2)} \cdot th\chi_{12} \quad , \qquad (6.2)$$

где

$$c_{1(2)} = \frac{c \cdot t_0}{t_{1(2)}} = \frac{c}{ch\chi_{01} \cdot (1 + th\chi_{01} \cdot th\chi_{12})} = \frac{c}{\gamma \cdot \kappa_{12}} = \frac{c_1}{\kappa_{12}} \quad ; \qquad (6.2а)$$

Скорость $c_{1(2)}$, здесь определена как относительная предельная скорость в ИСО1 по отношению к предельной скорости в ИСО2.

По аналогии с соотношением (5.2) также можно записать:

$$v_{12} \cdot t_{1(2)} = V_{(01)2} \cdot t_0 \quad . \qquad (6.2б)$$

Для того, чтобы проводить математические операции со скоростями объектов, находящихся в разных инерциальных системах, скорости должны быть приведены к одному масштабу времени. Найдём соотношение, связывающее величину скорости v_{12} с величинами скоростей v_{01} и v_{02}. С учётом соотношения (1.8а), в котором величины скоростей $V_{(01)2}$, v_{01} и v_{02} измерены в единицах времени ИСО, можно записать (см. ф. (6.2б)):

$$v_{02} = v_{01} + \frac{V_{(01)2}}{\gamma^2 \cdot \kappa_{12}} = v_{01} + \frac{v_{12} \cdot t_{1(2)}}{t_0 \cdot \gamma^2 \cdot \kappa_{12}} = v_{01} + \frac{v_{12}}{\gamma} \quad . \qquad (6.3)$$

Отсюда

$$v_{12} = \gamma \cdot (v_{02} - v_{01}) \quad . \qquad (6.4)$$

Нетрудно заметить, что полученное соотношение (6.4) полностью аналогично выражению (2.4).

Кривая разгона тела B постоянной внешней силой F_{01} относительно ИСО1 в соответствии с формулой (6.2) опишется следующим соотношением.

$$v_1 = c_1 \cdot th\chi_1 / (1 + th\chi_{01} \cdot th\chi_1) = c_1 \cdot th\chi_1 / \kappa_{1x} \quad , \qquad (6.5)$$

где $\chi_1 = \frac{F_{01}}{m \cdot c_1} \cdot t_{01} = \frac{a_{01}}{c_1} \cdot t_{01}$ (см. ф. (2.4б)).

Соответственно формула ускорения тела B относительно ИСО1 будет иметь следующий вид:

$$a(v_1) = \frac{dv_1}{dt_{01}} = \frac{d(c_1 \cdot th\chi_1 / \kappa_{1x})}{d\chi_1} \cdot \frac{d\chi_1}{dt_{01}} = \frac{a_{01}}{ch^2\chi_1 \cdot \kappa_{1x}^2} \quad .$$

Отсюда начальное ускорение тела B относительно ИСО2 выразится следующей формулой:

$$a_{12} = a_{01} / (ch^2\chi_{12} \cdot \kappa_{12}^2) = a / ch^2\chi_{02} = a_{02} \quad .$$

То есть формулы (6.5) и (0.1) не противоречат друг другу и описывают одну и ту же функциональную зависимость (кривую разгона). Следовательно, полученные в §5 правила масштабирования скорости можно распространить и на общий случай.

Так как масса тела не зависит от масштаба времени и поэтому инвариантна, то преобразования импульса тела (P = m · v) сводятся к преобразованиям скорости.

§7. Преобразование координат

Для вывода преобразования координат воспользуемся рисунком 1. Соотношение (6.1а) фактически является формулой преобразования времени. Перепишем его в следующем виде:

$$t_1 = t_{1(2)} = t_0 \cdot \gamma \cdot (1 + \mathrm{th}\chi_{01} \cdot \mathrm{th}\chi_{12}) = t_0 \cdot \gamma \cdot \kappa_{12} \quad . \tag{7.1}$$

Скорость системы ИСО2 (тела В) относительно ИСО согласно формул (1.7а) и (6.2б) будет иметь следующий вид:

$$v_{02} = (v_{01} + V_{(01)2})/(1 + v_{01} \cdot V_{(01)2} / c^2) = [v_{01} + v_{12} \cdot (t_1 / t_0)] / \kappa_{12} \quad , \tag{7.2}$$

где $\kappa_{12} = 1 + \mathrm{th}\chi_{01} \cdot \mathrm{th}\chi_{12} = 1 + (v_{01} / c^2) \cdot v_{12} \cdot (t_1 / t_0)$.

Умножив левую и правую часть уравнения (7.2) соответственно на левую и правую часть соотношения $t_1 = t_0 \cdot \gamma \cdot \kappa_{12}$, получим:

$$v_{02} \cdot t_1 = \gamma \cdot (v_{12} \cdot t_1 + v_{01} \cdot t_0) \quad . \tag{7.3}$$

Перепишем соотношения (7.3) и (7.1) в следующем виде:

$$x = \gamma \cdot x_1 + \gamma \cdot v_{01} \cdot t_0 \quad , \tag{7.4}$$

$$t_1 = \gamma \cdot t_0 + \gamma \cdot \frac{v_{01}}{c^2} \cdot x_1 \quad , \tag{7.5}$$

где $x = v_{02} \cdot t_1$; $x_1 = v_{12} \cdot t_1$.

Полученные уравнения (7.4), (7.5) аналогичны преобразованиям Лоренца.

§8. Скорость света

Скорость света c = 2,998 · 10^8 м/с является предельной скоростью движения частиц [2, стр. 124]. Проведём оценку полученных в статье [1] соотношений на непротиворечивость этому утверждению. Для этого воспользуемся данными, приведёнными в [5, стр. 302–303]. Световая волна представляет собой большое количество фотонов. Максимум излучения Солнца приходится на свет с длиной волны λ = 4,6 · 10^{-7} м, что соответствует частоте f = 6,5 · 10^{14} Гц. Энергия таких фотонов E = h · f = 4,3 · 10^{-19} Дж, где h = 6,63 · 10^{-34} Дж · с – постоянная Планка. Верхняя граница «массы покоя» фотона $m_\gamma \approx 10^{-60}$ г [4, стр. 267]. Определим χ_γ фотона. В соответствии с соотношением (0.7а) можно записать:

$$E_\gamma \approx \chi_\gamma \cdot E_0 = \chi_\gamma \cdot m_\gamma \cdot c^2 = h \cdot f \quad .$$

Отсюда χ_γ будет равно:

$$\chi_\gamma = \frac{h \cdot f}{m_\gamma \cdot c^2} \approx \frac{4{,}3 \cdot 10^{-19}}{10^{-60} \cdot 9 \cdot 10^{16}} \approx 4{,}8 \cdot 10^{24} \quad . \tag{8.1}$$

Соответственно скорость фотонов света V_γ относительно неподвижной ИСО, определённая по формуле (0.1), будет равна:

$$V_\gamma = c \cdot \frac{(1 - e^{-\chi_\gamma}) \cdot (1 + e^{-\chi_\gamma})}{1 + e^{-2 \cdot \chi_\gamma}} \approx c \cdot (1 - e^{-\chi_\gamma}) \quad . \tag{8.2}$$

То есть согласно полученных в статье [1] соотношений скорость света чрезвычайно мало отличается от предельной скорости c:

$$V_\gamma \cong c \cdot (1 - e^{-4{,}8 \cdot 10^{24}}) \cong c \quad . \tag{8.2г}$$

Рассмотрим движение двойной звёзды. Пусть одна из звёзд движется по направлению к Земле со скоростью V_1 = 1,5 · 10^6 м/с << c, а другая с такой же скоростью удаляется. Пренебрегая скоростью Земли относительно неподвижной ИСО, определим χ_1 этих звёзд (см. ф. 0.2):

$$\chi_1 = 0{,}5 \cdot [\ln(1 + V_1 / c) - \ln(1 - V_1 / c)] \approx \frac{V_1}{c} = 0{,}5 \cdot 10^{-2} \quad .$$

Соответственно скорости фотонов этих звёзд V_{1y} и V_{2y}, отправленных по направлению к Земле, будут равны

$$V_{1\gamma} \approx c(1 - e^{-(\chi_\gamma + \chi_1)}) \quad ,$$

$$V_{2\gamma} \approx c(1 - e^{-(\chi_\gamma - \chi_1)}) \quad .$$

Если световые волны одной частоты отправлены со звёзд одновременно, то к Земле они прибудут через время t с разностью хода ΔS_y:

$$\Delta S_\gamma = V_{1\gamma}\cdot t - V_{2\gamma}\cdot t \approx c\cdot t\cdot e^{-(\chi_\gamma-\chi_1)}\cdot(1-e^{-2\chi_1}) \approx 2\cdot c\cdot t\cdot \chi_1\cdot e^{-\chi_\gamma},$$

$$t \approx \frac{\Delta S_\gamma\cdot e^{\chi_\gamma}}{2\cdot\chi_1\cdot c}.$$

Приняв во внимание, что один Земной год составляет ≈ 3,15 · 10^7 секунд, найдём время, в течение которого фотоны достигнут разности хода ΔS_y в один метр:

$$t = \frac{e^{4{,}8\cdot 10^{24}}}{10^{-2}\cdot 3\cdot 10^8} \approx \frac{10^{2\cdot 10^{24}}}{3\cdot 10^6} \approx 10^{(2\cdot 10^{24}-14)} \quad \text{лет.}$$

Это время многократно превышает возраст нашей Вселенной (Вселенная начала расширяться примерно 15–20 миллиардов лет назад [5, стр. 162]). Из приведённого примера видно, что формулы, полученные в [1], не противоречат также и астрономическим наблюдениям.

Соотношения, полученные в настоящей статье, также не противоречат и результатам опыта Майкельсона–Морли. Для доказательства воспользуемся рисунком 1. Мысленно предположим, что Земля движется относительно ИСО в направлении оси x_1 со скоростью ИСО1 $v_{01} << c$. Тогда выражения для скоростей фотонов света, измеренных наблюдателем X относительно Земли, в соответствии с формулой (1.8б) запишутся в следующем виде:

а) для фотонов движущихся в направлении оси x_1:

$$V_{(0)12+} \approx c\cdot(1-v_{01}/c);$$

б) для фотонов движущихся в сторону противоположную направлению оси x_1:

$$V_{(0)12-} \approx -c\cdot(1+v_{01}/c).$$

В соответствии с формулой (2.4) эти скорости, измеренные наблюдателем X1 относительно Земли, будут соответственно равны:

$$v_{12+} = V_{(0)12+}\cdot \mathrm{ch}\chi_{01} \approx c\cdot\sqrt{\frac{1-v_{01}/c}{1+v_{01}/c}} = c_{x1+},$$

$$v_{12-} = V_{(0)12-}\cdot \mathrm{ch}\chi_{01} \approx -c\cdot\sqrt{\frac{1+v_{01}/c}{1-v_{01}/c}} = c_{x1-}.$$

Скорость фотонов света по оси y_1 (в направлении перпендикулярном движению Земли), измеренная наблюдателем X1, в соответствии с (2.4в) будет равна:

$$c_{y1} = c/\mathrm{ch}\chi_{01} = c\cdot\sqrt{1-(v_{01}/c)^2}.$$

Время t_h, в течение которого луч света проходит в интерферометре Майкельсона – Морли расстояние S туда и обратно по оси x_1 равно:

$$t_h = \frac{S}{c_{x1+}} + \frac{S}{|c_{x1-}|} = \frac{2S}{c\sqrt{1-(v_{01}/c)^2}}. \tag{8.3}$$

Время t_p, в течение которого луч света проходит в интерферометре Майкельсона–Морли расстояние S туда и обратно по оси y_1 равно:

$$t_p = \frac{2S}{c_{y1}} = \frac{2S}{c\sqrt{1-(v_{01}/c)^2}}. \tag{8.3а}$$

Из уравнений (8.3) и (8.3а) следует, что $t_h = t_p$.

Экспериментальное определение скоростей c_{x1+} и c_{x1-}наталкивается на проблему синхронизации часов. Допустим, что покоящиеся в ИСО1 часы 1 и часы 2 синхронизированы в точке А. Для того чтобы часы 2 переместить в точку В этой же системы, их нужно на некоторое время перенести в другую инерциальную систему, где ход времени иной. А это в свою очередь приводит к рассинхронизации часов.

Два фотона в неподвижной ИСО будут разлетаться в противоположные стороны со скоростью относительно друг друга равной

$$V_\Gamma = c\cdot \mathrm{th}\chi_\gamma - c\cdot \mathrm{th}(-\chi_\gamma) = 2\cdot V_\gamma \cong 2\cdot c.$$

§9. Принцип относительности

Для ИСО1 принцип полной относительности выполняется только в тех случаях, когда время, определяемое формулой (6.1а), практически не зависит от значения «гиперболического угла» χ_{12}. А это возможно в трёх случаях:

1) $\text{th}\,\chi_{12} << 1$ при $1 > \text{th}\,\chi_{01} > -1$;
2) $\text{th}\,\chi_{12} \approx 1$ при $1 > \text{th}\,\chi_{01} > -1$;
3) $\text{th}\,\chi_{01} \approx 0$ при $1 > \text{th}\,\chi_{12} > -1$.

Первый случай соответствует классической механике. В классической механике участки кривой $v = c \cdot \text{th}\,\chi$ заменяются симметричными отрезками касательных, в пределах которых считается, что скорость v изменяется линейно. Точка касания касательной к кривой $v = c \cdot \text{th}\,\chi$ определяет скорость v_{01} и время t_{01} инерциальной системы. Длина отрезков касательной выбирается, исходя из заданной погрешности.

Второй случай соответствует электродинамике, в которой скорость распространения электромагнитных волн близка к предельной скорости c.

Третий случай выполняется для инерциальной системы, χ которой близко к нулю ($\chi \approx 0$). Третий случай, если излагаемая в настоящей статье теория перейдёт из разряда гипотез в разряд наук, может представить интерес для космической навигации. Расчёт траектории космического корабля за пределами Солнечной системы, а также определение координат его местонахождения, наиболее удобно проводить с привязкой к инерциальной системе, у которой $\chi \approx 0$.

В остальных случаях для каждой скорости v_{1n} тела B относительно ИСО1 приходится вводить для времени свой поправочный масштабирующий коэффициент $\kappa_{1n} = t_{1(n)} / t_{01} = 1 + \text{th}\,\chi_{01} \cdot \text{th}\,\chi_{1n}$. Поэтому во избежание путаницы математические операции со скоростями v_{1n} желательно проводить с привязкой их ко времени неподвижной ИСО с помощью соотношений типа (6.1), (6.2) и (6.2б).

§10. Энергия и время

Воспользовавшись формулой (3.1а) приведём формулу (0.7), полученную для энергии, к следующему виду:

$$E = m \cdot c^2 \cdot \ln(\text{ch}\chi) = E_0 \cdot \ln(T / t_0) \quad . \tag{10.1}$$

Из соотношения (10.1) следует, что между полной энергией, запасённой телом, и масштабом времени для этого тела имеется жёсткая связь. Время T согласно соотношению (10.1) определится следующим соотношением:

$$T = t_0 \cdot e^{E/mc^2} = t_0 \cdot e^{E/E_0} \quad . \tag{10.1а}$$

Отсюда масштаб времени будет определяться следующей формулой:

$$T / t_0 = \text{ch}\chi = e^{E/E_0} \quad .$$

§11. Движение заряда в постоянном электрическом поле

Проведём сравнение соотношений (0.4), (0.4а) и (0.4б) с соответствующими формулами теории электромагнетизма.

Вначале выпишем из [2] известные факты и формулы, которые потребуются для сравнения.

Точечный заряд Q в соответствии с законом Кулона [2, стр. 231, ф. (15.1)] действует на единичный точечный заряд q с силой

$$F_e = q \cdot E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q \cdot Q}{r^2} \quad , \tag{11.1}$$

где $E = F_e / q$ – напряжённость электрического поля (электрическое поле);
$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Кл^2 / (Н · м^2) – диэлектрическая проницаемость вакуума;
r – расстояние между зарядами Q и q; $\pi = 3{,}14$.

Полная электромагнитная сила (сила Лоренца) F, действующая на движущийся со скоростью v заряд q, записывается в следующем виде [2, стр. 279, ф. (17-17)]:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} + q \cdot \vec{v} \times \vec{B} = \vec{F_e} + \vec{F_m} \quad , \tag{11.2}$$

где $\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H}$ – магнитное поле;

$\vec{H}$ – напряжённость магнитного поля;

$\mu_0 = 4\cdot\pi\cdot 10^{-7}\,H/A^2$ – магнитная проницаемость вакуума;

$\vec{F_e} = q\cdot\vec{E}$ – электрическая сила;

$\vec{F_m} = q\cdot\vec{v}\times\vec{B}$ – магнитная сила.

Магнитная сила $\vec{F_m}$ всегда перпендикулярна скорости $\vec{v}$ движущегося заряда. Поэтому магнитное поле не может ни увеличить, ни уменьшить кинетической энергии движущегося заряда.

На расстоянии y от бесконечного прямолинейного проводника с постоянным током I величина магнитного поля равна [2, стр. 277, ф. (17-13)]

$$B = (k_0/c^2)\cdot(2I/y) = (v/c^2)\cdot(2\cdot k_0\cdot\lambda/y) = (v/c^2)\cdot E\,,$$

где $k_0 = 1/(4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0)$; $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\cdot\mu_0}$ – скорость света в вакууме;

$E = 2k_0\cdot\lambda/y$ [2, стр. 248, ф. (16-5)];

$\lambda = dQ/dl = (dQ/dt)/(dl/dt) = I/v$ – линейная плотность заряда в проводнике; v – скорость движения зарядов в проводнике.

Магнитная сила F_m, действующая со стороны тока I на заряд q, двигающийся со скоростью v_q параллельно проводнику с током на расстоянии y от проводника, описывается выражением $F_m = q\cdot v_q\cdot B$. Следовательно, при выполнении условия $v_q = v$ можно записать, что

$$F_m = (v/c)^2\cdot q\cdot E = (v/c)^2\cdot F_e\quad. \tag{11.3}$$

Согласно [2, стр. 281, ф. (17-19)] «если система зарядов движется как целое со скоростью v, то возникает магнитное поле $\vec{B} = (1/c^2)\cdot\vec{v}\times\vec{E}$».

Предположим теперь, что заряд q разгоняется относительно неподвижной ИСО в поле постоянной силы $\vec{F_\varepsilon} = q\cdot\vec{E_\varepsilon}$. Тогда в соответствии с (0.4) можно записать:

$$\vec{F_\varepsilon} = \vec{F_{\varepsilon v}} + \vec{F_{\varepsilon\mu}}\quad, \tag{11.4}$$

где $\vec{F_{\varepsilon v}}$ – составляющая электрической силы $\vec{F_\varepsilon}$, направленная на изменение скорости движения заряда q; $\vec{F_{\varepsilon\mu}}$ – составляющая электрической силы $\vec{F_\varepsilon}$, направленная на изменение магнитного поля заряда q.

В соответствии с (0.4а) для силы направленной на изменение скорости движения заряда можно записать

$$F_{\varepsilon v} = F_\varepsilon/ch^2\chi\quad. \tag{11.4а}$$

Покажем, что это соотношение не противоречит преобразованию электрической силы F_e (11.1). В правой части формулы (11.1) от времени зависит только диэлектрическая проницаемость вакуума ε_0. Из размерности ε_0 следует, что диэлектрическая проницаемость вакуума находится в прямой квадратичной зависимости от масштаба времени. Исходя из этого, диэлектрическая проницаемость ε_{01} системы ИСО1 отобразится через диэлектрическую проницаемость вакуума неподвижной ИСО следующим образом:

$$\varepsilon_{01} = \varepsilon_0\cdot ch^2\chi_{01}\quad. \tag{11.5}$$

Следовательно для электрической силы F_{e01}, измеренной наблюдателем X в ИСО1 можно записать следующее соотношение:

$$F_{e01} = F_{ev01} = F_e/ch^2\chi_{01}\quad, \tag{11.6}$$

где F_e – электрическая сила, действующая на покоящийся в неподвижной ИСО заряд q.

В свою очередь от диэлектрической проницаемости вакуума ε_0 также зависит скорость света в вакууме:

$$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\cdot\mu_0}\quad. \tag{11.7}$$

Из размерности μ_0 следует, что магнитная проницаемость вакуума не зависит от времени, то есть она является инвариантной ($\mu_{01} = \mu_0$). Отсюда скорость света относительно ИСО1 равна

$c_1 = 1/\sqrt{\varepsilon_{01} \cdot \mu_{01}} = c/\mathrm{ch}\chi_{01}$, что соответствует соотношению (2.4в). Таким образом, мы показали, что соотношение (11.4а) не противоречит уравнениям теории электромагнетизма.

Для силы направленной на изменение магнитного поля заряда также по аналогии с (0.4б) можно записать

$$F_\mu = F_\varepsilon \cdot \mathrm{th}^2\chi = F_{\varepsilon v} \cdot \mathrm{sh}^2\chi \quad . \tag{11.8}$$

Покажем, что это предположение не противоречит соотношению (11.3) для магнитной силы F_m. С учётом формул (1.1), и (11.6) для магнитной силы F_{m01}, измеренной наблюдателем X в ИСО1, можно записать следующее соотношение:

$$F_{m01} = (v_{01}/c)^2 \cdot F_e = \mathrm{th}^2\chi_{01} \cdot F_e = F_{e01} \cdot \mathrm{sh}^2\chi_{01} \quad . \tag{11.9}$$

Соотношение (11.9) полностью аналогично выражению (11.8).

§12. Движение тела в постоянном гравитационном поле

Согласно [2, стр. 79] «под гравитационным полем мы понимаем гравитационное ускорение, как функцию координат». Будем считать, что постоянное гравитационное ускорение направлено по оси x. Если тело B, не имеющее электрического заряда, разгоняется в неподвижной ИСО под действием постоянной гравитационной силы $\vec{F_\gamma}$, то для этой силы по аналогии с выражением (11.4) можно записать:

$$\vec{F_\gamma} = \vec{F_{\gamma v}} + \vec{F_{\gamma\phi}} \quad , \tag{12.1}$$

где $\vec{F_{\gamma v}}$ – составляющая гравитационной силы $\vec{F_\gamma}$, направленная на изменение скорости тела B; $\vec{F_{\gamma\phi}}$ – составляющая гравитационной силы $\vec{F_\gamma}$, направленная на изменение некоего гипотетического поля тела B (назовём это поле торсионным).

В соответствии с (0.4а) и (0.4б) запишем:

$$F_{\gamma v} = F_\gamma / \mathrm{ch}^2\chi \quad , \tag{12.1а}$$

$$F_\phi = F_\gamma \cdot \mathrm{th}^2\chi = F_{\gamma v} \cdot \mathrm{sh}^2\chi \quad . \tag{12.1б}$$

Тело A массой M в соответствии с законом всемирного тяготения [2, стр. 71, ф. (5-1)] действует на тело B массой m с силой

$$F_g = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \quad , \tag{12.2}$$

где r – расстояние между центрами масс тел A и B;
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н · м^2 · кг$^{-2}$ – гравитационная постоянная.

По аналогии с (11.1) запишем

$$G = 1 / (4 \cdot \pi \cdot \gamma_0),$$

где $\gamma_0 \approx 1{,}2 \cdot 10^9$ кг^2 / (Н · м^2) – гравитационная проницаемость вакуума.

Покажем, что выражение (12.1а) не противоречит преобразованию гравитационной силы F_g. В правой части формулы (12.2) от времени зависит только γ_0. Из размерности γ_0 следует, что гравитационная проницаемость вакуума находится в прямой квадратичной зависимости от масштаба времени. Исходя из этого, гравитационная проницаемость γ_{01} системы ИСО1 отобразится через гравитационную проницаемость вакуума неподвижной ИСО следующим образом:

$$\gamma_{01} = \gamma_0 \cdot \mathrm{ch}^2\chi_{01} \quad . \tag{12.3}$$

Следовательно для гравитационной силы F_{g01}, измеренной наблюдателем X в ИСО1 можно записать следующее соотношение:

$$F_{g01} = F_{gv01} = F_g / \mathrm{ch}^2\chi_{01} \quad , \tag{12.4}$$

где F_g – гравитационная сила, действующая на покоящееся в ИСО тело B.

Если предположить, что распространение электромагнитных и гравитационных волн описывается однотипными математическими соотношениями, то по аналогии с формулой (11.7) можно записать

$$c = 1/\sqrt{\gamma_0 \cdot \phi_0} \quad , \qquad (12.5)$$

где ϕ_0 – торсионная проницаемость вакуума.

Из соотношения (12.5) следует, что $\phi_0 \approx 9{,}26 \cdot 10^{-27}$ Н · с^2 / кг^2.

Заключение

В статье на основе анализа формулы сложения скоростей (1.7а) выведено соотношение для замедления времени и показано, что преобразования при переходе от одной инерциальной системы к другой сводятся к соответствующему масштабированию физических величин, зависящих от времени.

Соотношения, полученные в настоящей статье, не противоречат первому постулату Эйнштейна (см. §2). Не противоречат они и второму постулату Эйнштейна [6, стр. 10]: «Каждый луч света движется в «покоящейся» системе координат с определённой скоростью V, независимо от того, испускается ли этот луч света покоящимся или движущимся телом».

Однако для предлагаемой теории требование инвариантности скорости света является избыточным. Поэтому второй постулат Эйнштейна, изложенный в [4, стр. 34] приемлем для неё только в следующей редакции: «Скорость света в вакууме одинакова по всем направлениям и в любой области данной инерциальной системы отсчёта и одинакова во всех инерциальных системах отсчёта» с учётом масштаба собственного времени инерциальных систем. То есть наблюдатели X и X1 (см. рис. 1), при измерении скорости света получат одно и то же численное значение, но каждый в своём времени (см. §4).

В одной из своих работ А. Эйнштейн пишет [7, стр. 140], что

> «В 1895 г. Лоренц, предполагая эфир абсолютно неподвижным, предложил весьма совершенную теорию электромагнитных явлений».

Кроме того, Эйнштейн отметил [8, стр. 414–415], что

> «Успехи теории Лоренца были настолько большими, что физики, не задумываясь, отказались бы от принципа относительности, если бы не был получен один важный экспериментальный результат, о котором мы теперь должны сказать, а именно результат опыта Майкельсона. <*…Описание опыта Майкельсона…*>. Чтобы привести отрицательный результат этого эксперимента в согласие с теорией, Г.А. Лоренц и Фицджеральд выдвинули гипотезу о том, что каменная плита со всеми смонтированными на ней приборами испытывает в направлении движения Земли небольшое сокращение, как раз такое, что ожидаемый эффект компенсируется противоположным эффектом вследствие сокращения».

Предлагаемая в настоящей статье теория, также как и «теория Лоренца», основана на существовании неподвижной инерциальной системы отсчёта, но результат опыта Майкельсона-Морли не является для неё отрицательным. Поэтому полученные в настоящей статье соотношения дают основание полагать, что для теории электромагнитных явлений гипотеза, выдвинутая в своё время Г.А. Лоренцем и Фицджеральдом, также является избыточной.

Для СТО справедливо утверждение [4, стр. 33], что «хотя среди инерциальных систем отсчёта нет привилегированной, в них имеется одна привилегированная скорость». В предлагаемой теории, в отличие от СТО нет привилегированной скорости, но есть одна привилегированная ИСО, которая считается неподвижной и время в которой течёт наиболее быстро.

Литература

1. Сизенов В.А. *Прямолинейное движение тела под действием постоянной силы*. «Актуальные проблемы современной науки», № 1, 2008 г. М. Изд. «Компания Спутник +», стр 156–162.

2. Орир Дж. *Физика*, Т.1, 2; / Дж. Орир – М.: МИР, 1981 – 622 с.

3. Яворский Б.М. *Основы физики*, Т 1 / Б.М. Яворский, А.А. Пинский – М.: Физмалит, 2000 – 624 с.

4. Угаров В.А. *Специальная теория относительности* / В.А. Угаров – М.: Наука, 1977 – 384 с.

5. Энциклопедический словарь юного физика / Сост. В.А. Чуянов. – М.: Педагогика, 1984. – 352 с.

6. Эйнштейн А. *К электродинамике движущихся тел*, Собрание научных трудов, т. 1 / Альберт Эйнштейн – М.: Наука, 1965, стр. 7–35.

7. Эйнштейн А. *Принцип относительности и его следствия в современной физике*, Собрание научных трудов, т. 1 / Альберт Эйнштейн – М.: Наука, 1965, стр. 138–164.

8. Эйнштейн А. *Теория относительности* (1915 г.), Собрание научных трудов, т. 1 / Альберт Эйнштейн – М.: Наука, 1965, стр. 410–424.

Отослана в редакцию 10.03.2008.

Опубликована: Сизенов В.А. *Преобразования относительно инерциальных систем отсчёта*. «Актуальные проблемы современной науки», № 3, 2008 – М.: Изд. «Компания Спутник +», стр. 144–161.

Сборник находится в разработке.
Продолжение следует.

Закрытие сборника

С такой заключительной надписью настоящий сборник был выпущен в виде «препринта» (т.е. предварительного варианта сборника) 1 сентября 2014 года. Для него имелись еще 6 статей этого автора:

Сизенов В.А. Оптический эффект Доплера
Сизенов В.А. Преобразования координат
Сизенов В.А. Геометрия Лобачевского и преобразования координат
Сизенов В.А. Преобразования Лобачевского-Лоренца
Сизенов В.А. Геометрическая интерпретация преобразований Лобачевского-Лоренца
Сизенов В.А. Геометрия пространства скоростей

Статьи эти (как и две помещенные выше) были мне представлены Автором в двух видах: в DOC и в PDF файлах.

Главная причина, которая тогда, в 2014 году, затормозила дальнейшую подготовку этого сборника и помещение в него перечисленных выше статей, был способ подготовки материала Автором. Ни до, ни после этого я никогда не встречала такой способ. Автор каким-то образом (возможно, какой-то приставкой к *Word* или какой-то версией *Word*-а) вставлял в текст математические формулы (которых и так очень много в его текстах: сплошные формулы) в виде картинок (.gif и .wmz файлов). Причем ладно, если он это вставлял бы тогда, когда иначе нельзя: когда в формуле квадратный корень со сложным выражением под ним и т.п. Но он этим способом вставлял и простую букву **F** или простой индекс V_0 и т.п., когда всё можно изобразить обычным текстом *Word*-а. (В приведенных выше статьях я частично удалила эти неоправданные картинки, заменив их нормальным текстом, но это сложная работа, отнюдь не вызывавшая у меня энтузиазм).

Таким образом, текст автора, даже перенесенный в мои файлы, был пресыщен этими картинками, *Word* его обрабатывал туго и трудно (например, запись на диск файла происходила раз в 10 дольше, чем обычно для файла такого размера), а иногда и вовсе ломался, уничтожая работу, сделанную после последнего сохранения.

Тем не менее, выставляя 1 сентября 2014 года в Интернет «препринт» этого сборника, я намеревалась «когда-нибудь» его продолжить, несмотря на трудности. Однако в течение трех лет мне руки никак не доходили до этого сборника и не получалось снова взяться за статьи Сизенова. И вот, только сейчас, в сентябре 2017 года, я наконец снова взялась за них и потратила на них два дня.

Я изрядно продвинула их к публикации в МОИ (хотя всё время надо мной довлел вопрос: «Если с такой трудностью обрабатывается текст статьи, когда он находится в отдельном файле, то что же будет, когда все 8 статей Сизенова будут в одном файле сборника?!).

Но сегодня утром *Word* «сдох» при обработке одной из статей Сизенова, уничтожив два часа моей работы, так как не сохранил даже той копии, которую по установкам опций должен сохранять каждые 10 минут и которая обычно не позволяет терять более чем 10 минут работы при крахе *Word*-а. И тогда я сказала: «Ну и к черту эти статьи! Не буду я больше добиваться их помещения в этот сборник!».

Итак, «по техническим причинам» я этот сборник здесь закрываю, а шесть статей, которые мне так и не удалось оформить для альманаха МОИ, помещаю в Интернет в том виде, в каком мне их подал Автор. Они находятся в файле

Sizenov.zip: https://yadi.sk/d/2-A4_ZrO3McwYV

и там же в этом архиве я присоединила оригинал статьи Котельникова.

Марина Ипатьева

5 сентября 2017 года

Научно-популярное издание
«Мысли об Истине»
Выпуск № 19
Сформирован 5 сентября 2017 года

Все читатели приглашаются принять участие в создании альманаха МОИ и присылать свои статьи и заметки для этого издания по адресу: Marina.Olegovna@gmail.com. Если присланные материалы будут соответствовать направлению Альманаха и минимальным требованиям информативности и корректности, то они будут опубликованы в нашем издании.

Основной вид существования Альманаха МОИ – в виде PDF-файлов в Вашем компьютере. Держите все выпуски МОИ в одной папке. Скачать PDF-ы можно с разных мест в Интернете, и не важно, откуда номер скачан. В Интернете нет одной фиксированной резиденции МОИ.

Содержание